

Université Mohammed V-Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014, Rabat, Maroc

Filière DEUG :
Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques II
Cours d'Algèbre II

Par
BENLARBI-DELAÏ M'HAMMED
JABBOURI ELMOSTAFA
LBEKOURRI ABOUBAKR

Année 2006-2007

Table des matières

Chapitre 1 : Structures algébriques

1. Groupes
 - (a) Généralités
 - (b) Sous-groupes
 - (c) Homomorphisme de groupes
 - (d) Groupes symétriques
2. Anneaux
 - (a) Généralités
 - (b) Sous-anneaux
 - (c) Homomorphisme d'anneaux
3. Corps
 - (a) Généralités
 - (b) Sous-corps

Chapitre 2 : Espaces vectoriels

1. Généralités
 - (a) Structures d'espaces vectoriels
 - (b) Sous-espaces vectoriels
 - (c) Sous-espace vectoriel engendré par une partie
 - (d) Partie libre et partie liée
2. Espace vectoriel de dimension finie
 - (a) Lemme fondamental
 - (b) Existence d'une base-dimension d'un espace vectoriel
 - (c) Théorème de la base incomplète
 - (d) Dimension d'un sous-espace vectoriel
 - (e) Rang d'un système de vecteurs

3. Somme de sous-espaces vectoriels
 - (a) Somme de deux sous-espaces vectoriels
 - (b) Somme directe de deux sous-espaces
 - (c) Sous-espaces supplémentaires
 - (d) Somme de plusieurs sous-espaces

Chapitre 3 : Applications linéaires

1. Généralités
2. Applications linéaires
3. Image et noyau d'une application linéaire
4. Théorème de la dimension
5. Algèbre $\mathcal{L}(E)$ et projecteurs

Chapitre 4 : Applications linéaires et Matrices

1. Matrices associées aux applications linéaires
2. Matrice colonne associé à un vecteur
3. Matrice de l'inverse d'une application linéaire
4. Changement de bases
5. Rang d'une matrice
6. Matrices remarquables

Chapitre 5 : Valeurs propres et vecteurs propres

1. Définitions
2. Propriétés des valeurs propres et vecteurs propres
3. Polynôme caractéristique

Chapitre 1

Structures algébriques

1.1 Groupes

Définition 1.1.1 .

1. Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E . Si f est une telle application, on appelle $f(x, y)$ le composé de x et y et on convient de noter $f(x, y) = x * y, xTy \dots$. Un ensemble E muni d'une loi interne $*$ est noté $(E, *)$.
2. On appelle loi de composition externe sur E , de domaine de scalaires l'ensemble A , une application de $A \times E$ dans E .

Exemples 1.1.2 .

1. L'addition et la multiplication sont des lois internes dans $\mathbb{N}^*, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
2. Si E est un ensemble, les opérations \cap et \cup sont des lois internes dans $\mathcal{P}(E)$.
3. Soient E un ensemble et $\mathcal{A}(E, E)$ l'ensemble des applications de E dans E . La composition des applications est une loi interne dans $\mathcal{A}(E, E)$.
4. La multiplication par un réel est une loi de composition externe dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

Définition 1.1.3 . On dit qu'un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un groupe si :

1. $*$ est associative : $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c$.
2. $*$ possède un élément neutre (G est donc non vide) : $\exists e \in G, \quad \forall a \in G, \quad a * e = e * a = a$.
3. Tout élément possède un symétrique pour $*$: $\forall a \in G, \quad \exists a' \in G, \quad a * a' = a' * a = e$.

Si, de plus, la loi $*$ est commutative, càd pour tout $a, b \in G \quad a * b = b * a$; on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif, ou plus souvent, un groupe abélien.

Notations 1.1.4 On emploie en général la notation $a.b$, ou plus simplement ab au lieu de $a * b$. On dit alors que le groupe est noté multiplicativement . e est alors noté 1_G ou simplement 1 , le symétrique a' de a est noté a^{-1} et appelé inverse de a . Les relations de définition d'un groupe s'écrivent alors :

$$a(bc) = (ab)c, \quad a1 = 1a = a, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

On emploie aussi, la notation $a + b$ au lieu de $a * b$, dans le cas où la loi est commutative et on dit que le groupe est noté additivement. e est alors noté 0 , le symétrique de a est noté $-a$ et est appelé l'opposé de a . Les relations ci-dessus s'écrivent alors :

$$a + (b + c), \quad a + 0 = 0 + a = a, \quad a - a = a + (-a) = -a + a = 0.$$

Pour $a \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$, on écrit :

Si le groupe est noté multiplicativement :

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \dots a}_n & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} \dots a^{-1}}_n & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

On peut alors vérifier qu'on a :

$$\forall a \in G, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad \text{et} \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Si le groupe est noté additivement :

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_n & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{-n} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On peut alors vérifier qu'on a :

$$\forall a \in G, \forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad ma + na = (m + n)a, \quad m(na) = (mn)a.$$

Exemples 1.1.5 .

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}_+, \cdot) , (\mathbb{Q}_+, \cdot) , $(\{-1, 1\}, \cdot)$ sont des groupes abéliens.
2. Soit E un ensemble et Δ la différence symétrique définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ et où $A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$. Alors $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.
3. $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrices carrées d'ordre } n \text{ à coefficients dans } \mathbb{R}\}$ muni de l'addition des matrices est un groupe abélien.
4. $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ muni de la multiplication des matrices est un groupe abélien.
5. Soit $E \neq \emptyset$ et \mathcal{S}_E l'ensemble des bijections de E dans E . Alors \mathcal{S}_E muni de la composition \circ des applications est un groupe. C'est le groupe symétrique de E . Si $E = \{1, 2, \dots, n\}$, on le note \mathcal{S}_n .

Sous-groupes :

Définition 1.1.6 . Soit G un groupe noté multiplicativement, et H une partie non vide de G . On dit que H est un sous-groupe de G si :

1. H est stable (i.e $\forall x, y \in H, xy \in H$).
2. H muni de la loi induite a une structure de groupe.

Proposition 1.1.7 . Soit G un groupe noté multiplicativement et H une partie de G , les trois propositions sont équivalentes :

1. H est un sous-groupe de G .
2. $H \neq \emptyset$, $\forall x, y \in H$, $xy \in H$; $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.
3. $H \neq \emptyset$, $\forall x, y \in H$, $xy^{-1} \in H$.

Démonstration. On a évidemment $(1) \implies (2) \implies (3)$. Démontrons donc $(3) \implies (1)$, ce qui démontrera l'équivalence des trois propriétés.

Comme $H \neq \emptyset$, soit $x \in H$ et prenons $x = y$ dans (3); alors $xx^{-1} = 1 \in H$. De même en prenant $x = 1$, $y = x$ dans (3) on a $1x^{-1} = x^{-1} \in H$. Aussi $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. Ainsi H est stable. Les axiomes de groupes se vérifient alors immédiatement.

Exemples 1.1.8 .

1. $(\mathbb{Q}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Soit G un groupe, G et $\{1\}$ sont des sous-groupes de G . Un sous-groupe distinct des deux précédents, s'il existe, est appelé sous-groupe propre de G .
3. Soit G un groupe et notons $Z(G) = \{a \in G : \forall b \in G, ab = ba\}$. $Z(G)$ est un sous-groupe de G appelé centre de G . $Z(G)$ est nécessairement abélien en tant que groupe.
4. Une partie H de Z est un sous-groupe si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = nZ = \{na : a \in Z\}$.

En effet, si $H = \{0\}$, alors $n = 0$; supposons que $H \neq \{0\}$. Il existe un plus petit élément $n > 0$ appartenant à H ($H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$ car si $x \in H$, $-x \in H$). Puisque $n \in H$ et H est un sous-groupe on a bien $nZ \subset H$. D'autre part, si $m \in H$, on peut écrire :

$$m = nq + r, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r < n$$

mais $m - nq \in H$, donc $r \in H$, ce qui entraîne $r = 0$ puisque n est le plus petit entier strictement positif et appartenant à H , donc $H = nZ$.

5. L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans \mathbb{R} de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Propriétés 1.1.9 .

1. Si G est un groupe, $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G , alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G . En particulier si $G = Z$, $H_1 = n_1Z, \dots, H_k = n_kZ$; alors $\bigcap_{i=1}^k n_iZ$ est un sous-groupe de Z , il est donc de la forme mZ avec $m \in \mathbb{N}$. On peut vérifier facilement que m est le ppcm de n_1, \dots, n_k .
2. Il est à noter que la réunion de deux sous-groupes n'est un sous-groupe que si l'un d'entre eux est inclus dans l'autre.
3. L'ensemble des puissances a^n de a , $n \in \mathbb{Z}$, est un sous-groupe de G . C'est le plus petit sous-groupe de Z qui contient a et est appelé sous-groupe engendré par a .

