Universite Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Hamza BOUJEMAA

Chapitre 1 Intégrale de Riemann.

On peut déterminer la surface de certaines formes géométriques élémentaires comme le carré, le rectangle, le cercle ...Mais on peut imaginer d'autres objets dont les contours sont moins habituels pour lesquels les méthodes élémentaires ne sont plus efficaces. Une des motivations pour introduire l'intégration des fonctions numériques à valeurs réelles est de répondre à cette question. Il faut se rendre compte d'une évidence: On ne peut mesurer que ce qui est mesurable. Pour le mathématicien, il s'agira lors de l'exposé sur l'intégration de bien définir les fonctions qui seront intégrables. Ceci sera fait par étapes. On étudiera d'abord les fonctions en escalier pour lesquelles les formes correspondantes sont des rectangles et par conséquent forcément mesurables. Ensuite, on élargira la classe de fonctions intégrables aux fonctions monotones et aux fonctions continues en les approchant par des fonctions en escalier.

I. Intégrales de fonctions en escalier.

Nous allons tout d'abord donner la définition d'une subdivision associée à un intervalle fermé borné $[a, b]$.

Définition: Une subdivision σ d'un intervalle $I = [a, b]$ est une suite finie strictement croissante $x_0 < ... < x_n$ d'éléments de I telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Exemple: On utilisera souvent la subdivision suivante

$$x_0 = a \text{ et pour } \; 1 \leq i \leq n, \; x_i = a + \frac{i}{n}(b-a).$$

Ainsi, à chaque subdivision σ, on a n intervalles fermés bornés associés $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$. On définit alors le pas de la subdivision comme étant

$$h = \sup_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Il est facile de constater que, pour l'exemple précédent, le pas est $\frac{b-a}{n}$.

Sur l'ensemble des subdivisions, on introduit une relation d'ordre:

On dit qu'une subdivision σ est plus fine qu'une subdivision σ' si tous les points de σ' appartiennent à σ. En d'autres termes, σ s'obtient de σ' en ajoutant d'autres points de l'intervalle $I = [a, b]$ et en ordonnant la nouvelle famille de points obtenue. De plus, à partir de deux subdivisions σ et σ', on peut définir une nouvelle subdivision $\sigma \cup \sigma'$ qui est la réunion de σ et de σ' en prenant tous les points apparaissant dans σ ou dans σ' puis en les rangeant dans un ordre strictement croissant.

Nous pouvons à présent donner la définition d'une fonction en escalier:

Définition: Une fonction $f : I = [a, b] \to I\!R$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma : x_0, ..., x_n$ de I telles que la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit une constante c_i pour $0 \leq i \leq n-1$.

On dit alors que la subdivision σ est associée à f.

Remarques: 1- Il n'y a pas de conditions portant sur les valeurs que prend la fonction f aux différents points x_i pour $0 \leq i \leq n$.
2- Si f est en escalier alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
3- Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision σ' plus fine que σ est également associée à f.

Exemple: La fonction f définie par $f(x) = E[x]$, partie entière de x, est une fonction en escalier sur tout intervalle fermé borné.

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction en escalier sur un intervalle $I = [a, b]$.

Définition: L'intégrale d'une fonction en escalier sur $I = [a, b]$ est le réel noté $I(f, \sigma)$ défini par

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i.$$

Proposition: $I(f, \sigma)$ ne dépend pas de la subdivision associée σ.

Démonstration: Si σ' est une autre subdivision associée à f, plus fine que σ alors

$$I(f, \sigma) = I(f, \sigma').$$

Il suffit de remarquer que si $]x_i, x_{i+1}[$ est un intervalle associé à la subdivision σ alors il y a une suite d'éléments $x_{i_1} < ... < x_{i_{n_i}}$ de σ' avec $x_{i_1} = x_i$, $x_{i_{n_i}} = x_{i+1}$ et telle que

$$[x_i, x_{i+1}] = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \cup ... \cup [x_{i_{n_i}-1}, x_{i_{n_i}}].$$

Par conséquent, si c_i est la constante associée à σ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors

$$(x_{i+1} - x_i) c_i = \sum_{j=i_1}^{i_{n_i}-1} (x_{j+1} - x_j) c_i.$$

En remarquant que f prend la même valeur c_i sur tous les intervalles $]x_{i_1}, x_{i_1+1}[, ...,]x_{i_{n_i-1}}, x_{i_{n_i}}[$, puis en faisant varier i de 0 jusqu'à $n-1$ et en sommant, on retrouve alors $I(f, \sigma')$.

