UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Chapitre 3

Hamza BOUJEMAA

En plus de la physique où de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles, d'autres domaines comme la biologie et l'étude des populations (dans un modèle "prédateur-proie" par exemple) font appel aux équations différentielles. C'est un domaine qui connaît un grand développement motivé par des questions non encore résolues. En fait, on sait résoudre très peu d'équations différentielles. Les équations linéaires à coefficients constants, certaines équations linéaires à coefficients non constants et les équations à variables séparables font partie de celle qu'on sait résoudre.

L'objectif de chapitre est de donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines équations relativement simples. Tout d'abord, on précise ce qu'on entend par "équations différentielles" et par solutions d'une équation donnée vérifiant certaines conditions initiales. En particulier, on étudiera les équations homogènes, de Bernoulli et de Ricatti.

I. Définitions et vocabulaire

Définitions Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on appelle équation différentielle d'ordre n et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad (*)$$

avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, (**)

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ est vecteur fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'inconnue est une fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0 .

On appelle solution de cette équation toute fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (*) ainsi que les conditions initiales (**).

La solution est dite maximale si l'intervalle ouvert est maximal. Autrement écrit, si on ne peut pas trouver une autre solution qui prolonge y .

Exemples 1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. Ici, nous avons bien entendu

$$f(x, y(x)) = y(x) + x.$$

On peut vérifier que toute fonction de la forme

$$y(x) = Ke^x - x - 1, \text{ avec } K \text{ constante arbitraire}$$

est une solution de l'équation et que

$$y(x) = e^x - x - 1$$

est une solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$. Il s'agit de la solution maximale qui vérifie la condition initiale donnée car elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ est une équation différentielle du second ordre et

$$y(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

est une solution qui vérifie la condition initiale et elle est maximale. Si on remplace la condition initiale précédente par $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ alors la fonction $y(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ est la solution maximale.

3. $y''(x) = \cos y(x) + y'(x)\frac{1}{1+x^2}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ est une équation différentielle du second ordre avec, dans ce cas, $f(x, y(x), y'(x)) = \cos y(x) + y'(x)\frac{1}{1+x^2}$. Il n'est pas aisé de déterminer une solution de cette équation.

Nous allons dans le paragraphe suivant étudier certaines formes particulières d'équations différentielles du premier ordre.

II. Equations différentielles du premier ordre

1. Equations à variables séparables

Définition Une équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante

$$g(y(x))y'(x) = h(x)$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et continues.

En pratique, cela signifie qu'on peut séparer x et y .

Conséquence On a dans ce cas

$$\int g(y(x))y'(x) dx = \int h(x) dx,$$

et par suite si G et H désignent respectivement une primitive de g et de h , on aura

$$G(y) = H(x) + K.$$

On pourra ensuite essayer d'exprimer y en fonction de x .

Exemples 1. $y'(x) = x^2y(x) + x^2$ avec $y(0) = 1$ est à variables séparables. En effet, on peut la ramener à la forme

$$\frac{y'(x)}{y(x) + 1} = x^2,$$

par suite, en passant aux primitives, on a

$$\ln|y + 1| = \frac{1}{3}x^3 + K,$$

ce qui conduit à

$$y(x) = K_1 e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$$

K étant une constante arbitraire non nulle. La condition initiale $y(0) = 1$ entraîne $K_1 = 2$. On peut remarquer que la fonction y constante égale à -1 est solution répondant à la condition initiale $y(0) = -1$. Par suite, dans la famille des solutions, K_1 peut prendre toutes les valeurs réelles possibles.

2. $(x^2 + 1)y'(x) = y^2 - 1$ est à variables séparables. On a

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$\frac{y'}{2(y - 1)} - \frac{y'}{2(y + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

En intégrant, les deux membres, et après simplification, on trouve

$$\ln\left|\frac{y - 1}{y + 1}\right| = 2\text{Arc tan}(x) + K,$$

et il sera possible d'exprimer y en fonction de x .

2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définitions On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions supposées définies et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$.

L'équation

$$y'(x) = a(x)y(x)$$

est dite équation homogène associée ou équation sans second membre. Elle sera souvent notée "ssm".