Homomorphismes de groupes :

Définition 1.1.10 . Soient G, G' deux groupes, f une application de G dans G' . On dit que f est un homomorphisme de G dans G' si :

$$\forall x, y \in G, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Si de plus f est bijectif, on dit que f est un isomorphisme de groupes, si $G = G'$ on dit que f est un endomorphisme de G ; un endomorphisme bijectif s'appelle un automorphisme. On appelle noyau de f , et on note $\text{Ker } f$, l'ensemble :

$$\text{Ker } f = \{x \in G : f(x) = 1_{G'}\}.$$

On note aussi $\text{Im } f$ l'ensemble $f(G)$, on a :

$$\text{Im } f = \{y \in G' / \exists x \in G, y = f(x)\}.$$

Exemples 1.1.11 .

1. a étant un élément du groupe G , l'application $x \rightarrow a^{-1}xa$ de G dans G est un homomorphisme.
2. Soit G un groupe noté multiplicativement et $x \in G$. L'application $n \rightarrow x^n$ est un homomorphisme de \mathbb{Z} dans G .

Proposition 1.1.12 . Soient G et G' deux groupes et f un homomorphisme de G dans G' . On a les propositions suivantes :

1. $f(1)=1$.
2. $\forall x \in G, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
3. L'image de tout sous-groupe de G est un sous-groupe de G' . En particulier $\text{Im} f$ est un sous-groupe de G' .
4. L'image réciproque d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G . En particulier $\text{Ker} f$ est un sous-groupe de G .
5. f est injective si et seulement si $\text{Ker} f = \{1\}$.

Démonstration. 1) découle immédiatement de l'égalité $f(1)f(1) = f(1.1) = f(1) = f(1).1$. 2) Pour tout $x \in G$ on a $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x) = f(1) = 1$. 3) Si H est un sous-groupe de G , alors $f(H) \neq \emptyset$ car $1 = f(1 \in f(H))$; de plus pour tout $f(h)$ et $f(h') \in f(H)$ on a $f(h)(f(h'))^{-1} = f(h)f(h'^{-1}) = f(hh'^{-1}) \in f(H)$. 4) idem que dans 3). 5) Supposons que $\text{Ker} f = \{1\}$ et soient $x, y \in G$ tels que $f(x) = f(y)$. Il en résulte que $f(x)(f(y))^{-1} = 1$ c.à.d. $f(xy^{-1}) = 1$ et $xy^{-1} \in \text{Ker} f$, d'où $x = y$ et f est injective. Inversement, si f est injective et $x \in \text{Ker} f$; on a $f(x) = 1 = f(1)$ et par suite $x = 1$.

Groupes symétriques :

On a déjà vu que l'ensemble des applications bijectives $\mathcal{S}(E)$ d'un ensemble dans lui-même constitue un groupe pour la composition des applications (notée \circ). On désigne par \mathcal{S}_n cet ensemble si $E = \{1, \dots, n\}$, et on appelle ses éléments des permutations. On convient d'écrire si $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite on emploie plutôt la notation multiplicative : $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est notée $\sigma_1\sigma_2$.

On appelle transposition toute permutation σ de \mathcal{S}_n pour laquelle il existe deux éléments distincts i, j de $\{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour tout $k \neq i, j$. Si

l'on note $\tau_{i,j}$ cette transposition, on a :

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & \dots & j & \dots n \\ 1 & 2 & j & \dots & i & \dots n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\tau_{i,j}\tau_{i,j} = id_E$, c'ad que $\tau_{i,j}^{-1} = \tau_{i,j}$.

Propriétés 1.1.13 .

1. Toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme produit fini de transpositions. A titre d'exemple, dans \mathcal{S}_5 , la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ peut s'écrire $\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,5}\tau_{5,4}$. La précédente écriture n'est pas unique. Mais la parité du nombre de transpositions figurant dans toute décomposition d'un élément $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est la même.
2. La signature d'une permutation σ , notée $\varepsilon(\sigma)$, est l'application $\varepsilon : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\}$ définie par $\varepsilon(\sigma) = 1$ si la permutation σ est produit paire de transpositions et $\varepsilon(\sigma) = -1$ sinon. La signature ε est un homomorphisme de groupes c'ad $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ pour toutes permutations σ, τ .
3. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de A est donné par la formule :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

en tenant compte du fait que $\mathcal{S}_3 = \{Id, \tau_{1,3}\tau_{3,2}, \tau_{1,2}\tau_{2,3}, \tau_{1,2}, \tau_{1,3}, \tau_{2,3}\}$.

1.2 Anneaux

Définition 1.2.1 . On dit qu'un ensemble A muni de deux lois de composition internes $+$ et \cdot est un anneau si :

1. $(A, +)$ est un groupe abélien.

2. La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition $+$:

$$x(yz) = (xy)z, \quad x(y+z) = xy + xz \quad \text{et} \quad (y+z)x = yx + zx.$$

Si de plus la multiplication est commutative on dit que A est un anneau commutatif. S'il existe un élément neutre, noté 1_A , pour la multiplication, A est dit unitaire.

Remarques 1.2.2 .

1. Sauf mention explicite du contraire, tous les anneaux considérés par la suite sont supposés être unitaires.
2. Si A est un anneau, alors $1_A \neq 0$, sauf si $A = \{0\}$.

Exemples 1.2.3 .

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, l'élément unité étant 1. De même $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif fini à n éléments, l'élément unité est $\bar{1}$.
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs.
3. $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) = \{\text{matrices carrées d'ordre } n \text{ à coefficients dans } \mathbb{R}\}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.
4. Si A, B sont deux anneaux, $A \times B$ est un anneau pour les lois produits, l'élément unité est $(1_A, 1_B)$.
5. $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. L'élément unité est E .

Règles de calcul dans un anneau. :

Si A est un anneau, alors :

1. $x(y-z) = xy - xz, \quad (y-z)x = yx - zx.$
2. $0x = x0 = 0, \quad x(-z) = -xz = (-xz).$
3. Formule du binôme.

On remarque que $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \neq x^2 + 2xy + y^2$ en général. Mais si x et y commutent ($xy = yx$), alors on a :

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + \dots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^{n-k}y^k.$$

Sous-anneaux

Définition 1.2.4 . Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B une partie de A . On dit que B est un sous-anneau de A si :

1. B est stable pour les deux lois $+$ et \cdot .
2. $1_A \in B$.
3. B muni des deux lois induites $+$ et \cdot a une structure d'anneau.

Proposition 1.2.5 . Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B une partie de A . B est un sous-anneau de A si et seulement si

1. $\forall a, b \in B \quad a - b \in B$.
2. $1_A \in B$.
3. $\forall a, b \in B \quad ab \in B$.

Homomorphismes d'anneaux :

Définition 1.2.6 . Soient A et B deux anneaux et $h : A \rightarrow B$ une application. On dit que h est un homomorphisme d'anneaux si :

1. $\forall x, y \in A \quad h(x + y) = h(x) + h(y)$.
2. $\forall x, y \in A \quad h(xy) = h(x)h(y)$.
3. $h(1) = 1$.

Si de plus, h est bijective, on dit que h est un isomorphisme d'anneaux.

Remarques 1.2.7 .

1. Un homomorphisme h d'anneaux est en particulier un homomorphisme de groupes. C'est ainsi que l'image $h(A')$ d'un sous-anneau A' de A est un sous-groupe qui contient 1 en vertu de (3). De plus $h(A')$ est stable pour la multiplication d'après (2), ce qui fait de $h(A')$ un sous-anneau de B .

2. L'ensemble $\mathcal{J} = \{x \in A \mid h(x) = 0\}$, qui n'est autre que le noyau de h , est un sous-groupe de A qui possède la propriété particulière : $\forall x \in \mathcal{J}, \forall a \in A, xa \in \mathcal{J}$ et $ax \in \mathcal{J}$, puisque $f(xa) = f(x)f(a) = 0$ et $f(ax) = f(a)f(x) = 0$. Un sous-groupe \mathcal{J} d'un anneau A qui vérifie une telle propriété s'appelle un idéal bilatère de A .

Exemples 1.2.8 .

1. Soit P une matrice carrée inversible et $h : (M_n(\mathbf{R}), +, \cdot) \rightarrow (M_n(\mathbf{R}), +, \cdot)$, l'application qui fait correspondre à A , la matrice PAP^{-1} . h est un automorphisme de $M_n(\mathbf{R})$, appelé l'automorphisme de changement de bases.
2. Soit A un anneau et h l'application

$$h : Z \rightarrow A$$

$$n \rightarrow n \cdot 1_A$$

est un homomorphisme d'anneaux. h est injectif si et seulement si $\text{Ker} h = \{0\}$ et dans ce cas $h(Z) = \{m \cdot 1_A, m \in Z\}$ est isomorphe à Z . Si h n'est pas injectif, alors il existe $n > 0$ tel que $\text{Ker} h = nZ$. L'entier n s'appelle la caractéristique de A .