Ensuite si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques de $I = [a, b]$, alors en considérant $\sigma" = \sigma \cup \sigma'$ ($\sigma"$ est à la fois plus fine que σ et σ') et en utilisant ce qui précède, on obtient

$$I(f, \sigma") = I(f, \sigma) \text{ et } I(f, \sigma") = I(f, \sigma') \text{ par suite } I(f, \sigma) = I(f, \sigma').$$

Notation: On écrit alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Remarque: L'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

Cas particuliers: 1- Si f est la fonction constante égale à 1 (sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)dx = b - a.$$

2- Si f est la fonction identiquement nulle sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Propriétés:

1. **Relation de Chasles:** Si c est un élément de $I = [a, b]$, $a < c < b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. **Linéarité:** Si f et g sont deux fonctions en escalier sur I et si λ et μ sont deux réels, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur I et on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration: Pour la première partie, il suffit de partir d'une subdivision σ associée à f et de considérer la subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, σ' est plus fine que σ et est aussi associée à f mais cette fois l'élément c fait partie de la nouvelle subdivision.
Pour le deuxième point de la propriété, $\lambda f + \mu g$ est clairement une fonction en escalier, car si σ est associée à f et σ' est associée à g alors $\sigma \cup \sigma'$ est associée à la fonction $\lambda f + \mu g$ et la conclusion découle alors aisément.

Pour clore ce paragraphe, nous allons faire quelques remarques qui nous seront utiles pour la suite.

Remarques:

1. Si f est une fonction en escalier positive alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
2. Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $I = [a, b]$ vérifiant $f \geq g$ alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$
3. Si f est en escalier sur I alors $|f|$ est en escalier sur I et on a
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
4. Si f est en escalier sur I et si k est un réel positif vérifiant $|f(x)| \leq k$ sur I alors
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq k(b-a).$$

(On remarquera que si σ est associée à f alors la même subdivision σ est associée à $|f|$.)

II. Intégrales de Riemann.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ et à valeurs réelles.

Définition: On dit que f est intégrable au sens de Riemann si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g et h sur I vérifiant
$$g \leq f \leq h \ \text{ et } \ \int_a^b (h-g)(x)dx \leq \epsilon.$$

Il est utile de noter que si f est une fonction intégrable sur I alors f est bornée.

Pour définir l'intégrale d'une fonction intégrable f, on note E_- l'ensemble des fonctions en escalier φ vérifiant $\varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in I$, et E_+ l'ensemble des fonctions en escalier ψ vérifiant $\psi(x) \geq f(x)\ \forall x \in I$.

De même, on note
$$A_- = \{\int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi \in E_-\} \ \text{ et } A_+ = \{\int_a^b \psi(x)dx,\ \psi \in E_+\}.$$

f étant bornée, les parties A_+ et A_- sont non vides. De plus, tout élément de A_+ est un majorant de A_- et tout élément de A_- est un minorant de A_+.

Posons

$$\alpha = \sup A_-, \quad \text{et } \beta = \inf A_+, \quad \text{alors on a } \alpha = \beta.$$

En effet, l'hypothèse $\alpha < \beta$ signifierait que pour tout couple de fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, on aurait

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \geq (\beta - \alpha)$$

et f ne serait pas intégrable.

Inversement, si les deux parties A_- et A_+ sont telles que $\sup A_- = \inf A_+$ alors on peut établir en utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure et celle de la borne inférieure que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E_-, \quad \text{et } v \in E_+, \ \int_a^b (v - u)(x)dx < \varepsilon.$$

Nous avons obtenu le théorème suivant:

Théorème: Soit $f : I = [a, b] \to I\!R$ une fonction bornée, E_-, E_+, A_- et A_+ étant définies comme précédemment, on note $I_-(f) = \sup A_-$ et $I_+(f) = \inf A_+$.

$$f \text{ est intégrable si et seulement si } \ I_-(f) = I_+(f).$$

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction intégrable:

Définition:

$$\int_a^b f(x)dx = I_-(f) = I_+(f).$$

Conséquence immédiate: Si $f : [a, b] \to I\!R$ est une fonction intégrable et positive alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Proposition: Les fonctions monotones sur $I = [a, b]$ sont intégrables.

