

Calcul vectoriel- Recueil d'exercices

A. Bourrass et E. Zerouali

SM-SMI

Septembre 2007

Calcul vectoriel

Exercice 1 : Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs libres de représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en un point O de l'espace. Montrer que les représentants de $\vec{U} + \vec{V}$ et de $\vec{U} - \vec{V}$ sont portés par les diagonales du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Rep. Par construction $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{OS}$, où S est l'unique point tel que $OASB$ soit un parallélogramme. Donc $\vec{U} + \vec{V}$ est porté par la première diagonale de ce parallélogramme. D'un autre côté on a

$$\vec{U} - \vec{V} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{BO}$$

est donc c'est la première diagonale du parallélogramme $BSAO$, ce qui correspond à la deuxième diagonale du parallélogramme $OASB$.

Exercice 2 : L'espace intuitif étant assimilé à un ensemble de points et noté $\mathcal{E}$, soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ l'application définie pour tout $M \in \mathcal{E}$ par $f(M) = M'$, avec M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$ avec $\vec{U}$ un vecteur libre donné. L'application f est appelée translation définie par $\vec{U}$.

1) Montrer que si $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$, alors $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont équipollents ainsi que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$.

2) Soit $ABCD$ un parallélogramme, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ et $D' = f(D)$. Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$? Soit I le point d'intersection des diagonales de $ABCD$ et I' celui des diagonales de $A'B'C'D'$. Montrer que $f(I) = I'$.

3) Montrer que les segments de droite CA' , BD' et AC' se rencontrent en un point J qui est le milieu de chacun d'eux. Montrer que J est le milieu de II' .

4) Soit f_i les translations définies par $\vec{U}_i$, $i = 1, 2$. Déterminer le vecteur associé à $f_2 \circ f_1$ et montrer que $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.

Rep. 1) On a $\overrightarrow{MM'} = \vec{U} = \overrightarrow{NN'}$ et par suite ils sont équipollents. On aussi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N} = \overrightarrow{NN'} + \overrightarrow{M'N} = \overrightarrow{M'N'}$, ce qui donne que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont équipollents.

2) Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents et donc $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ le sont aussi. De même pour les vecteurs $\overrightarrow{B'D'}$ et $\overrightarrow{C'A'}$. Ce qui implique que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Si I le point d'intersection des diagonales de $ABCD$, on aura $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont équipollents ainsi que $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IC}$. Il en serait alors de même pour les vecteurs $\overrightarrow{A'I'}$ et $\overrightarrow{I'D'}$ et pour les vecteurs $\overrightarrow{B'I'}$ et $\overrightarrow{I'C'}$. Finalement I' est le point d'intersection des diagonales de $A'B'C'D'$.

Exercice 3 Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $f(M) = M'$ avec M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par $g(M) = M''$ avec M'' tel que $\overrightarrow{MM''} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

i) Calculer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de $\overrightarrow{MG_2}$ où G_1 et G_2 sont les barycentres respectifs des systèmes pondérés $\{(A, 1), (B, -1), (C, 2)\}$ et $\{(A, 3), (B, -1), (C, 1)\}$. Quelle est la nature de f et de g ?

ii) Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$, $I \in \mathcal{E}$ et Δ la droite $D(I, \vec{u})$. Déterminer $f(\Delta)$, $g(\Delta)$ et $f \circ g(\Delta)$.