Exemple $y'(x) + y(x) = \sin(x)$ est une équation linéaire du premier ordre où le second membre est la fonction $x \mapsto \sin(x)$ et $y'(x) + y(x) = 0$ est l'équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation ssm, soit y_1 une solution quelconque. On pose

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} y_1(x).$$

Il est aisé d'assurer que y vérifie

$$y'(x) = 0,$$

et par suite on a nécessairement

$$y_1(x) = K e^{\int a(x) dx} \quad \text{où } K \text{ est une constante arbitraire.}$$

Cette solution est définie sur l'intervalle ouvert sur lequel la fonction a est définie et continue.

Remarque Si y est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ssm, alors ou bien y est la solution identiquement nulle ou bien y ne s'annule en aucun point.

Le théorème suivant permet de résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre et à coefficients constants.

Théorème Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Démonstration Elle ne présente pas de difficultés particulières. D'une part, y_0 vérifie

$$y_0'(x) = a(x)y_0(x) + b(x),$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

ceci équivaut en soustrayant membre à membre les deux équations à

$$(y - y_0)'(x) = a(x)[(y - y_0)(x)].$$

Ce qui prouve le théorème.

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre. L'équation ssm est une équation à variables séparables

qu'on pourra résoudre en utilisant la méthode exposée au paragraphe précédent.

Pour avoir une solution particulière de l'équation avec second membre, la méthode de la variation de la constante est d'une grande utilité.

Méthode de la variation de la constante

A partir de la solution générale de l'équation ssm

$$y(x) = Ke^{\int a(x) dx}$$

la méthode consiste à considérer K comme une fonction de x et à remplacer dans l'équation avec second membre. On aura

$$y'(x) = K'(x)e^{\int a(x) dx} + a(x)K(x)e^{\int a(x) dx}.$$

En reportant dans l'équation avec second membre, on obtient

$$K'(x) = b(x)e^{-\int a(x) dx}.$$

Par suite, on a $K(x) = \int b(x)e^{-\int a(x) dx} dx$ et il suffit de trouver une seule fonction K pour déduire une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exemples On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = \sin(x).$$

La solution générale de l'équation ssm est

$y(x) = Ke^{-x}$, et la méthode de la variation de la constante donne

$$K'(x) = \sin(x)e^x. \text{ On en déduit } K(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$

Exemples particuliers 1. Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = -y(x) + x^2 \text{ avec la condition initiale } y(0) = 0.$$

On peut noter que, dans la forme donnée, l'équation différentielle n'impose pas la condition $x \neq 0$. Pour la résoudre, on peut noter que c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'équation ssm associée à variables séparables

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x}.$$

Cette forme suppose $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, et la résolution donne les solutions

$$y(x) = K \frac{1}{x} \quad K \text{ étant une constante qui dépend des conditions initiales.}$$

La solution de l'équation complète est

$$y(x) = K \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 \quad (*)$$

Cette solution est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ selon la condition initiale.

Maintenant, si on cherche une solution z qui vérifie la condition initiale $z(0) = 0$, on remarque que cette solution ne peut pas être identiquement nulle sur un voisinage de 0. Par conséquent, il existe x_0 voisin de 0 tel que $z(x_0) = k_0 \neq 0$. Ici encore, l'idée est de choisir (x_0, k_0) comme condition initiale. On peut conclure que z coïncide avec une solution de la forme (*) sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Comme précédemment, ces deux solutions coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ si on suppose $x_0 > 0$. Or ceci est impossible car z est de classe $\mathcal{C}^1$, par suite elle doit admettre une limite finie à droite de 0 ce qui ne serait pas vrai. Ainsi, il n'existe pas de solution répondant à la condition initiale $(0, 0)$.

2. Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2y(x) - x \text{ avec la condition initiale } y(0) = 0.$$

En procédant comme précédemment, on obtient la famille de solutions

$$y(x) = Kx^2 + x \quad K \text{ constante réelle.}$$

Contrairement à la situation précédente, on peut ici prolonger les solutions en 0. Pour cet exemple, on a une infinité de solutions qui répondent à une condition initiale donnée. En effet, choisissons, par exemple, la condition initiale $y(1) = 3$, alors il est clair que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = 2x^2 + x \quad \text{est une solution.}$$

On peut construire une infinité de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient cette condition initiale de la façon suivante: On pose $y(x) = 2x^2 + x$ si $x \geq 0$ et $y(x) = Kx^2 + x$ si $x \leq 0$, où K est une constante arbitraire. Il faut remarquer que la fonction proposée est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Equations homogènes du premier ordre

Définitions Ce sont les équations du type

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

Pour résoudre ce genre d'équations, le changement de variable $y(x) = x \alpha(x)$, où α est une fonction à déterminer, permet de transformer l'équation initiale en une équation du premier ordre à variables séparables.