Démonstration: Soit ζ une fonction monotone sur I. On suppose par exemple que ζ est décroissante et on choisit la subdivision donnée par $x_0 = a$ et $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $1 \leq i \leq n$. On note M_i la limite à droite de ζ en x_i pour $0 \leq i \leq n-1$ et m_i la limite à gauche de ζ en x_j pour $1 \leq i \leq n$. On considère les deux fonctions en escalier g et h définies par

$$g(x) = m_{i+1} \ \text{ et } h(x) = M_i \text{ pour } x \in]x_i, x_{i+1}[, \ 0 \leq i \leq n-1.$$

On rappelle que les valeurs prises par g et celles prises par h aux points x_i de la subdivision n'ont pas d'importance pour la suite. On a alors $g \leq \zeta \leq h$ et

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} m_{i+1} \ \text{ et } \int_a^b h(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} M_i$$

et par suite

$$\int_a^b (h-g)(x)dx \leq \frac{b-a}{n}(M_0 - m_n)$$

Proposition: Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ sont intégrables sur I.

Démonstration: On rappelle que si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$. En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ |x - x'| < \eta \ \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

On précise que η ne dépend ni de x ni de x'.
Pour la subdivision de $[a, b]$ donnée par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, on définit sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i < n-1$, les deux fonctions en escalier h et g suivantes:

$$g(x) = f(x_i) - \varepsilon \text{ et } h(x) = f(x_i) + \varepsilon.$$

Il est facile de voir que g et h sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui vérifient à partir d'un certain rang convenable n, $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h-g)(x)dx = 2\varepsilon(b-a)$. Par suite, f est intégrable.

Sommes de Riemann:

Lors de la démonstration du résultat précédent nous avons obtenu la conséquence suivante:

Proposition: Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a + i\frac{b-a}{n})}{n}(b-a) \text{ tend vers } \int_a^b f(x)dx.$$

Exemples:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 x\ dx$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 x^2\ dx$.

Remarque: La classe des fonctions continues sera par la suite étendue à une classe plus large formée par les fonctions dites réglées.

A ce stade, il serait utile de donner un exemple d'une fonction non intégrable. La fonction dite "indicatrice des rationnels" qui vaut 1 en tout nombre rationnel et 0 en tout nombre réel non rationnel est non intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. En effet, il n'est pas possible pour cette fonction de trouver deux fonctions en escalier g et h qui vérifient

$$g \leq f \leq h \text{ avec } \int_a^b (h-g)(x)dx < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0,$$

car la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquera que forcément on a

$$g(x) \leq 0; \quad \text{et } h(x) \geq 1 \ \forall x \in [a, b]$$

et donc on aura

$$\int_a^b (h-g)(x)dx \geq (b-a).$$

Avant d'étendre les propriétés des intégrales établies pour les fonctions en escalier aux fonctions intégrables, nous allons donner une caractérisation des fonctions intégrables qui facilitera les démonstrations.

Proposition: f est intégrable si et seulement si il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (θ_n) telles que

$$0 \leq (f - \varphi_n) \leq \theta_n \text{ et } \int_a^b \theta_n(x)dx \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Démonstration: Si f est intégrable, alors en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a deux suites de fonctions en escalier g_n et h_n qui vérifient

$$g_n \leq f \leq h_n \text{ avec } \int_a^b (h_n - g_n)(x)dx < \frac{1}{n},$$

on pose alors $\varphi_n = g_n$ et $\theta_n = h_n - g_n$.

Inversement, pour $\varepsilon > 0$, on choisit N entier tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, et on considère alors φ_N et θ_N et on pose $g = \varphi_N$ et $h = \theta_N + \varphi_N$. g et h conviennent.