Rep. On a $\vec{0} = \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{G_1C}$ et $\vec{0} = 3\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_2C}$ et par suite

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{MG_1} - \overrightarrow{G_1B} + 2\overrightarrow{MG_1} + 2\overrightarrow{G_1C} = 2\overrightarrow{MG_1}$$

$$\overrightarrow{MM''} = 3\overrightarrow{MG_2} + 3\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{MG_2} - \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2C} = 3\overrightarrow{MG_2}$$

Les points (M, G_1, M') sont alignés (ainsi que (M, G_2, M'')). Il en découle que f est une homothétie de centre G_1 et de rapport 2. (g est une homothétie de centre G_2 et de rapport 3).

ii) On a $M \in D(I, \vec{u})$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \alpha \vec{u}$. Soit I' l'image de I par f . On aura : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}$. On a donc

$$\overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{I'I} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{II'} = 3\alpha \vec{u}.$$

Finalement $f(\Delta)$ est la droite (parallèle à Δ) passant par I' et de vecteur directeur $\vec{u}$. De même $g(\Delta)$ est la droite (parallèle à Δ) passant par I'' et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $f \circ g(\Delta)$ est la droite (parallèle à Δ) passant par $f \circ g(I)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 4 : Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$; deux vecteurs libres de représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ non équipollents, et α, β deux réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit O un point quelconque de l'espace et un point C tel que $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB} = \beta \overrightarrow{AB}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{OC}$ est un représentant (en O) du vecteur libre $\beta \vec{U} + \alpha \vec{V}$ (utiliser des triangles semblables à OAB). En particulier, si C est le milieu du segment AB alors $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ pour tout point O de l'espace.

2) Dédurre de ce qui précède que:

i) les médianes d'un triangle sont concourantes en un point qui divise chacune d'elles dans un rapport $\frac{2}{1} \left(= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \right)$.

ii) les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux;

Rep. 1) On a $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{AB} = (1 - \alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{OB} = \beta \vec{U} + \alpha \vec{V}$. En particulier, si C est le milieu du segment AB on aura $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ et en appliquant ce qui précède, on obtient $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ pour tout point O de l'espace.

2) i) Soit ABC un triangle, D le milieu de BC et O un point quelconque de l'espace. Soit X le point de AD tel que $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. D'après ce qui précède on a $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. Appliquons ce qui précède à A, D et $C = X$ avec $\alpha = \frac{2}{3}$, on aura $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Donc $\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. On voit que cette égalité est indépendante de la médiane AD issue de A . Autrement dit, on obtiendra la même formule en considérant les milieux E et F de AB et AC respectivement. Donc le point X vérifiant $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ vérifie aussi $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$. En conclusion, les trois médianes AD, BF et CE se coupent au même point X qui divise chacune d'elle dans le rapport $\frac{2}{1} \left(= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \right)$.

ii) Par définition de la relation d'équipollence, les diagonales du parallélogrammes $ABCD$ se coupent en leurs milieux car les vecteurs qui constituent les cotés sont équipollents deux à deux. On peut aussi retrouver le résultat en effectuant des calculs analogues à la question précédente.

Exercice 5 : Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires, $m \in \mathbb{R}$ et I, J les milieux des segments AB et CD . Soit G_m le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, m-2), (D, m)$.

i) Déterminer G_1 et G_2 .

ii) Montrer que G_2 est le milieu de G_1J .

iii) Montrer que $\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$. Quel est le lieu de G_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$?

iv) Vérifier que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

Rep. i) Par définition, on a

$$\overrightarrow{OG_m} = \frac{1}{1+1+m-2+m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD})$$

et par suite:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ et } \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD})$$

ii) $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \frac{-1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ et
 $\overrightarrow{G_2J} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{G_1G_2}$.
 Ce qui montre que G_2 est le milieu de G_1J .

iii) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG_m} &= \overrightarrow{OG_m} - \overrightarrow{OI} \\ &= \frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI} \\ &= \frac{1}{m}\overrightarrow{OI} + \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI} \\ &= \frac{m-2}{2m}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OI}) \\ &= \frac{m-2}{2m}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\end{aligned}$$

iv) $m\overrightarrow{JG_m} = m(\overrightarrow{OG_m} - \overrightarrow{OJ}) = m(\frac{1}{2m}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (m-2)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OD}) - \frac{m}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CI}$
 On a donc $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$ et par suite le point G_m parcourt une droite passant par J mais privée de ce point J .