1.3 Corps

Définition 1.3.1 . On dit qu'un ensemble \mathbb{K} muni de deux lois de composition internes $+$ et \cdot est un corps si :

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un anneau, $1_{\mathbb{K}} \neq 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{K}^*, \exists x' \in \mathbb{K}, xx' = x'x = 1_{\mathbb{K}}$.

Si de plus, la multiplication est commutative, on dit que \mathbb{K} est un corps commutatif.

Remarques 1.3.2 .

1. Si \mathbb{K} est un corps, \mathbb{K}^* muni de la multiplication est un groupe. Et ainsi, \mathbb{K} est commutatif si et seulement si \mathbb{K}^* est abélien.

2. Dans un corps \mathbb{K} , si $xy = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ (un anneau vérifiant cette propriété est dit intègre). En effet, supposons que $xy = 0$ et $x \neq 0$. De $\frac{1}{x}(xy) = (\frac{1}{x}x)y = 0$ on tire $y = 0$.

Exemples 1.3.3 .

1. \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} sont des corps commutatifs pour les lois usuelles.
2. $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps commutatif.
3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
4. tout corps fini est commutatif.

Définition 1.3.4 . Soit \mathbb{K} un corps et F une partie de \mathbb{K} . On dit que F est un sous-corps de \mathbb{K} si :

1. F est un sous-anneau de \mathbb{K} .
2. $\forall a \in F^*, a^{-1} \in F^*$.

Exemples 1.3.5 .

1. \mathbb{Q} est un sous-corps de $\mathbb{Q}[i]$ qui est lui même un sous-corps de \mathbb{R} .
2. \mathbb{Q} et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'ont pas de sous-corps propres.

Proposition 1.3.6 . Soient \mathbb{K} et \mathbb{K}' deux corps commutatifs et f un homomorphisme de \mathbb{K} vers \mathbb{K}' . Alors f est injectif.

Démonstration. Soit $x \in \text{Ker } f$ tel que $x \neq 0$. x étant inversible, on a $1 = f(1) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = 0$, ce qui est impossible ; donc $\text{Ker } f = \{0\}$ et f est injectif.

Remarques 1.3.7 .

1. Soit \mathbb{K} un corps commutatif. Alors comme pour \mathbb{R} et \mathbb{C} , on peut définir d'une manière identique : L'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$ à coefficients dans \mathbb{K} . L'élément neutre est $0 = (0, \dots, 0, \dots)$ et l'élément unité est $(1, 0, \dots, 0, \dots)$.
2. L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ à coefficients dans \mathbb{K} muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau non commutatif dès que $n \geq 2$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Dans ce chapitre et dans les suivants, \mathbb{K} désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

2.1 Généralités

Structure d'espace vectoriel

Définition 2.1.1 . On appelle *espace vectoriel sur \mathbb{K}* ou encore *\mathbb{K} -espace vectoriel*, tout ensemble E muni de deux lois :

1. Une loi interne appelée *addition*, notée $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe abélien.
2. Une loi externe qui à tout couple $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ fait correspondre un élément de E noté $\lambda.x$, cette loi vérifiant les quatre propriétés suivantes :

$$(a) \quad \forall x \in E \quad 1.x = x$$

$$(b) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in E \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$

$$(c) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$

$$(d) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$$

Les éléments de E s'appellent *vecteurs*, ceux de \mathbb{K} *scalaires*.

Exemples 2.1.2 .

1. Les ensembles E_1, E_2, E_3 , respectivement des vecteurs de la droite, du plan et de l'espace de la géométrie élémentaire munis des opérations classiques : $(x, y) \rightarrow x+y$ et $(\lambda, x) \rightarrow \lambda.x$ sont des espaces vectoriels réels.
2. Soit \mathbb{K}^n l'ensemble des n -uplets $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de \mathbb{K} . Munissons \mathbb{K}^n des lois suivantes :
 - Une addition définie par $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$
 - Une loi externe définie par : $\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$
 Il est facile de vérifier que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
3. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Les lois sont définies par :

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \text{ et } \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

4. Si E et F sont des espaces vectoriels sur \mathbb{K} , on peut munir $E \times F$ d'une structure naturelle de \mathbb{K} -espace vectoriel, en définissant ainsi les opérations :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$$

L'ensemble $E \times F$ muni de ces deux lois s'appelle l'espace vectoriel produit de E par F .

5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} muni des lois classiques : $(P, Q) \rightarrow P + Q$ et $(\lambda, P) \rightarrow \lambda.P$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
6. Soit D un ensemble quelconque, et $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de D dans \mathbb{K} . Munissons $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ des lois suivantes : Pour tout $f, g \in \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + g : x \rightarrow f(x) + g(x), \quad \lambda.f : x \rightarrow \lambda.f(x)$$
 Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ muni de ces deux lois $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (appelé espace des applications de D dans \mathbb{K}).

On peut noter les cas particuliers suivants :

- (a) $D = \mathbb{N}, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel réel des suites réelles.

(b) $D = \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel complexe des suites complexes.

(c) $D \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel réel des fonctions numériques, de variable réelle, définies sur le domaine \mathbb{D} .

Calcul dans un espace vectoriel :

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

Proposition 2.1.3 .

1. $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda 0 = 0$.
3. $\forall y \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(-y) = -\lambda y$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.
5. $\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (-\mu)x = -\mu x$.
6. $\forall x \in E, 0.x = 0$.
7. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$.

Preuve. 1). On a $\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y) = \lambda x$. 2) On fait $x = y$ dans (1). 3) On fait $x = 0$ dans dans 1). 4) On a $(\lambda - \mu)x + \mu x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = \lambda x$. 5) On fait $\lambda = 0$ dans 4). 6) On fait $\lambda = \mu$ dans 4). 7) En effet, supposons que $\lambda x = 0$. Si $\lambda = 0$, on a gagné. Sinon λ est inversible dans le corps \mathbb{K} et on a par multiplication par λ^{-1} : $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$, d'où $1.x = 0$, i.e $x = 0$.

Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1.4 . Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F une partie non vide de E . On dira que F est un sous-espace vectoriel de E (en abrégé s.e.v) si :

1. F est stable pour les deux lois $+$ et \cdot .
2. F muni des deux lois induites $+$ et \cdot est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 2.1.5 . Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F une partie non vide de E . F non vide d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est dite sous-espace de E si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \lambda x \in F$.

Théorème 2.1.6 . Soit F une partie non vide d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. F est un sous-espace vectoriel de E .
2. $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + \mu y \in F$.

Preuve. Il est clair que 1) \implies 2). Inversement, supposons qu'on ait 2). Prenons $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. alors $x \in F$ et $y \in F$ entraînent que $x - y \in F$. Donc F est un sous-groupe additif de E . Prenons ensuite $\mu = 0$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F$ entraînent $\lambda x \in F$.

Exemples 2.1.7 .

1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Les parties $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E appelés sous-espaces triviaux.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à n est un s.e.v de v de $\mathbb{K}[X]$.
3. L'intersection quelconque d'une famille de s.e.v d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un s.e.v de E .
4. L'analyse fournit de nombreux exemples de s.e.v de $\mathcal{A}(I, \mathbf{R})$, où I est un intervalle de \mathbf{R} . Entre autres :
 - (a) L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ des applications continues sur I .
 - (b) L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbf{R})$ des applications dérivables sur I .
 - (c) Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{D}_n(I, \mathbf{R})$ des applications n fois dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(I, \mathbf{R})$. L'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel noté $\mathcal{D}^\infty(I, \mathbf{R})$, espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur I .

- (d) Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{C}_n(I, \mathbf{R})$ des applications \mathcal{C}_n sur I .
5. Il y a évidemment des parties de \mathbb{K} -espaces vectoriels qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels. Notons en particulier :
- (a) L'ensemble des polynômes de degré exactement n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- (b) L'ensemble des fonctions positives ou nulles (resp. négatives ou nulles) définies sur une partie D de \mathbf{R} , n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(D, \mathbf{R})$.

Sous-espace engendré par une partie

Définition 2.1.8 . Soit (x_1, \dots, x_n) un système fini de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Un vecteur $x \in E$ est dit combinaison linéaire des vecteurs x_1, \dots, x_n si l'on peut trouver un système $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires, tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Les scalaires λ_i sont nommés coefficients de la combinaison linéaire x .