Conséquence:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

En effet, il suffit d'écrire

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b \theta_n(x)dx.$$

La propriété de linéarité et la relation de Chasles s'étendent aux fonctions intégrables:

Propriétés: 1. Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Si f est une fonction intégrable et si λ st un réel quelconque, alors

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration: On sait qu'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ telles que

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \theta_n \text{ et } \int_a^b \theta_n(x)dx \text{ tend vers } 0,$$

et deux autres suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n)_n$ et $(\theta'_n)_n$ telles que

$$0 \leq g - \varphi'_n \leq \theta'_n \text{ et } \int_a^b \theta'_n(x)dx \text{ tend vers } 0.$$

La fonction $f+g$ est clairement intégrable et les deux suites $(\varphi_n+\varphi'_n)_n$ et $(\theta_n+\theta'_n)_n$ sont telles que:

$$0 \leq f+g-(\varphi_n+\varphi'_n) \leq \theta_n+\theta'_n \text{ et } \int_a^b (\theta_n+\theta'_n)(x)dx \text{ tend vers } 0,$$

Maintenant, si λ est un réel donné, on peut supposer que $\lambda > 0$, il est facile de se convaincre que les deux suites $(\lambda\varphi_n)_n$ et $(\lambda\theta_n)_n$ conviennent pour la fonction λf et la propriété 2 découle alors de la même propriété mais cette fois pour les fonctions en escalier.

Relation de Chasles: Si f est une fonction intégrable sur I alors pour tout réel c vérifiant $a < c < b$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration: Si $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à f, alors chaque élément de ces suites vérifie la relation de Chasles. Puisque $\int_a^c \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_c^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)dx$ et que

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^c \varphi_n(x)dx + \int_c^b \varphi_n(x)dx,$$

la même égalité résultera pour les limites.

Autres remarques:

1. Si f et g sont deux fonctions intégrables qui vérifient $f \leq g$ sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
2. Si f et g sont deux fonctions intégrables qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Disons simplement qu'on écrit la relation de Chasles après avoir suffisamment divisé l'intervalle $[a, b]$ (en chaque point où f et g diffèrent) et de se rendre compte que sur chaque intervalle f et g sont alors égales (ou $f \leq g$ selon le cas) sauf peut être aux extrémités, mais alors les valeurs prises par les fonctions en escalier correspondantes en ces extrémités n'ont pas d'importance quant aux valeurs des intégrales.

Un résultat un peu plus technique est donné par le théorème suivant:

Théorème: Si f est une fonction continue positive vérifiant $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est la fonction identiquement nulle.

Démonstration: Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. f étant continue en x_0, il existe alors un intervalle centré en x_0 de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset [a, b]$ tel que $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ et par suite

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \delta f(x_0).$$

Ce qui est absurde.

Remarque: On pourra plus tard établir ce résultat de façon plus simple en utilisant une primitive de f.

En considérant les valeurs absolues, on a le résultat suivant:

Proposition: Si f est intégrable sur $I = [a, b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration: Notons $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à f, il est alors aisé de vérifier qu'on a

$$||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n| \leq \theta_n.$$

$|\varphi_n|$ étant aussi une fonction en escalier, ceci prouve que $|f|$ est intégrable. D'autre part, puisque

$$|\int_a^b \varphi_n(x)dx| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|dx$$

alors par passage à la limite, on obtient

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Corollaire: Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ alors les deux fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont également intégrables sur $[a, b]$.

Pour cela il suffit de se rappeler les formules

$$\sup(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|(g-f)(x)|) \text{ et } \inf(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|(g-f)(x)|).$$

Autre conséquence: S'il existe un réel k positif vérifiant $|f(x)| \leq k \ \forall x \in [a,b]$ alors

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq k(b-a).$$

$$\text{En particulier, on a } |\int_a^b f(x)dx| \leq [\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|](b-a).$$

III. Inégalité de Schwarz, inégalité de Minkowski.

Proposition: Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ alors leur produit fg est aussi intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration: A partir de deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ associées à f et de deux autres suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n)_n$ et $(\theta'_n)_n$ associées à g et si on note $\alpha = \sup_{x\in I}|g(x)|$ et $\beta = \sup_{x\in I}|\varphi_n(x)|$, on a

$$|(fg-\varphi_n\varphi'_n)(x)| = |(f-\varphi_n)(x)g(x) + \varphi_n(x)(g-\varphi'_n)(x)| \leq \alpha\theta_n(x) + \beta\theta'_n(x).$$

$\alpha\theta_n + \beta\theta'_n$ étant une fonction en escalier qui vérifie les bonnes propriétés. Il est alors aisé de déduire deux suites de fonctions en escalier qui correspondent à la fonction fg. On a donc le résultat.