Exercice 6 : Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires et $k \in \mathbb{R}$. Soit les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = k\overrightarrow{BC}$. Soit I, J, H les milieux respectifs de AB, CD et EF .

i) Montrer que les points I, J, H sont colinéaires.

ii) Déterminer l'ensemble des points $H \in \mathcal{E}$ lorsque k varie dans $\mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs de k qui correspondent à $H = J$ et à $H = I$?

Rep. i) Des relations $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$, il vient $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{IJ}$ et donc les points I, J, H sont colinéaires.

ii) D'après la question précédente, H parcourt la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$.

Si $H = J$, cela voudrait dire que H est aussi le milieu de CD . Et comme $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont équipollents, on déduit que $E = B$ et $F = D$, et par suite que $k = 1$. Par le même argument si $H = I$, on obtient $k = 0$.

Exercice 7 : Soit trois points A, B, C . Soit G_1, G_2 et G les barycentres des systèmes pondérés $\{(A, a_1), (B, b_1), (C, c_1)\}$, $\{(A, a_2), (B, b_2), (C, c_2)\}$, et $\{(A, a_1 + \lambda a_2), (B, b_1 + \lambda b_2), (C, c_1 + \lambda c_2)\}$ respectivement, λ étant un nombre réel non nul. Etablir la relation

$$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{G_1G} + \lambda(a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{G_2G} = \overrightarrow{0} \quad \text{et en déduire que les trois points sont alignés.}$$

Rep. Par définition des barycentres G_1, G_2 et G on a:

$$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{GG_1} = a_1\overrightarrow{GA} + b_1\overrightarrow{GB} + c_1\overrightarrow{GC}, \quad (a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{GG_2} = a_2\overrightarrow{GA} + b_2\overrightarrow{GB} + c_2\overrightarrow{GC} \quad \text{et} \\ \overrightarrow{0} = (a_1 + \lambda a_2 + b_1 + \lambda b_2 + c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GG} = (a_1 + \lambda a_2)\overrightarrow{GA} + (b_1 + \lambda b_2)\overrightarrow{GB} + (c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GC}.$$

Multiplications la deuxième égalité par λ et additionnons la avec la première:

$$(a_1 + b_1 + c_1)\overrightarrow{GG_1} + \lambda(a_2 + b_2 + c_2)\overrightarrow{GG_2} = (a_1 + \lambda a_2)\overrightarrow{GA} + (b_1 + \lambda b_2)\overrightarrow{GB} + (c_1 + \lambda c_2)\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

Cette égalité signifie que $\alpha\overrightarrow{GG_1} + \beta\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{0}$ avec

$\alpha = a_1 + b_1 + c_1$ et $\beta = a_2 + b_2 + c_2$. C'est à dire que les trois points G, G_1 et G_2 sont alignés.

Exercice 8 : Soit G et G' les isobarycentres des points supposés distincts A, B, C et A', B', C' .

Etablir la relation

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'};$$

Rep. G et G' étant les isobarycentres des points A, B, C et A', B', C' , on a

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{0}.$$

Evaluons la somme demandée

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Les mêmes calculs conduisent à la deuxième égalité $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Exercice 9 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les points $A(0, 0, a)$ et $A'(0, 0, -a)$ avec $a > 0$.

- i) Donner les équations vectorielles et cartésiennes des droites $D(A, \vec{i})$ et $D(A', \vec{j})$.
- ii) Soit α l'abscisse d'un point quelconque de $D(A, \vec{j})$ et β l'ordonnée d'un point quelconque de $D(A', \vec{j})$. Donner les coordonnées du milieu I de MM' .
- iii) On suppose que M et M' varient sur $D(A, \vec{j})$ et $D(A', \vec{j})$ de telle sorte que $MM' = l$ avec $l \geq 2a$ fixé. Déterminer analytiquement le lieu de I .
- iv) Soit H, H' les projections orthogonales de M, M' sur le plan $z = 0$. Montrer que $OI = \frac{1}{2}HH'$ et retrouver le résultat précédent.
- v) On suppose maintenant que M et M' varient sur $D(A, \vec{j})$ et $D(A', \vec{j})$ de telle sorte que la projection orthogonale de $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à un vecteur donné $\vec{u}$. Déterminer le lieu de I .