Exemples 2.1.9

1. Le vecteur 0 est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant nuls.
2. Tout vecteur x est combinaison linéaire de tout système de vecteurs contenant x , le coefficient de x étant 1 , tous les autres égaux à 0 .
3. Dans l'espace vectoriel \mathbb{K}^3 sur le corps \mathbb{K} , soit le triplet (e_1, e_2, e_3) où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Tout vecteur (a, b, c) de \mathbb{K}^3 est combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, e_3 car : $(a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3$

Théorème 2.1.10 . Soit (x_1, \dots, x_n) un système fini de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs x_1, \dots, x_n est un s.e.v de E ; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de E contenant les vecteurs x_1, \dots, x_n . F est dit sous-espace engendré par les vecteurs x_1, \dots, x_n et il est noté :

$$F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \{x \in E \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}$$

Preuve. Partons de deux éléments de F :

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \quad , \quad y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n y_n$$

Quels que soient les scalaires α et β , on a :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)x_n$$

On obtient une combinaison linéaire du système proposé, donc un élément de F qui est, par conséquent, sous-espace vectoriel de E .

F contient évidemment chacun des x_i du système (x_1, \dots, x_n) . D'autre part, tout sous-espace, contenant les vecteurs x_1, \dots, x_n , doit contenir aussi la somme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ pour tout scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Un tel sous-espace contient donc F qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant les vecteurs x_1, \dots, x_n .

Définition 2.1.11 . *un système fini (x_1, \dots, x_n) de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est dit générateur de E (ou aussi engendre E) si $E = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. En d'autres termes :*

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, / x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Exemples 2.1.12 .

1. \mathbb{K}^n est engendré par les n -uplets $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$.
2. Soit n un entier. Dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions $1, x, x^2, \dots, x^n$ engendrent le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n .

Théorème 2.1.13 . *Soit A une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . L'ensemble H des combinaisons linéaires finies d'éléments de A est un s.e.v de E ; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de E contenant A . H est dit sous-espace engendré par la partie A , il est noté :*

$$\langle A \rangle = \{x \in E / \exists n \geq 1, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, x_1, \dots, x_n \in A \quad x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}$$

Exemples 2.1.14 .

1. $\mathbb{K}[X]$ est engendré par la partie $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$.

2. Soient (E_n) une suite croissante de s.e.v d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Si G_n est un système générateur de E_n , alors $E = \cup_n E_n$ est un s.e.v de E admettant $\cup_n G_n$ comme partie génératrice.

Partie libre - Partie liée

Définition 2.1.15 .

1. On dit qu'un système fini (x_1, \dots, x_n) de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est libre si toute combinaison linéaire de x_1, \dots, x_n est triviale c-à-d :

$$\text{Si } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0, \text{ alors } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

2. On dit qu'un système fini (x_1, \dots, x_n) de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est lié s'il n'est pas libre. Ce qui revient à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Propriétés 2.1.16 .

1. Tout vecteur non nul est libre.
2. Tout système contenu dans un système fini libre est libre.
3. Tout système contenant le vecteur nul est lié.
4. Tout système fini contenant un système lié est lié.

Proposition 2.1.17 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Le système (x_1, \dots, x_n) est lié, si et seulement si, l'un au moins des vecteurs x_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Preuve. Supposons que le système (x_1, \dots, x_n) est lié, il existe donc un système $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires non tous nuls tel que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. Soit alors $\lambda_i \neq 0$, il est inversible dans \mathbb{K} et on peut écrire :

$$x_i = \lambda_i^{-1} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i^{-1} \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i^{-1} \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_i^{-1} \lambda_n x_n.$$

Inversement l'autre implication est évidente.

Définition 2.1.18 .

1. On dit qu'une partie A d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est libre si tout système fini d'éléments distincts de A est libre, càd :

$\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in A, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, on a :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

2. On dit qu'une partie A de E est liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe un système fini de vecteurs de A qui soit lié.

Exemples 2.1.19 .

1. La partie $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$

2. La partie formée des applications f_n définies par $f_n(x) = e^{nx}$ est libre dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 2.2.1 .

1. On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par un système fini de vecteurs. Dans le cas contraire on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.

2. Un système (x_1, \dots, x_n) de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est dit base de E si (x_1, \dots, x_n) est libre et générateur E .

Exemples 2.2.2 .

1. Une base de \mathbb{K}^n est $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$; elle est dite base canonique de \mathbb{K}^n .

2. Les polynômes $1, X, X^2, \dots, X^n$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
3. Si E et F sont deux espaces vectoriels de bases respectives (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_m) , alors $E \times F$ admet pour base $(e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_m)$.

,

Remarques 2.2.3 . Il ne faudrait pas croire que tous les espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K} soient de dimension finie. L'exemple le plus simple est $\mathbb{K}[X]$, en effet supposons que $\mathbb{K}[X]$ est engendré par P_1, \dots, P_r . Si n est le plus haut degré des polynômes P_1, \dots, P_r , le polynôme X^{n+1} ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs P_1, \dots, P_r . Il s'en suit que $\mathbb{K}[X]$ ne peut pas être engendré par un nombre fini de polynômes.

Le lemme suivant est fondamental. Il nous permettra de montrer que toutes les bases d'un \mathbb{K} -espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

Lemme 2.2.4 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par le système (e_1, \dots, e_n) et soit (f_1, \dots, f_m) un système de vecteurs de E . Si $m > n$, alors (f_1, \dots, f_m) est lié.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur n . Soit $m > n$. Cette propriété est vraie pour $n = 1$, car si (f_1, f_2) sont deux vecteurs d'un espace vectoriel engendré par e_1 , il existe λ_1 et λ_2 tels que :

$$f_1 = \lambda_1 e_1 \text{ et } f_2 = \lambda_2 e_1.$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$ et le système est lié.

On suppose la propriété vraie pour $n - 1$ et on la montre pour n . Soit (f_1, \dots, f_m) un système de vecteurs d'un espace vectoriel engendré par (e_1, \dots, e_n) , avec $m > n$. On peut écrire

$$\forall i = 1, \dots, m \quad f_i = a_i e_1 + g_i, \text{ avec } a_i \in \mathbb{K} \text{ et } g_i \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle .$$

Si tous les a_i sont nuls, alors les vecteurs $f_i \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, m$. D'après l'hypothèse de récurrence, le système (f_1, \dots, f_m) est lié.

Sinon, l'un des a_i est non nul, par exemple a_1 . Dans ce cas on a :

$$a_1 f_2 - a_2 f_1 \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle, \dots, a_1 f_m - a_m f_1 \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle .$$

Or $m - 1 > n - 1$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Par suite il existe des coefficients λ_i non tous nuls tels que :

$$\lambda_2(a_1 f_2 - a_2 f_1) + \dots + \lambda_m(a_1 f_m - a_m f_1) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$-(\lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m) f_1 + \lambda_2 a_1 f_2 + \dots + \lambda_m a_1 f_m = 0.$$

Comme l'un des coefficients $\lambda_i a_i \neq 0$, le système (f_1, \dots, f_m) est lié, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2.2.5 .

1. *Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base. Plus précisément, tout système générateur fini contient au moins une base.*
2. *Toutes les bases d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de E et se note $\dim E$.*

Preuve. 1) Existence d'une base. Si (e_1, \dots, e_n) engendre E et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple e_n est combinaison linéaire des autres vecteurs. Il n'est pas difficile de voir que, dans ce cas, le système (e_1, \dots, e_{n-1}) engendre E . On itère le procédé jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.

2) Soient (e_1, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_m) deux bases de E . Alors on a d'après le lemme 1.5.4 : (e_1, \dots, e_n) est générateur de E et (f_1, \dots, f_m) est libre dans E , donc $m \leq n$, (e_1, \dots, e_n) est libre et (f_1, \dots, f_m) est générateur, donc $n \leq m$.

Théorème 2.2.6 . *Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .*

1. Tout système libre de E ayant n vecteurs est une base.
2. Tout système générateur de E ayant n vecteurs est une base de E .
3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie, $\dim F \leq \dim E$ et il y a égalité si et seulement si $F = E$

Preuve. 1) Soit (e_1, \dots, e_n) un système libre de E , montrons qu'il est générateur de E . Soit $x \in E$, le système (x, e_1, \dots, e_n) est lié d'après le lemme 1.5.4. Il existe donc un système de scalaires non tous nuls $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que :

$$\lambda x + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Le scalaire λ est forcément non nul, car sinon $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ compte tenu de la liberté du système (e_1, \dots, e_n) . Par suite on peut écrire :

$$x = -(\lambda^{-1} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda^{-1} \lambda_n e_n).$$

Donc (e_1, \dots, e_n) engendre E .

2) Soit (e_1, \dots, e_n) un système générateur de E , montrons qu'il est libre dans E . Si le système (e_1, \dots, e_n) est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs ; soit par exemple e_1 . Dans ce cas le système (e_2, \dots, e_n) est générateur de E , ce qui est contradictoire en tenant compte du lemme 1.5.4, car une base de E qui contient forcément n éléments serait liée.