Exemples

$$x^2 y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2$$

est une équation homogène. En effet, elle peut être ramenée à la forme

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1,$$

dans ce cas, f est la fonction vérifiant $f(t) = t^2 + t + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Après simplification, le changement de variable précédent permet d'obtenir

$$\alpha'(x)x + \alpha(x) = \alpha^2(x) + \alpha(x) + 1 \text{ c'est à dire } \frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x) + 1} = \frac{1}{x}.$$

D'où $\alpha(x) = \tan(\ln|x| + K)$, et par suite, $y(x) = x \tan(\ln|x| + K)$.

4. Equations de Bernoulli

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0, \text{ avec } n \geq 2,$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

La méthode de résolution consiste à diviser par y^n ce qui conduit, modulo un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0.$$

Si on pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, on a

$$\frac{1}{1-n} z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0.$$

Exemple $y'(x) + x^2 y(x) + x^5 y^2(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ est de Bernoulli. On pose donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et on obtient l'équation

$$-z'(x) + x^2 z(x) + x^5 = 0.$$

La résolution de l'équation ssm donne

$$z(x) = K e^{x^3/3}, \text{ et la variation de la constante donne } K'(x) = x^5 e^{-x^3/3}.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$K(x) = (-x^3 - 3)e^{-x^3/3}, \text{ par suite } z(x) = Ke^{x^3/3} - x^3 - 3, \text{ et finalement}$$

$$y(x) = \frac{1}{Ke^{x^3/3} - x^3 - 3}, \text{ ou la constante } K \text{ est à déterminer selon la condition initiale.}$$

Dans notre cas, on a

$$y(x) = \frac{1}{4e^{x^3/3} - x^3 - 3}.$$

Remarque importante Nous nous sommes permis de diviser par y^n , or ceci n'est possible que si la fonction y ne s'annule jamais. Il s'avère que la fonction identiquement nulle est solution de toute équation de Bernoulli et si y est une autre solution s'annulant en un point t_0 , alors, d'après l'unicité de la solution maximale, y devrait être la fonction identiquement nulle. Ceci justifie donc que mise à part la solution triviale, toutes les autres solutions ne s'annulent en aucun point.

5. Equations de Ricatti

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x),$$

où a , b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

Quand on connaît une solution particulière y_0 de cette équation, on fait le changement de variable

$$z = y - y_0.$$

L'intérêt est que nous obtenons une équation qui est de Bernoulli en z ,

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + (2a(x)y_0(x) + b(x))z(x).$$

Remarque importante. Avant de passer à l'autre paragraphe, il est utile de remarquer que toutes les solutions maximales obtenues pour les différents types d'équations sont uniques une fois la condition initiale choisie. On parle d'existence et d'unicité de la solution maximale.

III. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ce sont les équations différentielles linéaires de la forme

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = c(x), \text{ avec } n \geq 2, \quad (*)$$

où a et b sont deux constantes réelles et c une fonction supposée continue sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. c est le second membre de l'équation.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on a le résultat suivant:

Théorème Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.

Pour résoudre l'équation l'équation ssm, on a besoin de définir l'équation caractéristique.

Définition L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du second ordre est

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Le théorème suivant permet de donner un algorithme de résolution.

Théorème On pose $\Delta = a^2 - 4b$.

1. Si $\Delta > 0$ et si λ_1 et λ_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ } K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

2. Si $\Delta = 0$ et si λ_0 est la racine double de l'équation caractéristique, alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = (K_1 x + K_2) e^{\lambda_0 x}, \text{ } K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

3. Si $\Delta < 0$ et si $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ sont les deux racines complexes conjuguées, alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = (K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \text{ } K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

Démonstration On suppose $b = 0$. L'équation devient

$$y''(x) + ay'(x) = 0.$$

Dans ce cas, le changement de variable $z = y'$ transforme l'équation initiale en une équation différentielle du premier ordre ssm à coefficients constants. En effet, on obtient

$$z'(x) + az(x) = 0$$

$$\text{dont la solution générale est de la forme } z(x) = Ke^{-ax},$$

où K est une constante réelle dépendant des conditions initiales. Ainsi, en revenant à la fonction y , on a

$$y'(x) = Ke^{-ax}.$$

Cette dernière équation admet la solution générale suivante

$$y(x) = -Ke^{-ax} + K_0,$$

K_0 étant une nouvelle constante d'intégration. Nous avons bien établi le théorème dans le cas où b est nul. En effet, dans ce cas, les deux solutions réelles sont $\lambda_1 = -a$ et $\lambda_2 = 0$.