Inégalité de Schwarz: Si f et g sont deux fonctions intégrables réelles ou complexes on a

$$|\int_a^b (fg)(x)dx|^2 \leq (\int_a^b |f(x)|^2dx)(\int_a^b |g(x)|^2dx).$$

Inégalité de Minkowski: Sous les mêmes hypothèses, on a

$$(\int_a^b |(f+g)(x)|^2dx)^{1/2} \leq (\int_a^b |f(x)|^2dx)^{1/2} + (\int_a^b |g(x)|^2dx)^{1/2}.$$

Démonstration: Remarquons qu'il suffit de le démontrer pour les fonctions positives. Pour tout réel λ, on peut écrire:

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2dx = \lambda^2\int_a^b (g(x))^2dx + 2\lambda\int_a^b (fg)(x)dx + \int_a^b (f(x))^2dx \geq 0.$$

On reconnait une expression du second degré qui garde un signe constant. Par conséquent, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui conduit à l'inégalité de Schwarz.

La seconde inégalité se déduit de la première:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx &= \int_a^b (f(x))^2 dx + \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\int_a^b (fg)(x)dx \\ &\leq \int_a^b (f(x))^2 dx + \int_a^b (g(x))^2 dx + 2(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{1/2}(\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{1/2} \\ &\leq [(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{1/2} + (\int_a^b |g(x)|^2 dx)^{1/2}]^2.\end{aligned}$$

Remarque: Ces inégalités deviennent des égalités lorsque f (ou g) est nulle ou bien lorsque f et g sont proportionnelles. C'est à dire qu'il existe un réel k pour lequel $g(x) = kf(x)\ \forall x \in I$.

Avant de passer aux primitives et au calcul de certaines d'entre elles, nous allons faire des remarques finales quant aux fonctions intégrables.

En plus des fonctions en escalier, des fonctions monotones et des fonctions continues, il y a une classe plus large de fonctions intégrables constituée par les fonctions dites réglées. Ce sont les fonctions qui peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier, ou autrement dit, ce sont les fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier. Les fonctions continues ont cette propriété.

Mais on se gardera de croire que les fonctions intégrables sont les fonctions réglées. En effet, il s'avère que les fonctions réglées admettent toutes une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $I = [a, b]$ et le contre exemple suivant donne une fonction intégrable mais non réglée.

$$f(x) = sin\frac{1}{x} \text{ si } x \in]0,1], \text{ et } f(0) = 0.$$

On peut alors montrer que f n'admet pas de limite à droite de 0 mais que f est tout de même intégrable sur $[0, 1]$.

IV. Formules de la moyenne:

Nous allons établir deux formules dites de la moyenne. La seconde formule, qui est plus difficile à démontrer, sera utilisée au chapitre suivant pour établir la règle d'Abel.

Première formule de la moyenne: f et g étant deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a, b]$. Si on note

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \text{ et} M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

alors on a

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration: Pour le premier point, il suffit de partir de la double inégalité

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et de passer aux intégrales.

Le deuxième point est une conséquence du théorème de la valeur intermédiaire. On considère la fonction F définie par

$$F(x = f(x) \int_a^b g(x)dx.$$

D'après le premier point, $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonctin F. On en déduit l'existence d'un élément $c \in [a, b]$ vérifiant les bonnes conclusions.

Deuxième formule de la moyenne:

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, on suppose que f est positive et décroissante sur $[a, b]$ et on note $f(a+)$ la limite à droite de f en a. Alors il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+) \int_a^c g(x)dx.$$

Remarque: Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f(a+) = f(a)$.

Démonstration: On procède en deux étapes. Supposons d'abord la fonction f en escalier, il existe donc une subdivision $x_0 < x_1 < ... < x_n$ de $[a, b]$ et des constantes $c_1, ..., c_n$ telles que

$$f(x) = c_i, \ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Notons

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx,$$

on va montrer que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction $H(t) = f(a+)G(t)$.