Rep. i) $M \in D(A, \vec{j})$ si et seulement $\exists \lambda \in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{i}$. Ce qui donne l'équation vectorielle. L'équation cartésienne est alors $x = \lambda$, $y = 0$ et $z = a$. De même $M \in D(A', \vec{j})$ si et seulement $\exists \lambda \in R$ tel que $\overrightarrow{A'M} = \lambda \vec{j}$ et les équations cartésiennes sont $x = 0$, $y = \lambda$ et $z = -a$.

ii) $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) = \frac{1}{2}(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j})$

iii) On a $MM'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4a^2$, donc si $MM' = l$, on aura $OI^2 = \alpha^2 + \beta^2 = l^2 - 4a^2$. Ce qui implique que I parcourt un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{l^2 - 4a^2}$.

iv) On a $H(\alpha, 0, 0)$ et $H'(0, \alpha, 0)$ et donc $HH' = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2OI$ ce qui donne le résultat recherché. Le résultat précédent est alors obtenu, on observant que HH' est constant.

v) Si $\overrightarrow{HH'} = \lambda \vec{u}$, pour un vecteur fixe $u = b \vec{i} + c \vec{j}$ on obtient $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}) = b \vec{i} + c \vec{j}$ ce qui donne $\alpha = a\lambda$ et $\beta = b\lambda$ qui est l'équation de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 10: a) Déterminer deux vecteurs engendrant le plan d'équation cartésienne $2x + 3y - z - 1 = 0$

b) Soit les vecteurs libres $\vec{V}_1(1, 0, 1)$, $\vec{V}_2(0, 2, -1)$ et les points $A(2, 1, 1)$, $B(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Donner les équations cartésiennes du plan $P(A, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ et de la droite $D(B, \vec{V})$ avec $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

Rep. a) Les plans d'équations $P_1 : 2x + 3y - z - 1 = 0$, et $P_0 : 2x + 3y - z = 0$ ont les mêmes vecteurs directeurs. Puisque $(0, 0, 0) \in P_0$, pour un point $M(x, y, z) \in P_0$, on a $\overrightarrow{OM} = (x, y, z) = x, y, 2x + 3y = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 3)$. Donc P_1 est engendrée par les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 2)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1, 3)$.

b) $M(x, y, z) \in P(A, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ si et seulement si, $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2$. Ceci donne le système d'équations paramétriques suivant:

$$\begin{cases} x - 2 &= \alpha \\ y - 1 &= 2\beta \\ z - 1 &= 2\alpha - \beta \end{cases}$$

En écrivant $4L_1 - L_2 + 2L_3$, on obtient $4x - y + 2z - 7 = 0$, ce qui représente l'équation cartésienne du plan.

On a $M(x, y, z) \in D(B, \vec{V})$ si et seulement si $\overrightarrow{BM} = \lambda \vec{V}$, ce qui conduit aux équations paramétriques de la droite

$$\begin{cases} x - 1 &= \lambda \\ y - \frac{1}{2} &= -2\lambda \\ z - \frac{1}{2} &= 2\lambda \end{cases}$$

et en considérant $2L_1 + L_2$ et $L_2 + L_3$, on aboutit aux équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{5}{2} &= 0 \\ y + z - 1 &= 0 \end{cases}$$

Exercice 11: L'espace étant rapporté à un repère, soit A et B deux points quelconques de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}_1(0, 1, 2)$; $\vec{U}_2(1, 2, 3)$; $\vec{V}_1(1, 1, 1)$; $\vec{V}_2(-1, 0, 1)$

- 1) Montrer que les plans $P(A, \vec{U}_1, \vec{U}_2)$ et $P(B, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ sont parallèles