On suppose à présent $b \neq 0$ et on introduit la variable

$$z = y' + \gamma y \text{ où } \gamma \text{ est un réel que nous allons préciser.}$$

En reportant dans l'équation (*), on a

$$z'(x) + (a - \gamma)z(x) + (\gamma^2 - a\gamma + b)y(x) = 0.$$

Si $a^2 - 4b > 0$, et si $\lambda_1 = (1/2)(a + \sqrt{a^2 - 4b})$ et $\lambda_2 = (1/2)(a - \sqrt{a^2 - 4b})$ sont les deux racines réelles, pour le choix $\gamma = \lambda_1$, on a

$$z'(x) + \lambda_2 z(x) = 0,$$

et pour le choix $\gamma = \lambda_2$ on

$$z'(x) + \lambda_1 z(x) = 0.$$

On obtient, comme solution générale, respectivement

$$z(x) = Ke^{-\lambda_2 x} \text{ et } z(x) = Ke^{-\lambda_1 x}.$$

Le premier cas donnera

$$z(x) = y'(x) + \lambda_1 y(x) = Ke^{-\lambda_2 x},$$

et le second

$$z(x) = y'(x) + \lambda_2 y(x) = Ke^{-\lambda_1 x}.$$

Nous reconnaissons deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants et qui admettent le même ensemble de solutions

$$y(x) = K_1 e^{-\lambda_1 x} + K_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

Il faut remarquer pour finir que $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$ sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique.

Il reste à étudier le cas $\Delta = a^2 - 4b < 0$. Dans ce cas nous avons deux racines complexes conjuguées pour l'équation

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0,$$

et l'idée de la démonstration consiste à chercher les solutions à valeurs dans $\mathcal{C}$ puis à déduire toutes les solutions possibles à valeurs réelles.

Dans ce cas, nous obtenons de la même manière

$$z(x) = K e^{-\lambda_2 x} \text{ et } z(x) = K e^{-\lambda_1 x},$$

où, cette fois-ci, λ_1 et λ_2 sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation

$$\gamma^2 - a\gamma + b = 0$$

et K une constante complexe .

Par suite, on a les solutions correspondantes

$$y(x) = K_1 e^{-\lambda_1 x} + K_2 e^{-\lambda_2 x},$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes complexes arbitraires.

Si nous voulons déduire toutes les solutions réelles possibles, K_1 et K_2 doivent être complexes conjuguées. Par suite, si on pose

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, K_1 = \eta + i\delta, \text{ et } K_2 = \eta - i\delta,$$

y sera nécessairement de la forme

$$y(x) = [2\eta \cos(\beta x) - 2\delta \sin(\beta x)] e^{\alpha x}.$$

Finalement, si on pose $K_1 = 2\eta$ et $K_2 = -2\delta$, on retrouve le résultat annoncé.

Remarque Il faut noter que nous avons bien déterminé toutes les solutions possibles pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre et nous avons par la même occasion obtenu la proposition suivante.

Proposition L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 dont une base est $\{y_1, y_2\}$ avec:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \text{ si on a deux racines réelles distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.$$

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_0 x} \text{ si on a une racine double } \lambda_0.$$

$$y_1(x) = \cos(\beta x) e^{\alpha x}, y_2(x) = \sin(\beta x) e^{\alpha x} \text{ si on a deux racines complexes conjuguées } \alpha + i\beta \text{ et } \alpha - i\beta.$$

Exemples 1. Pour trouver les solutions de $y'' + y' - 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 2 = 0$$

qui admet deux solutions réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-2x}.$$

2. Pour trouver les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

qui admet une solution réelle double $\lambda_0 = 2$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = (K_1 x + K_2) e^{2x}.$$

3. Pour trouver les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

qui admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = 1 + i$ et $\lambda_2 = 1 - i$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = (K_1 \cos x + K_2 \sin x) e^x.$$

Pour compléter l'étude, il reste à ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour cela, on va adapter la méthode de la variation de la constante aux équations linéaires du second ordre.

Méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

Dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter, la solution générale est de la forme

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x).$$

La méthode consiste à considérer K_1 et K_2 comme des fonctions de x . Par suite, on pose

$$y(x) = K_1(x) y_1(x) + K_2(x) y_2(x).$$

De plus, comme il suffit de trouver une solution particulière, nous allons imposer une restriction. Nous allons chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x),$$

avec la condition

$$K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Maintenant, si on cherche $y'(x)$, $y''(x)$ puis on reporte dans l'équation (*), on obtient l'équation

$$K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) = c(x)$$

où $c(x)$ est le second membre de l'équation différentielle. Nous avons donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0 \\ K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

Si on note

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

alors on déduit

$$K_1'(x) = \frac{-y_2(x)c(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \text{ et } K_2'(x) = \frac{y_1(x)c(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

On cherchera alors à trouver une primitive K_1 et une primitive K_2 .

Définition. La fonction $W(y_1, y_2)$ s'appelle le wronskien de y_1 et de y_2 .

Remarques 1. On peut noter que dans chacun des trois cas possibles, le wronskien des fonctions correspondantes ne s'annule en aucun point.

2. Plus généralement, si f et g sont deux solutions de l'équation ssm linéairement indépendantes, c'est à dire, telles que

$$\mu f(x) + \nu g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \nu = 0,$$

alors

$$W(f, g)(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $W(f, g)(x_0) = 0$. Alors les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants.

Supposons, par exemple, $u_1 = \alpha u_2$ pour un certain réel α convenable. Considérons ensuite les deux fonctions f et αg . Elles sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle ssm, répondant à la même condition initiale

$$y(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad y'(x_0) = f'(x_0).$$

Elles sont donc égales d'après l'unicité de la solution. Par suite, on a

$$f(x) = \alpha g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons aussi obtenu que le wronskien de deux solutions s'annule en un point si et seulement si il s'annule partout.

Exemple. On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Nous savons d'après l'exemple précédent que la solution générale de l'équation ssm est

$$y(x) = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x).$$

Dans ce cas, on a

$$W(y_1, y_2)(x) = 1.$$

D'après la méthode de la variation de la constante, et après calcul, on doit résoudre

$$K_1'(x) = -1, \quad \text{et} \quad K_2'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

On obtient alors

$$K_1(x) = -x, \quad \text{et} \quad K_2(x) = \ln|\sin(x)|.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$y_0(x) = -x \cos(x) + \sin(x) \ln|\sin(x)|.$$

On en déduit donc la solution générale de l'équation avec second membre

$$y(x) = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) + y_0(x).$$

Pour clore ce chapitre, nous allons donner des méthodes qui permettent de trouver plus rapidement une solution particulière de l'équation avec second membre lorsque celui-ci a une certaine expression.

Quelques seconds membres particuliers.

1. Si le second membre est une fonction polynôme P , on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré, ou de degré le degré de P augmenté de 1 ou de 2 selon que b est non nul, que b est nul et a est non nul ou que b est nul et a est nul aussi.

Exemple $y'' - 3y' = x$. On cherche une solution particulière sous la forme $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

2. Si le second membre est de la forme

$$P(x)e^{\gamma x},$$

où P est polynôme de degré quelconque, on cherche une solution particulière sous la forme

$$R(x)e^{\gamma x},$$

où R est un polynôme de même que P si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique, de degré celui de P augmenté de 1 si γ est racine simple de l'équation caractéristique, augmenté de 2 si γ est racine double de cette équation.

Exemple $y'' + y' - 2y = (x + 1)e^x$. On cherche une solution particulière sous la forme $(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$.

Principe de superposition Si le second membre se présente sous la forme d'une somme de fonctions

$$c_1(x) + \dots + c_n(x)$$

on cherche une solution particulière correspondant à chacune des fonctions c_i , $1 \leq i \leq n$ séparément, puis d'après la linéarité on ajoute les différentes solutions particulières trouvées. On dit qu'on les superpose.