On a
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})].$$
L'idée est de factoriser non pas par les c_i mais par les $G(x_i)$. On peut écrire:
$$\sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(c_i - c_{i+1}) + c_n G(x_n) - c_1 G(x_0).$$
Si on note m et M respectivement l'inf et le sup de la fonction G sur $[a,b]$, alors
$$mc_1 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})] \leq Mc_1.$$
c_1 étant bien entendu la limite à droite de f en a. Nous avons donc bien prouvé que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire de la fonction H. La conclusion découle aisément.

Maintenant, si f n'est pas en escalier, on considère la subdivision usuelle de $[a,b]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et les deux fonctions en escalier h_n et f_n définies par
$$h_n(x) = f(x_i),\ f_n(x) = f(x_{i+1}) \text{ si } x \in]x_i, x_{i+1}[.$$
Nous allons établir que $\int_a^b h_n(x)g(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)g(x)dx$, et le fait que $\int_a^b f(x)dx$ soit une valeur intermédiaire résultera de la même propriété pour h_n qui est cette fois-ci en escalier. Plus précisément, on a :
$$f_n \leq f \leq h_n, \text{ et par suite } \int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq \int_a^b (h_n - f_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$$
Si on note k un majorant de $|g|$ sur $[a,b]$, alors
$$|\int_a^b [f(x)g(x) - f_n(x)g(x)]dx| \leq k\int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq k\frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$
La limite à droite de a pour la fonction f_n étant égale à la limite à droite de a pour la fonction f, par passage à la limite, on aura bien
$$mf(a+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a+).$$

V. Primitive de fonctions intégrables.

Convention: On pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ si $b < a$.

Pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$, on considère l'application F définie par

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Clairement, on a $F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)dx$ et F vérifie les propriétés suivantes:

Propriétés: 1. Si f est intégrable alors F est continue car lipschitzienne de rapport

$$k = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

De plus, F admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point où f admet une limite.

Démonstration: La première partie ne pose pas de problème. Pour le deuxième volet, on note l la limite à droite (par exemple) en u de f, on a alors:

$$|\frac{F(u+h) - F(u)}{h} - l| = |\frac{\int_u^{u+h}(f(x) - l)dx}{h}| \leq \varepsilon,$$

si h est suffisamment petit. Ce qui montre que F est dérivable à droite de u et de nombre dérivé à droite l. Le cas à gauche se traite de la même manière.

Corollaire: Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est dérivable en tout point de $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$F'(x) = f(x).$$

Définition: On appelle primitive de f sur $[a, b]$ toute fonction F définie sur $[a, b]$ et vérifiant $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant:

Théorème: Si f est continue alors F définie par $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de f sur $[a, b]$ et si G est une autre primitive de f on a

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Démonstration: Si G est une autre primitive de f, on a $F'(x) = G'(x)$ et donc $F(x) - G(x) = c$ constante. Par suite, $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$.

Remarque: Si f admet une dérivée f' continue on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

et s'il existe une constante $k \geq 0$ vérifiant $|f'(x)| \leq k \; \forall x \in [a,b]$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|.$$

Notations: Toute primitive G de f est notée

$$G(x) = \int f(x)dx, \text{ et on écrit aussi } [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Exemples:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \; \int \frac{dx}{x-a} = ln|x-a| + c.$$

$$\text{Pour } n \neq -1, \; \int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + c.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m} arctan \frac{x}{m} + c.$$

VI. Changement de variable et intégration par parties.

1. Changement de variable dans l'intégrale.

Proposition: Soit φ une application définie sur un intervalle $I = [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\varphi(I)$ est un intervalle fermé borné et pour toute fonction f définie et continue sur $\varphi(I)$ on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx.$$

Démonstration: Soit F la fonction définie par

$$t \longmapsto \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx$$

et G celle définie par

$$G(t) = \int_a^t f \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx,$$

on a $F'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ et $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, par suite F et G ont même dérivée. De plus, on a $F(a) = G(a)$ et donc $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, en particulier pour $x = b$.

Applications:

$$\int \frac{dt}{tln(t)} = ln(|lnt|) + c$$

peut s'obtenir en considérant la fonction φ définie par $\varphi(t) = ln(t)$.

$$\int \frac{dt}{ch(t)} = \int \frac{2dt}{e^t + e^{-t}}$$

peut s'obtenir en posant $\varphi(t) = e^t$.