- 2) Montrer que les deux plans $P(A, \vec{U}, \vec{V})$ et $P(A, \vec{W}_1, \vec{W}_2)$ sont confondus, avec $\vec{U}(1, -2, 1)$, $\vec{V}(-1, 1, 1)$, $\vec{W}_1(-1, 0, 3)$ et $\vec{W}_2(0, -1, 2)$.
- 3) Déterminer la droite intersection des deux plans $P(A, \vec{U}, \vec{V})$ et $P(A, \vec{S}, \vec{W}_2)$ où $\vec{S}(1, -1, 1)$.

Rep. 1) Les Plans $P(A, \vec{U}_1, \vec{U}_2)$ et $P(B, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. C'est à dire si et seulement si les vecteurs $U_1 \wedge U_2$ et $V_1 \wedge V_2$ sont colinéaires, On a $U_1 \wedge U_2 = (-1, 2, -1)$ et $V_1 \wedge V_2 = (1, -2, 1) = -U_1 \wedge U_2$.

On peut aussi remarquer que $U_1 = V_1 + V_2$ et $U_2 = 2V_1 + V_2$ pour dire que les Plans $P(A, \vec{U}_1, \vec{U}_2)$ et $P(B, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ sont parallèles

2) Comme les deux plans $P(A, \vec{U}, \vec{V})$ et $P(A, \vec{W}_1, \vec{W}_2)$ passent par le même point, il suffit de montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont coplanaires avec $\vec{W}_1$ et $\vec{W}_2$. On peut remarquer pour cela que $\vec{U} = 2\vec{W}_2 - \vec{W}_1$ et $\vec{V} = \vec{W}_1 - \vec{W}_2$.

3) Soit $\vec{T}$ un vecteur directeur de la droite $P(A, \vec{U}, \vec{V}) \cap P(A, \vec{S}, \vec{W}_2)$. Comme $A \in D(A, \vec{T})$, pour déterminer $\vec{T}$, il suffit de trouver un vecteur qui est coplanaire à la fois aux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et aux vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{W}_2$. D'après la question 2), on a $\vec{W}_2 = \vec{U} + \vec{V}$ est donc coplanaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Il est en plus coplanaire à $\vec{S}$ et $\vec{W}_2$. On peut alors prendre $\vec{T} = \vec{W}_2$. $P(A, \vec{U}, \vec{V}) \cap P(A, \vec{S}, \vec{W}_2) = D(A, \vec{W}_2)$

Exercice 12: On considère les vecteurs libres $\vec{U}(1, -2, 1)$, $\vec{V}(-1, 1, 1)$, $\vec{W}(1, -1, 1)$ et les points $A(0, -1, 2)$, $M(1, -2, 3)$, $N(1, 0, 1)$ dans un repère de l'espace.

- i) Montrer que A est sur le plan $P(O, \vec{U}, \vec{V})$.
- ii) Donner les coordonnées des projections sur $D(O, \vec{W})$ parallèlement à $P(O, \vec{U}, \vec{V})$ des points A, M, N .
- ii) Ecrire les vecteurs $\vec{OM}$ et $\vec{ON}$ comme sommes d'un vecteur sur $D(O, \vec{W})$ et d'un vecteur sur $P(O, \vec{U}, \vec{V})$.

Rep. i) $A \in P(O, \vec{U}, \vec{V}) \iff \exists \alpha, \beta$ réels tels que $\vec{OA} = \alpha \vec{U} + \beta \vec{V}$. C'est à dire $0 = \alpha - \beta$, $-1 = -2\alpha + \beta$ et $2 = \alpha + \beta$. Une solution de ce système est $\alpha = \beta = 1$. Donc $A \in P(O, \vec{U}, \vec{V})$.