3) Parmi tous les systèmes libres de F , on en choisit un maximal et on le note (f_1, \dots, f_m) . Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur à $\dim E$, d'après le lemme 1.5.4. Ce système est forcément générateur, car si $x \in F$, le système (x, f_1, \dots, f_m) est lié puisque (f_1, \dots, f_m) est libre maximal, et donc x peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs du système (f_1, \dots, f_m) comme dans 1).

Si F est un sous-espace vérifiant $\dim E = \dim F$, alors $F = E$, puisqu'une base de F étant un système libre de E , possédant n vecteurs est aussi une base de E en vertu de 1).

Un autre moyen de former une base dans un \mathbb{K} -espace vectoriel est le suivant ; c'est le théorème de la base incomplète.

Théorème 2.2.7 . Soit E un espace vectoriel de base (e_1, \dots, e_n) et soit (f_1, \dots, f_m) un système libre. Alors il existe $n - m$ vecteurs parmi les vecteurs e_1, \dots, e_n tels que le système constitué de ces $n - m$ vecteurs et des vecteurs f_1, \dots, f_m forme une base de E .

Preuve. On voit que si $m < n$, alors il existe un des vecteurs e_i tel que (f_1, \dots, f_m, e_i) soit libre. Sinon, pour tout $i = 1, \dots, n$, tous les systèmes (f_1, \dots, f_m, e_i) seront liés et les vecteurs e_1, \dots, e_n seront combinaisons linéaires des vecteurs f_1, \dots, f_m et donc le système (f_1, \dots, f_m) sera générateur de E , ce qui est impossible. En posant $f_{m+1} = e_i$, on itère le procédé jusqu'à obtenir n vecteurs libres f_j . Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

Exemples 2.2.8 . Dans \mathbb{R}^4 , on prend la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et le système libre suivant : $f_1 = e_1 + 2e_2$ et $f_2 = -e_1 + e_2$. Le compléter en une base de \mathbb{R}^4 . On a :

(f_1, f_2, e_1) est lié

(f_1, f_2, e_2) est lié

(f_1, f_2, e_3) est libre

(f_1, f_2, e_3, e_4) est libre. Ces quatre vecteurs forment une base de \mathbb{R}^4 .

Rang d'un système fini de vecteurs

Définition 2.2.9 . On appelle rang du système de vecteurs (x_1, \dots, x_n) la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système.

Exemples 2.2.10 . Dans \mathbb{K}^4 , considérons le système des trois vecteurs :

$$x_1 = (1, 0, 0, 0), \quad x_2 = (0, 1, 0, 0), \quad x_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Il est clair que le système (x_1, x_2) est libre dans \mathbb{K}^4 et que $x_3 = x_1 + x_2$. Par conséquent, le sous-espace F engendré par (x_1, x_2, x_3) est aussi engendré par le système libre (x_1, x_2) et par suite le rang de F est 2.

Proposition 2.2.11 . Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Somme de deux sous-espaces

Il est à noter que la réunion de deux s.e.v d'un \mathbb{K} -espace vectoriel n'est pas en général un s.e.v. Pour remédier à cet inconvénient nous allons remplacer l'union des s.e.v par une opération plus convenable qui est la somme des s.e.v.

Définition 2.3.1 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, de dimension finie ou non, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme de F et G l'ensemble, noté $F + G$, défini par :

$$F + G = \{z \in E \mid \exists x \in F, y \in G, z = x + y\}.$$

Proposition 2.3.2 . La somme $F + G$ de deux s.e.v d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un s.e.v de E . De plus c'est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$.

Preuve. Soient deux éléments $x + y$ et $x' + y' \in F + G$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$ et soit α et β deux scalaires, on a $\alpha(x + y) + \beta(x' + y') = (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') \in F + G$. Donc $F + G$ est un s.e.v de E . Il est clair que $F + G$ contient F et G , donc $F \cup G$. D'autre part, tout sous-espace, contenant $F \cup G$, doit contenir aussi la somme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. Un tel sous-espace contient donc $F + G$ qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$.

Définition 2.3.3 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E . On dit que la somme $F + G$ est directe et on note $F \oplus G$, si tout élément de $F + G$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

Proposition 2.3.4 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E . Il y a équivalence entre :

1. $F + G$ est directe.
2. $F \cap G = \{0\}$.
3. $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G \implies x = y = 0$.

Preuve. 1) \implies 2) Si $z \in F \cap G$, z peut s'écrire $z = z + 0 = 0 + z$. La décomposition étant unique, $z = 0$. 2) \implies 3) Si $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$, alors $x = -y \in F \cap G = \{0\}$. 3) \implies 1) Si $x + y = x' + y'$ avec $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$, alors on a $(x - x') + (y - y') = 0$ avec $x - x' \in F$ et $y - y' \in G$; donc $x = x'$ et $y = y'$.

Définition 2.3.5 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G deux s.e.v de E . On dit F et G sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, si tout élément de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$.

En d'autres termes, $E = F \oplus G$ si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $E = F + G$.
2. La somme $F + G$ est directe (i.e $F \cap G = \{0\}$).

Définition 2.3.6 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit F un s.e.v de E . On appelle supplémentaire de F (sous-entendu dans E) tout s.e.v G de E vérifiant $E = F \oplus G$.

Proposition 2.3.7 . Soit E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire G ; de plus tous les supplémentaires ont pour dimension $\dim E - \dim F$.

Preuve. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E et (f_1, \dots, f_m) une base de F , le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de F par $n - m$ vecteurs pour former une base de E . Ces $n - m$ vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel G qui sera supplémentaire de F .

Proposition 2.3.8 . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . Alors $F + G$ est de dimension finie et on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Preuve. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $F \cap G$, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ de F et $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$ de G . On vérifiera alors que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$ est une base de $F + G$.

Somme de plusieurs sous-espaces

Définition 2.3.9 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, de dimension finie ou non, E_1, \dots, E_n n s.e.v de E . On appelle somme des s.e.v E_1, E_2, \dots, E_n l'ensemble, noté $E_1 + \dots + E_n$, défini par :

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \{z \in E \mid \exists x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n, z = x_1 + \dots + x_n\}.$$

Théorème 2.3.10 . La somme $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ de n s.e.v d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est un s.e.v de E . De plus c'est le plus petit s.e.v de E (au sens de l'inclusion) contenant les s.e.v E_1, E_2, \dots, E_n .

Définition 2.3.11 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et E_1, E_2, \dots, E_n , n s.e.v de E . On dit que la somme $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ est directe et on note $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$, si tout $x \in E_1 + \dots + E_n$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

Proposition 2.3.12 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et E_1, E_2, \dots, E_n , n s.e.v de E . Il y a équivalence entre :

1. $E_1 + \dots + E_n$ est directe.
2. $\forall i \in [1, n], E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$.
3. $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0$.

Définition 2.3.13 . Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et E_1, \dots, E_n n s.e.v de E . On dit que E est somme directe des s.e.v E_1, \dots, E_n et on note $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, si tout élément de E s'écrit d'une manière unique sous la forme $x_1 + \dots + x_n$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

En d'autres termes, $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. $E = E_1 + \dots + E_n$.
2. $\forall i \in [1, n], E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$.

Remarques 2.3.14 .

1. Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de base (e_1, \dots, e_n) , alors on a :

$$E = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle .$$

2. Si F et G sont deux s.e.v en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

3. Si F et G sont deux s.e.v en somme directe, alors une base de $F \oplus G$ s'obtient en réunissant une base de F et une base de G .

4. Inversement, si on scinde une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E en deux systèmes dis-joints, ces deux systèmes engendrent deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Chapitre 3

Les applications linéaires

Dans ce chapitre et dans les suivants, \mathbb{K} désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

3.1 Généralités

Applications linéaires

Définition 3.1.1 . Soient E et E' deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et f une application de E dans E' . On dit que f est linéaire, si :

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$, $\forall v, w \in E$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $\mathcal{L}(E, E')$. Une application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme de E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$

Remarques 3.1.2 . Pour toute application linéaire f , on a $f(0) = 0$ puisque f est un homomorphisme de groupes.

Exemples 3.1.3 .

1. L'application $f : E \rightarrow E'$ qui associe à un élément $v \in E$, le vecteur nul est linéaire ; elle est dite application nulle.
2. L'application $f : E \rightarrow E$ qui associe à un élément $v \in E$, le vecteur v est linéaire ; elle est dite application identique de E .
3. L'application $f : E \rightarrow E$ qui associe à un élément $v \in E$, le vecteur αv ($\alpha \in \mathbb{K}$) est linéaire ; elle est appelé homothétie de rapport α .
4. L'application $f : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ qui associe à un polynôme P , sa dérivée P' est linéaire ; elle est dite dérivation.
5. Soit $E = E_1 \oplus E_2$. L'application $P_{r_1} : E \rightarrow E_1$ qui associe à vecteur $x = x_1 + x_2$, le vecteur x_1 ($x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$), est linéaire ; elle est appelé projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
6. Soit $v_0 \neq 0$ un vecteur de E . L'application $\tau : E \rightarrow E$ qui associe à u vecteur v , le vecteur $v + v_0$ est non linéaire ; car $\tau(0) = v_0 \neq 0$; elle appelée translation.