On peut montrer grâce au changement de variable $\varphi(t) = 1/t$ que

$$\forall a > 0, \int_a^{1/a} \frac{ln\ t}{1+t^2} dt = 0.$$

$$\int \frac{f'(t)}{1+f^2(t)} dt = Arc\ tan(f(t)) + c$$

s'obtient en posant $\varphi(t) = f(t)$.

Grâce à la formule de changement de variable, on peut établir que si f est une fonction paire, respectivement impaire, définie sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \text{ respectivement } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

2. Formule d'intégration par parties.

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$ il est facile d'établir la formule

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemples: Pour avoir

$$\int lnx\ dx,$$

on pose $f(x) = x$ et $g(x) = lnx$; on a donc $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$
ainsi

$$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c.$$

$$\int (sinx)e^x\ dx$$

s'obtient en effectuant deux intégrations par parties successives.

VII. Quelques méthodes de recherche de primitives.

1. Intégration des fractions rationnelles:

Nous allons donner à présent une méthode générale pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle donnée.

Soit donc R une fraction rationnelle, on note

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

P et Q étant deux polynômes de degrés respectifs n et m. On sait que $Q(x)$ peut être factorisé de la manière suivante (selon le nombre de racines réelles et de racines complexes)

$$Q(x) = \pi_{i=1}^{p}(x - a_i)^{k_i}\pi_{j=1}^{q}(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}.$$

Le théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples permet d'écrire R sous la forme

$$R(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{k_i} \frac{\alpha_k}{(x - a_i)^k}) + \sum_{j=1}^{q}(\sum_{l=1}^{l_j} \frac{\beta_l x_l + \gamma_l}{(x^2 + b_j x + c_j)^l}).$$

où E est un polynôme de degré $n - m$ (avec la convention que le polynôme est nul si son degré est négatif.)

Nous voyons donc qu'il suffit d'être capable de déterminer des primitives pour les fractions rationnelles de la forme

$$\int \frac{dx}{(x - a)^r}, \text{ et } \int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^s} dx,$$

où r et s sont des entiers naturels.

Le premier type d'intégrale ne pose aucun problème. Pour le second, nous allons d'abord détailler la méthode dans le cas $s = 1$ puis nous le ferons dans le cas général. On écrit $x^2 + bx + c$ sous sa forme canonique $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}$ puis on fait le changement de variable $X = x + \frac{b}{2}$. Selon les hypothèses, $c - b^2 4$ est strictement positif, on peut en introduisant une nouvelle variable Y ramener la fraction initiale à la forme

$$\frac{AY + B}{Y^2 + 1}.$$

Pour cette dernière, on la sépare en deux expressions

$$\frac{AY}{Y^2 + 1}, \frac{B}{Y^2 + 1}.$$

La première admet une primitive de la forme $(A/2)ln(Y^2 + 1)$. Quant à la seconde, on a besoin de la fonction arctangente.

Lorsque $s > 1$, on fait le même travail qui nous conduit ici aussi aux deux formes suivantes

$$\frac{AY}{(Y^2+1)^s}, \ \frac{B}{(Y^2+1)^s}.$$

La première ne pose pas de problème particulier alors que pour la seconde, nous avons besoin d'établir grâce à la formule d'intégration par partie une relation de récurrence entre

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \text{ et } I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Il est facile d'obtenir la relation suivante pour $n \geq 1$

$$I_{n+1} = \frac{1+2n}{2n} I_n - \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n}, \text{ avec } I_1 = arctan\ x.$$

Nous allons étudier quelques exemples d'application.

Exemple 1. Pour déterminer

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)},$$

on décompose d'abord en éléments simples. Pour cela, on écrit

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Il y a plusieurs façons de déterminer, dans chaque cas, les constantes. Bien évidemment la méthode de l'identification convient mais il est utile de chercher directement les constantes soit en remplaçant x par une valeur bien choisie soit en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par une certaine expression (souvent le dénominateur correspondant) avant de donner à une x une valeur adéquate. Par exemple, dans ce cas, pour trouver a, on multiplie les deux membres par $x+1$ puis on donne à x la valeur 1. Ensuite, pour trouver b, on peut multiplier les deux membres par x et on fait tendre x vers $+\infty$ et enfin pour c, on peut donner à x la valeur 0. On trouve alors