ii) Les projections des points A, M et N sur $D(O, \vec{W})$ parallèlement à $P(O, \vec{U}, \vec{V})$ sont les points A', M' et N' définis par $A' = D(O, W) \cap P(A, \vec{U}, \vec{V})$, $M' = D(O, W) \cap P(M, \vec{U}, \vec{V})$ et $N' = D(O, W) \cap P(N, \vec{U}, \vec{V})$. On fait les calculs pour le point A , les autres points s'obtiennent de manière similaire.

$$\begin{aligned} A'(x', y', z') \in D(O, \vec{W}) &\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}; \vec{OA} = \alpha \vec{W} \\ A'(x', y', z') \in P(A, \vec{U}, \vec{V}) &\iff \exists \beta, \gamma; \vec{AA'} = \beta \vec{U} + \gamma \vec{V} \end{aligned}$$

$$\text{D'où le système d'equations } \begin{cases} x' = \alpha \\ x' = \gamma - \beta y' + 1 = -2\gamma + \beta, z' - 2 = \gamma + \beta \end{cases}, y' = -\alpha, z' = \alpha$$

Il faut donc résoudre ce système à six inconnues et six equations. De la première ligne vient $x' = -y' = z'$ puis dans la deuxième ligne, on obtient $\beta = \gamma = -1$. D'où $x' = y' = z' = 0$, $A' = O$ (Ceci provient du fait que $A \in P(O, \vec{U}, \vec{V})$)

iii) Rappelons que tout vecteur lié sur le plan $P(O, \vec{U}, \vec{V})$ s'écrit sous la forme $\alpha \vec{U} + \beta \vec{V}$ avec α, β réels. Il s'agit donc de trouver α, β et γ tels que $\vec{OM} = \alpha \vec{U} + \beta \vec{V} + \gamma \vec{W}$. D'où le système d'équations

$$1 = \alpha - \beta + \gamma, \quad 2 = -2\alpha + \beta - \gamma; \quad 3 = \alpha + \beta + \gamma$$

dont la solution est $\alpha = \beta = \gamma = 1$ et par conséquent $\vec{OM} = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$.

Le système d'equations associé à N est

$$1 = \alpha - \beta + \gamma, \quad 0 = -2\alpha + \beta - \gamma; \quad 1 = \alpha + \beta + \gamma$$

de solution $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{4}$ et $\gamma = \frac{3}{2}$. Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{W_1}$ avec $\overrightarrow{S_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{U} + \frac{3}{4}\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{W}$.

Exercice 13: Soit dans le plan $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ deux vecteurs libres. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.

i) Soit O un point du plan. Pour tout point M du plan, on note (x, y) ses coordonnées relativement au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (x', y') ses coordonnées relativement à $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ecrire les équations suivantes dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$; $xy = 1$; $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 21 = 0$.

Rep. Dans ce genre de problème, il faut exprimer les anciennes coordonnées (x, y) en fonction des nouvelles (x', y') pour pouvoir les remplacer. Pour tout point $M(x, y) = M(x', y')$ du plan, on a $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x'\overrightarrow{U} + y'\overrightarrow{V}$. Avec les formules données, on a $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}x'\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}x'\overrightarrow{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\overrightarrow{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\overrightarrow{j}$. D'où $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$. On reporte dans chacune des équations données et on obtient la première:

$$5\frac{2}{4}(x' - y')^2 + 6\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + 5\frac{1}{2}(x' + y')^2 - 8 = 0$$

Après simplifications : $2x'^2 - y'^2 - 4 = 0$.

Pour la deuxième, on obtient $x'^2 - y'^2 = 2$.

CHAPTER 2

2

Exercice 1 : 1) Soit un triangle ABC et M le milieu de BC . Montrer que

- a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$
- c $4AM^2 - BC^2 = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- d $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA}$

2) 2) Soit A, B, C, D , quatres points de l'espace. Montrer que

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \|\overrightarrow{BD}\|^2 + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

Si $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \leq 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} \leq 0$, alors $\|\overrightarrow{AC}\| \geq \|\overrightarrow{BD}\|$

Rep. (1) a. $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b. On ecrit $AB^2 + AC^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} + AM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC} = 2AM^2 + \frac{1}{4}BC^2 + \frac{1}{4}BC^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2$

c. Il suffit d'utiliser les deux premières relation 2(2) - (1) pour avoir le résultat recherché.

d. $AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} - (AM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA}$.