Images et noyau

Proposition 3.1.4 . Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et F un sous-espace vectoriel de E . Alors $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de E' . En particulier $f(E)$ est un sous espace vectoriel de E' appelé image de f et noté $\text{Im}f$. Sa dimension est appelé rang de f .

Preuve. On sait que $f(F)$ est un sous groupe de E' , il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f(v) \in f(F)$, on a $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(F)$.

Proposition 3.1.5 . Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$, $\text{Ker}f = \{x \in E : f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé noyau de f .

Preuve. Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$ et par suite $\lambda x \in \text{ker}f$.

Proposition 3.1.6 . f est injective si et seulement si $\text{Ker}f = \{0\}$

Exemples 3.1.7 .

1. Soit $E = E_1 \oplus E_2$. On a $\text{Im}P_{r_1} = E_1$ et $\text{Ker}P_{r_1} = E_2$.
2. Soit $D : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ l'application dérivation. On a $\text{Ker}D = \mathbf{R}$ et $\text{Im}D = \mathbf{R}[X]$
3. Soit $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application définie par $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$. On a :
 $\text{Ker}f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = -2x \text{ et } z = y\} = \{(x, -2x, -2x) : x \in \mathbf{R}\}$. $\text{Ker}f$ est la droite vectorielle engendré par $(1, -2, -2)$.
 $\text{Im}f = \{(x', y') \in \mathbf{R}^2 : \exists(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x' = 2x + y, \text{ et } y' = y - z\}$. Soit $(x', y') \in \mathbf{R}^2$. En posant $x = \frac{x' - y'}{2}, y = y', z = 0$, on vérifie que $f(x, y, z) = (x', y')$, donc f est surjective, d'où $\text{Im}f = \mathbf{R}^2$.

Proposition 3.1.8 . Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et (v_1, \dots, v_n) un système de vecteurs de E .

1. Si f est injective et le système (v_1, \dots, v_n) est libre dans E , alors le système $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est libre dans E' .
2. Si f est surjective et le système (v_1, \dots, v_n) est générateur de E , alors le système $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ est générateur de E' .

En particulier si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de E' .

Preuve. 1) Supposons que $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i) = 0$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Comme f est linéaire, $f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = 0$; et donc $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0$ compte tenu de l'injection de f . L'indépendance du système (v_1, \dots, v_n) entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. 2) Soit $y \in E'$, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Il s'en suit que $y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i)$.

Théorème 3.1.9 . Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si, ils ont la même dimension.

Preuve. \implies Si $f : E \rightarrow E'$ est un isomorphisme, alors d'après la proposition précédente l'image d'une base de E est une base de E' , donc E et E' ont la même

dimension.

\Leftarrow Supposons que $\dim E = \dim E'$ et soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e'_1, \dots, e'_n) une base de E' . Soit $f : E \rightarrow E'$ définie par $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i$. Il est facile de voir que f est linéaire bijective.

Corollaire 3.1.10 . Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} , alors E est isomorphe à \mathbb{K}^n si et seulement si $\dim E = n$.

Théorème de la dimension

Théorème 3.1.11 . Théorème de la dimension. Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, E')$, alors $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$.

Preuve. Supposons que $\dim E = n$, $\dim(\text{Ker } f) = r$ et montrons que $\dim(\text{Im } f) = n - r$. Soit (w_1, \dots, w_r) une base de $\text{Ker } f$ et complétons la pour obtenir une base de E , en l'occurrence $(w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r})$. montrons que $\mathcal{B} = (f(v_1), \dots, f(v_{n-r}))$ est une base de $\text{Im } f$. \mathcal{B} engendre $\text{Im } f$ en effet $f(x) = f(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = \sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i f(v_i)$. \mathcal{B} est libre puisque si $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i f(v_i) = 0$, alors $f(\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i) = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i \in \text{Ker } f$. Il s'en suit que $\sum_{i=1}^{i=n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i f(v_i)$

Corollaire 3.1.12 . $f \in \mathcal{L}(E, E')$, E et E' étant de même dimension, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Preuve. Il suffit de montrer que 1) \iff 2). De l'égalité $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$, résulte f injective $\iff \text{Ker } f = \{0\} \iff \dim E = \dim(\text{Im } f) \iff \dim E' = \dim(\text{Im } f) \iff E' = \text{Im } f \iff f$ surjective

Remarques 3.1.13 .

1. Ce résultat est faux en dimension infinie. L'application dérivation $D : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ qui à un polynôme P fait correspondre P' est surjective mais non injective.
2. Une application linéaire f est parfaitement définie si on connaît l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de f on a :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i f(e_i),$$
donc si on connaît $f(e_1), \dots, f(e_n)$ f est connue en tout x .

Algèbre $\mathcal{L}(E)$ et projecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E . On munit $\mathcal{L}(E)$ des lois suivantes :

- $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), (f, g) \rightarrow f + g$
- $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), (\lambda, f) \rightarrow \lambda.f$
- $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), (f, g) \rightarrow f \circ g$.

La proposition suivante est facile à établir :

Proposition 3.1.14 1. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau. De plus $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$.

Les propriétés 1 et 2 expriment que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre sur \mathbb{K} .

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$. On définit $Pr_1 : E \rightarrow E$ avec $Pr_1(x_1 + x_2) = x_1, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$. Pr_1 est appelée projection sur E_1 parallèlement à E_2 . On définit aussi $Pr_2 : E \rightarrow E$ avec $Pr_2(x_1 + x_2) = x_2$.

Proposition 3.1.15 1. Pr_1 est application linéaire, $Ker Pr_1 = E_2$ et $Im Pr_1 = E_1$

2. $Pr_1 \circ Pr_1 = Pr_1, Pr_1 + Pr_2 = id_E$ et $Pr_1 \circ Pr_2 = Pr_2 \circ Pr_1 = 0$

3. $E = Ker Pr_1 \oplus Im Pr_1 = Ker Pr_2 \oplus Im Pr_2$.

Preuve. 1) Si $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, alors on $Pr_1(x + y) = Pr_1((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) = x_1 + y_1 = Pr_1(x) + Pr_1(y)$ et $Pr_1 \lambda(x) = Pr_1(\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda Pr_1(x)$. Il est

facile de voir que $\text{Ker}Pr_1 = \{x = x_1 + x_2 / Pr_1(x) = 0\} = \{x = x_1 + x_2 / x_1 = 0\} = E_2$ et $\text{Im}Pr_1 = \{Pr(x) / x = x_1 + x_2 \in E\} = \{x_1 / x_1 \in E_1\} = E_1$. 2) Si $x = x_1 + x_2$, on a $Pr_1 \circ Pr_1(x) = Pr_1(x_1) = x_1 = Pr_1(x)$ et $(Pr_1 + Pr_2)(x) = Pr_1(x) + Pr_2(x) = x_1 + x_2 = x$. Il est clair que $Pr_1 \circ Pr_2(x) = Pr_1(x_2) = 0$ et de même on a $Pr_2 \circ Pr_1 = 0$. 3) Finalement on a $E = E_1 \oplus E_2 = \text{Ker}Pr_2 \oplus \text{Im}Pr_2 = \text{Ker}Pr_1 \oplus \text{Im}Pr_1$.

Définition 3.1.16 . *Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est dit projecteur si $p \circ p = p$.*

Chapitre 4

Applications linéaires et Matrices

Matrices Associées aux Applications linéaires

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} , de dimension n et p respectivement, et $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Choisissons (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e'_1, \dots, e'_p) une base de E' , les images par f des vecteurs e_1, \dots, e_n se décomposent sur la base (e'_1, \dots, e'_p) :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{p1}e'_p$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{p2}e'_p$$

.

.

.

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{pn}e'_p$$

Définition 4.0.17 . On appelle matrice de f dans les bases (e_1, \dots, e_n) , (e'_1, \dots, e'_p) la matrice notée $M(f)_{e_i, e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes

des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ dans la base (e'_1, \dots, e'_p) :

$$M(f)_{e_i, e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de E et E' .

Exemples 4.0.18 .