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+x+1}.$$

On déduit

$$\int \frac{1}{x+1} dx = ln|x+1| + K$$

$$\text{et } \int \frac{-x}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2} dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)} = ln|x+1| - \frac{1}{2} ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + K.$$

Pour trouver b et c, on peut aussi donner à x une valeur complexe solution de $x^2+x+1=0$ après avoir multiplié les deux membres par x^2+x+1. Ceci est légitime car la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est valable sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2}.$$

Pour obtenir b, on multiplie les deux memnbres par $(x+1)^2$ puis on donne à x la valeur 1. Ceci conduit à $b = 1/4$. Ensuite, pour avoir e et f et compte tenu du fait que la décomposition dans $\mathbb{R}$ résulte de la décomposition dans $\mathbb{C}$, on multiplie par $(x^2+1)^2$ et on remplace x par i. L'identification des parties réelle et imaginaire conduit à $e = -1/2$ et $f = 0$. On obtient la relation $a + c = 0$ en multipliant par x et enfaisant tendre x vers $+\infty$. Enfin en donnant à x les valeurs 0 puis 1, on a deux égalités additionnelles $a + b + d + f = 1$ et $8a + 4b + 8c + 8d + 4e + 4f = 1$. On déduit de tout ce qui précède

$$a = 1/2,\ b = 1/4,\ c = -1/2,\ d = 1/4,\ e = -1/2 \text{ et } f = 0.$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/4}{(x+1)^2} + \frac{(-1/2)x + 1/4}{x^2+1} + \frac{-(1/2)x}{(x^2+1)^2}.$$

D'où enfin,

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}ln|x+1| - \frac{1}{4}(x+1)^{-1} - \frac{1}{4}ln(x^2+1) + \frac{1}{4}arctan\ x + \frac{1}{4}(x^2+1)^{-1} + K.$$

2. Fractions rationnelles trigonométriques:

Il s'agit des primitives de la forme

$$\int R(sin\ \theta,\ co\ \theta)d\theta,$$

où R est une fraction rationnelle à deux variables. Dans ce cas, le changement de variable $t = tan(\theta/2)$ permet de ramener la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle trigonométrique à une primitive d'une fraction rationnelle à laquelle s'appliquera la méthode ci-dessus. Notons que si $t = tan(\theta/2)$, alors on a les relations suivantes

$$cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2},\ \text{et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemple: Pour calculer
$$\int \frac{d\theta}{1+3cos(\theta)},$$
on pose donc $t = tan(\theta/2)$, et on obtient
$$\int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\int \frac{dt}{\sqrt{2}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{2}+t}].$$
Après intégration , on a
$$\int \frac{d\theta}{1+3cos(\theta)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}| + K.$$

Il y a certains cas particuliers de fractions rationnellles trigonométriques pour lesquelles des changements de variable adaptés permettent l'obtention de primitives plus rapidement. Par exemple, lorsque R est une fonction impaire, le changement de variables $t = cos(\theta)$ est bien adapté.

3. Autres types de primitive.

Pour la forme
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$
on transforme l'expression ax^2+bx+c sous la forme $\alpha(X^2+A^2)$, $\alpha(X^2-A^2)$ ou $\alpha(A^2-X^2)$ (avec $\alpha > 0$) selon le signe de b^2-4ac. On utilise alors pour changement de variable la fonction sh, ch, sin ou cos selon le cas. Bien évidemment, les relations $sin^2x + cos^2x = 1$, $ch^2x - sh^2x = 1$ permettront de se débarasser de la racine carrée et de ramener la question à la recherche de primitive d'une fraction rationnelle.

Exemples: Pour calculer
$$\int \sqrt{1-x^2}dx,$$
on pose $x = cos(t)$ qui conduit à (en supposant $sin(t)$ positif)
$$-\int [sin(t)]^2 dt = \frac{sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} + K = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}Arc\ cos(x) + K.$$
Pour calculer
$$\int \sqrt{1+x^2}dx,$$
on pose $x = sh(t)$ qui conduit à
$$\int [ch(t)]^2 dt = \int \frac{ch(2t)+1}{2} dt = \frac{sh(2t)}{4} + \frac{t}{2} + K = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}Arg\ sh(x) + K.$$