2) On a

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BD}\|^2.$$

En particulier si $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \leq 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} \leq 0$, on obtient $\|\overrightarrow{BD}\|^2 \leq \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \leq \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|$ et finalement $\|\overrightarrow{BD}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|$.

Exercice 2 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les points $A(2, 0, 0); B(0, 4, 0), C(0, 0, 6)$.

1) Donner les équations vectorielle et cartésienne du plan (P) passant par A, B, C . Montrer que la droite $D(O, \vec{u})$ avec $\vec{u}(1, -2, 0)$ est parallèle au plan (P) .

2) Soit (Q) le plan d'équation $3y + 2z - 6 = 0$. Donner les composantes d'un vecteur normal à (Q) et vérifier que la droite (OA) est parallèle à (Q) .

3) Donner l'équation vectorielle de la droite intersection de (P) et de (Q)

4) Soit $E(1, 2, 3)$ et $D(0, 2, 0)$, d'éterminer l'intersection de (P) et (DE) ? Que représente cette intersection pour le triangle ABC ?

5) Soit $S = \{M, \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 2MC^2\}$, quelle est la nature de S ? Donner son équation cartésienne et déterminer $(P) \cap S$

Rep. 1) $M \in P \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont coplanaires. Ce qui revient a dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$

$$0. \text{ On a } \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ y & 4 & 0 \\ z & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24x + 12y + 8z - 48 = 0$$

La droite $D(O, \vec{u})$ avec $\vec{u}(1, -2, 0)$ est parallèle au plan (P) si et seulement si $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont coplanaires, ou encore que $\det(\vec{u}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. La dernière affirmation est facile a vérifier.

2) Les composantes de la normale à (Q) sont $\vec{n}_2(0, 3, 2)$. Avec le même argument que précédemment, il suffit de vérifier que $\vec{AO} \cdot \vec{n}_2 = 0$. Ceci se fait sans peine puisque $(2, 0, 0) \cdot (0, 3, 2) = 0$.

3) Le vecteur directeur $\vec{d}$ de la droite $(P) \cap (Q)$ est orthogonal aux normales de (P) et de (Q) . on peut donc prendre $\vec{d} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (0, -2, 3)$. Il nous reste à trouver un point sur cette droite. Ce qu'on peut faire en résolvant le système obtenu à partir des équations de (P) et (Q) .

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \\ 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \text{ dont une solution est par exemple } (1, 2, 0).$$

Si on pose $H(1, 2, 0)$, l'équation vectorielle de $(P) \cap (Q)$ est celle de la droite $D(H, \vec{d})$.

4) Soit $G = (DE) \cap (P)$. Ce point G est tel que $DG = \lambda DE = (\lambda(1, 0, 3))$ et $G \in (P)$. Si x, y, z sont les composantes de G , on aura $x = \lambda, y = 2, z = 3\lambda$ et $6x + 3y + 2z - 12 = 0$. On déduit les coordonnées de $G(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2})$. On a $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + 2\vec{OB} + \vec{OC})$. Donc G est le barycentre du système pondéré $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$.