1. Soit E de dimension n finie et $id_E : E \rightarrow E$ l'application qui à x associe x . On considère une base $(e_i, i = 1, \dots, n)$ de E . On a

$$M(id_E)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $E = \mathbf{R}^2$ et $P_1 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application linéaire qui à (x, y) associe $(x, 0)$. Considérons la base canonique (e_1, e_2) de \mathbf{R}^2 . On a $P_1(e_1) = e_1$, $P_1(e_2) = 0$ et $M(P_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 et (e'_1, e'_2) la base canonique de \mathbf{R}^2 . Considérons l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x - y, z - y)$. On a $M(f)_{e_i, e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Soit $D : \mathbf{R}_4[t] \rightarrow \mathbf{R}_3[t]$ l'application linéaire qui à $p(t)$ associe $p'(t)$. On a $M(D)_{e_i, e'_j} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot (e_1, \dots, e_5) \text{ et } (e'_1, \dots, e'_4) \text{ étant les bases canoniques respectivement de } \mathbf{R}_4[t] \text{ et } \mathbf{R}_3[t].$$

Proposition 4.0.19 . Soient E et E' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension n et p respectivement, $(e_i, i = 1, \dots, n)$ et $(e'_j, j = 1, \dots, p)$ des bases de E et E' . Alors l'application $M : \mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui à f associe $M(f)_{e_i, e'_j}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier $\dim \mathcal{L}(E, E') = np$

Preuve. IL est facile de vérifier la linéarité de M . Soit $f \in \text{Ker } M$, donc $M(f)_{e_i, e'_j} = 0$ et par suite $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = 0$ d'où $f = 0$ et M est injective. Elle est aussi

surjective, car si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$, on construit f en posant :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{p1}e'_p$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{p2}e'_p$$

.

.

.

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{pn}e'_p.$$

Pour $x \in E$, $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ avec $x_i \in \mathbb{K}$. On pose $f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$.

On vérifie que f est linéaire et $M(f)_{e_i, e'_j} = A$.

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $\mathcal{D} = (e''_1, \dots, e''_n)$ des bases respectives de E, F, G . Posons :

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) = (a_{kj}) \text{ matrice de type } (p, n)$$

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(g) = (b_{ik}) \text{ matrice de type } (m, p)$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(g \circ f) = (c_{ij}) \text{ matrice de type } (m, n)$$

On a alors $\forall j = 1, \dots, n$:

$$g \circ f(e_j) = g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{kj} e'_k\right) = \sum_{k=1}^{k=p} a_{kj} g(e'_k) = \sum_{k=1}^{k=p} a_{kj} \left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ik} e''_i\right) = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=m} a_{kj} b_{ik} e''_i = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\sum_{k=1}^{k=p} b_{ik} a_{kj}\right) e''_i$$

Proposition 4.0.20 . Avec les notations précédentes on a : $M_{\mathcal{B}\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}(g) M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$.

Matrice de l'inverse d'une application linéaire

Proposition 4.0.21 . Soient E et E' deux espaces vectoriels de même dimension et de bases respectives \mathcal{B} et \mathcal{B}' . $f \in \mathcal{L}(E, E')$ est bijective si et seulement si $M(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible. De plus $M(f^{-1})_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}$.

Preuve. Comme $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_E$, $M(f^{-1} \circ f)_{\mathcal{B}} = M(f \circ f_{\mathcal{B}'})^{-1} = M(id_E) = M(id_{E'})$ et par suite $M(f^{-1})M(f) = M(f)M(f^{-1}) = I$, càd $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$.

Matrice colonne

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Chaque vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. On peut ainsi associer à chaque vecteur $x \in E$ une matrice

$$\text{du type } (n, 1) \text{ suivante } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Une matrice de ce type s'appelle une matrice colonne. Une matrice colonne peut être interprétée comme matrice de l'application linéaire $\bar{X} : \mathbb{K} \rightarrow E$ qui à chaque $\lambda \in \mathbb{K}$ associe λx . On a $X = M_{1, \mathcal{B}}(\bar{X})$ où (1) est la base canonique \mathbb{K} .

Proposition 4.0.22 . Soient E, F deux espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_p)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient Y la matrice colonne associée à $f(x)$ dans la base \mathcal{C} et X la matrice colonne de x dans la base \mathcal{B} . On a $Y = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \cdot X$

Preuve. Nous pouvons utiliser la proposition précédente. On a :
 $\forall \lambda \in \mathbb{K} . f \circ \bar{x}(\lambda) = f(\overline{X}(\lambda)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \overline{f(x)}(\lambda)$ càd $f \circ \overline{X} = \overline{f(X)}$ et par passage aux matrices on a $Y = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.X$

Changement de bases. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E .

Définition 4.0.23 . On appelle matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' , la matrice P , carée d'ordre n , dont la j ème colonne est formée des coordonnées du vecteur e'_j dans la base \mathcal{B} . Autrement dit si $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}e_i$ ($j = 1, \dots, n$), alors $P = (p_{ij}) =$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples 4.0.24 . Si E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2) et (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = 3e_1 + e_2$ et $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$, alors la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (e'_1, e'_2) est $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Interprétation. Pour tout indice j , la j ème colonne de P est l'expression du vecteur e'_j dans la base \mathcal{B} . P est donc la matrice de l'application identité de E dans E quand on munit au départ E de la base \mathcal{B}' et à l'arrivée de la base \mathcal{B} . Autrement dit $P = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)$.

Théorème 4.0.25 . Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E , P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' et P' la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} . Alors $PP' = P'P = I$ et ainsi $P' = P^{-1}$.

Preuve. Considérons le diagramme : $(E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{B}')$. Comme $id \circ id = id$, en passant aux matrices on obtient $M_{\mathcal{B}'}(id) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ càd $I = PP' = P'P$.

Action sur les coordonnées.

Proposition 4.0.26 . Soient $x \in E$, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Soient X la matrice colonne de x dans \mathcal{B} et X' la matrice colonne de x dans la base \mathcal{B}' . On a $X = PX'$ et ainsi $X' = P^{-1}X$.

Preuve. Découle immédiatement de l'égalité $id(x) = x$ où $id : (E, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{B}')$ et de la proposition.

Exemples 4.0.27 . Soit \mathbf{R}^2 muni de deux bases, la base canonique (e_1, e_2) et la base (e'_1, e'_2) définie par $e'_1 = 2e_1 + e_2$ et $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$. Soit $x = 2e_1 + 3e_2$, calculons les composantes de x dans la base (e'_1, e'_2) . On a $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} v$ et ainsi $x' = -5e'_1 + 4e'_2$

Proposition 4.0.28 . Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ deux bases de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$, $\mathcal{C}' = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_p)$ deux bases de E' . Notons $A = M(f)_{e_i, e'_j}$, $A' = M(f)_{\epsilon_i, \epsilon'_j}$, P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} et Q la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{C}' . On a alors $A' = Q^{-1}AP$.

Preuve. Considérons le diagramme :

$$(E, \mathcal{B}) \rightarrow (E', \mathcal{B}')$$

$$(E, \mathcal{C}) \rightarrow (E', \mathcal{C}')$$

On a $f \circ id_E = id_{E'} \circ f$, et donc $M(f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} M(id_E)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M(id_{E'})_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'} M(f)_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ c'est-à-dire $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ ou encore $A' = Q^{-1}AP$.

Corollaire 4.0.29 . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . Notons $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . On a alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition 4.0.30 . Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP = A'$.

Exemples 4.0.31 . Soit f l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 qui dans la base canonique (e_1, e_2) est représenté par la matrice $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice A' qui représente f dans la base (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = (0, -1)$ et $e'_2 = (1, 1)$. On a

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang d'une Matrice.

Définition 4.0.32 . Soit (v_1, \dots, v_n) un système de vecteurs de \mathbb{K}^p , on appelle rang du système la dimension de l'espace engendré par les vecteurs v_i . Soit $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$, $A = (c_1, \dots, c_n)$ où l'on a noté c_i les vecteurs colonnes de A ($c_i \in \mathbb{K}^p$). On appelle rang de A le rang du système des vecteurs colonnes de A .

Lemme 4.0.33 . Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(G, E)$. On a

1. Si g est surjective, alors $\text{rang}(f) = \text{rang}(f \circ g)$,
2. Si f est injective, alors $\text{rang}(g) = \text{rang}(f \circ g)$.

Preuve.1) $\text{rang}(f) = \dim(f(E)) = \dim(f(g(G))) = \dim(f \circ g)(E) = \text{rang}(f \circ g)$.

2) Soit $\{g(v_1), \dots, g(v_r)\}$ une base de $\text{Im}g$. Le système $\{f(g(v_1)), \dots, f(g(v_r))\}$ est libre puisque f est injective et il est générateur de $\text{Im}(f \circ g)$ car si $y \in \text{Im}(f \circ g)$, on peut écrire $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sum_i \alpha_i g(v_i)) = \sum_i \alpha_i f(g(v_i))$, donc $\{f(g(v_1)), \dots, f(g(v_r))\}$ est une base de $\text{Im}(f \circ g)$, d'où $\text{rang}(g) = \text{rang}(f \circ g)$.

Proposition 4.0.34 . Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. Soient (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) deux bases quelconques de E et E' respectivement et $A = M(f)_{e_i, e'_j}$. On a alors $\text{rang}f = \text{rang}A$. Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang, en particulier deux matrices semblables ont même rang.

Preuve. On considère le diagramme suivant :

$$(\mathbb{K}^n, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{K}^p, \mathcal{B}')$$

$$(E, \mathcal{C} \rightarrow (E', \mathcal{C}'))$$

u et v sont définies de la façon suivante :

$u(f_j) = e_i$, $u(f'_j) = e'_j$ avec $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ la base canonique de \mathbb{K}^n , $\mathcal{B}' = \{f'_1, \dots, f'_p\}$ la base canonique de \mathbb{K}^p . On a $h = v^{-1} \circ f \circ u$ et l'application h a précisément A comme matrice dans les bases canoniques car $h(f_i) = v^{-1} \circ f \circ u(f_i) = v^{-1}(f(e_i)) = v^{-1}(\sum_j a_{ji} e'_j) = \sum_j a_{ji} f'_j$ car $A = (a_{ij}) = M(f)_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$. D'où $A = M(h)_{f_i, f'_j}$ et donc $\text{rang}(A) = \text{rang}(h)$. Mais

d'après le lemme précédent $\text{rang}(h) = \text{rang}(v^{-1} \circ f \circ u) = \text{rang}(f \circ u) = \text{rang}(f)$.

Matrices remarquables

1. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
2. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$.
3. La transposée d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice notée $A^t = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$. De plus on a les propriétés suivantes faciles à établir :
 - (a) $A^{tt} = A$, $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ et $(AB)^t = B^t A^t$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
 - (b) L'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui associe à A sa transposée A^t est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 4.0.35 . Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = Q^{-1}AP$. C'est en fait une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Lemme 4.0.36 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{rang}(A) = r \iff A \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. \Leftarrow *trivial.*

\Rightarrow $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définit une application linéaire $\phi : (\mathbb{K}^p, e_i) \rightarrow (\mathbb{K}^n, e'_j)$. On munit \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n des bases canoniques $\{e_1, \dots, e_p\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ respectivement. Soit r le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi les images des vecteurs de la base $\{e_1, \dots, e_p\}$;

càd Ae_1, \dots, Ae_p , qu'on peut supposer être Ae_1, \dots, Ae_r , les autres Ae_{r+1}, \dots, Ae_p peuvent s'exprimer en fonction de ces derniers :

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{j=r} c_{kj} Ae_j, \text{ pour } k = r+1, \dots, p$$

On définit une nouvelle base f_1, \dots, f_p dans \mathbb{K}^p , comme suit :

$$f_k = e_k, \text{ pour } k = 1, \dots, r \text{ et } f_k = e_k - \sum_{j=1}^{j=r} c_{kj} e_j, \text{ pour } k = r+1, \dots, p$$

On a alors $Af_k = 0$ pour $k = r+1, \dots, p$. Posons alors $Af_j = t_j$ pour $j = 1, 2, \dots, r$.

Les t_j sont par hypothèse linéairement indépendents. Complétons les pour obtenir une base de \mathbb{K}^n , disons t_{r+1}, \dots, t_n . Considérons alors la matrice de l'application linéaire ϕ dans les nouvelles bases $\{f_1, \dots, f_p\}$ et $\{t_1, \dots, t_n\}$, on a alors :

$$M(\phi)_{f_i, t_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_r.$$

A et $M(\phi)_{f_i, t_j}$ représentent la même application linéaire, et sont donc équivalentes.

Théorème 4.0.37 Soient $A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. A et B sont équivalentes si et seulement si $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Preuve. \Rightarrow trivial

\Leftarrow Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$, alors d'après le lemme précédent A est équivalente à J_r et de même B est équivalente à J_r , et par suite A est équivalente à B .

Théorème 4.0.38 . Soit $A \in \mathcal{M}_{np}$, alors $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$. C'est à dire que le rang d'une matrice A est aussi la dimension de l'espace engendré par les vecteurs lignes de la matrice A .

Preuve. Supposons que $\text{rang}(A) = r$, donc A est équivalente à J_r et par suite il existe $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = Q^{-1}J_rP$. Donc $A^t = P^t J_r^t (Q^{-1})^t = (P^{-1t})^{-1} J_r (Q^{-1})^t = (P^{-1t})^{-1} J_r (Q^{-1})^t$ car J_r est symétrique, d'où A^t est équivalente à J_r et donc $\text{rang}(A^t) = r = \text{rang}(A)$.

Exemples 4.0.39 Déterminons le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

On utilise les opérations élémentaires sur les lignes :

On a $\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}\right) = \text{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Les deux vecteurs lignes sont libres, d'où le rang de A est égal à 2.

Chapitre 5

Valeurs propres et vecteurs propres

5.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1.1 . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n \geq 1$. On appelle de vecteur propre de f tout vecteur $x \in E$ tel que $f(x)$ soit colinéaire à x i.e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, tel que $f(x) = \lambda x$.

. Comme $f(0) = 0$, le vecteur nul est toujours un vecteur propre et de plus pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $f(0) = \lambda 0$. Mais si x est un vecteur propre non nul, alors le scalaire λ est unique. En effet si $f(x) = \lambda x = \mu x$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$ et donc $\lambda = \mu$.

Définition 5.1.2 . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur propre $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On dit que x est un vecteur propre de f associé à λ .

Exemples 5.1.3 .

1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $h_\lambda : E \rightarrow E$ l'homothétie de rapport λ i.e $h_\lambda(x) = \lambda x$. Il est clair que tout vecteur de E est un vecteur propre et λ est la seule valeur propre.
2. Supposons $\dim E = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice $M(f)_\mathcal{B}$ soit diagonale i.e $M(f)_\mathcal{B} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors chacun des vecteurs e_i de la base est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i

Notations 5.1.4 . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit l'ensemble

$$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E).$$

On a ainsi $x \in E_\lambda \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$. Ainsi λ est une valeur propre de f si et seulement si $E_\lambda \neq \{0\}$. D'autre part E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 5.1.5 . Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\lambda \text{ valeur propre de } f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0\}.$$

Si λ est une valeur propre, alors $E_\lambda \neq \{0\}$ s'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ .

Définition 5.1.6 . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de f et on note $\text{Spect}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f .

5.2 Propriétés des valeurs propres et vecteurs propres

Proposition 5.2.1 . Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. λ valeur propre de f .
2. $E_\lambda \neq \{0\}$
3. $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injective
4. $f - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijective
5. $\det(f - \lambda \text{id}_E) = 0$ i.e $(\det(M(f - \lambda \text{id}_E)_\mathcal{B}) = 0$ où \mathcal{B} est une base de E)

Proposition 5.2.2 . Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

1. Si λ et μ sont deux valeurs propres de f distinctes, alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$
2. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f distinctes deux à deux, alors la somme $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p}$ est directe

Preuve. 1) Il est clair que si $f(x) = \lambda x = \mu x$, alors $(\lambda - \mu)x = 0$, et ainsi $x = 0$.
Pour 2) elle se fait par récurrence sur l'entier p .

5.3 Polynôme caractéristique

Correspondance

Remarques 5.3.1 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n \geq 1$, \mathcal{B} une base de E . Soient $x \in E$, X le vecteur colonne de x dans la base \mathcal{B} et $A = M(f)_{\mathcal{B}}$. On a

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda X$$

Définition 5.3.2 . Soient $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On appelle vecteur propre de A tout vecteur colonne X (à n lignes) tel qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$AX = \lambda X.$$

2. On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que

$$AX = \lambda X.$$

Proposition 5.3.3 . Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. λ valeur propre de A
2. $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
3. $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Définition 5.3.4 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $P_A(X)$ le polynôme $P_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Remarques 5.3.5 . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(A - XI)$.
2. Si λ est une valeur propre de A , alors $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1} / (A - \lambda I_n)X = 0\}$ est le sous-espace propre associé à λ .

Proposition 5.3.6 . Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le polynôme caractéristique de A est un polynôme de degré n , plus précisément :

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{(n-1)} \text{Tr} A X^{n-1} + \dots \det A.$$

où $\text{Tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$

Exemples 5.3.7 .

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors on a $P_A(X) = \det(A - XI_2) = (a-X)(d-X) - cb = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $P_A(X) = \det(A - XI) = (1 - X)^2$, donc A admet une seule valeur propre $\lambda = 1$. Déterminons les vecteurs propres de A associé à $\lambda = 1$ c'est-à-dire E_1 .
On a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow 2y = 0$, donc $E_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0))$