Nature de S : Pour un point $M(x, y, z)$, on a $\vec{CM}(x, y, z - 6), \vec{AM}(x - 2, y, z), \vec{BM}(x, y - 4, z)$. Donc

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in S &\iff x(x - 2) + y^2 + z(z - 6) - x^2 - y(y - 4) - z(z - 6) = 2(x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36) \\ &\iff -2x + 4y = 2(x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 36) \\ &\iff x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y - 12z + 36 = 0 \\ &\iff (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

S est la sphere de centre $(-\frac{1}{2}, 1, 6)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

L'intersection $S \cap (P)$ s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 + (z - 6)^2 = \frac{5}{4} \\ 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

Comme le centre de la sphere appartient au plan (P) , cette intersection est le cercle de centre $(-\frac{1}{2}, 1, 6)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (qui se trouve bien dans le plan);

Exercice 3: a) Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs libres. Montrer que $\vec{V}$ peut s'écrire comme somme de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, avec $\vec{V}_1$ colinéaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}_2 \cdot \vec{U} = 0$. En déduire la relation $(\vec{U} \cdot \vec{V})^2 + \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2$.

b) Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs libres. Montrer que $\vec{U} = \vec{V}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée.

- Il existe un vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{W}$ et $\vec{U} \cdot \vec{W} = \vec{V} \cdot \vec{W}$
- Pour tout vecteur $\vec{W}$, $\vec{U} \cdot \vec{W} = \vec{V} \cdot \vec{W}$
- Pour tout vecteur $\vec{W}$, $\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{W}$

c) Etablir la relation du double produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}.$$

Déterminer le vecteur $\vec{X}$ sachant que $\vec{X} \cdot \vec{U} = p$ et $\vec{X} \wedge \vec{U} = \vec{V}$, avec $p, \vec{U}$ et $\vec{V}$ donnés.

d) Démontrer que

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot (\vec{W} \wedge \vec{T}) = (\vec{U} \cdot \vec{W})(\vec{V} \cdot \vec{T}) - (\vec{U} \cdot \vec{T})(\vec{V} \cdot \vec{W}).$$

e) Soit A, B et C , trois points non alignés. Montrer que le vecteur $\vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC} + \vec{OC} \wedge \vec{OA}$ est orthogonal au plan déterminé par les points A, B et C .

Rep. a) Il suffit de choisir $\vec{V}_1$ la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur l'axe de direction $\vec{U}$ et $\vec{V}_2$ la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur le plan de normal $\vec{U}$. On a $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ avec $\vec{V}_1 = \lambda \vec{U}$ et $\vec{U} \cdot \vec{V}_2 = 0$. Ainsi $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{U} \wedge \vec{V}_2$ et $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot \vec{V}_1$. En plus $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}_2\|$ et $\|\vec{U} \cdot \vec{V}\| = \|\vec{U} \cdot \vec{V}_1\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}_1\|$.

On en déduit $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} \cdot \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 (\|\vec{V}_2\|^2 + \|\vec{V}_1\|^2) = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2$.

Car $\|\vec{V}_1\|^2 + \|\vec{V}_2\|^2 = \|\vec{V}\|^2$ du fait que $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$.

b) Il s'agit de montrer l'équivalence des 4 assertions suivantes *i)* $\vec{U} = \vec{V}$, *ii)* pour tout $\vec{W}$, on a $\vec{U} - \vec{V} \wedge \vec{W} = \vec{0}$, *iii)* pour tout $\vec{W}$, on a $\vec{U} - \vec{V} \cdot \vec{W} = \vec{0}$ et *iv)* il existe $\vec{W} \neq \vec{0}$ telque, $\vec{U} - \vec{V} \wedge \vec{W} = \vec{0}$ et $\vec{U} - \vec{V} \cdot \vec{W} = 0$. Trivialement *i)* implique les trois autres assertions. Montrons d'un autre coté chacune de ses assertions implique *i)*.

Supposons *ii)* satisfaite et choisissons $\vec{W} \perp \vec{U} - \vec{V}$ non nul. On aura $0 = \|(\vec{U} - \vec{V}) \wedge \vec{W}\| = \|\vec{U} - \vec{V}\| \|\vec{W}\|$ et donc $0 = \|\vec{U} - \vec{V}\|$. Ce qui donne *i)*

Si *iii)* est vérifiée, on aura en particulier $(\vec{U} - \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = 0$ et donc $\vec{U} - \vec{V} = \vec{0}$.

Enfin si on a *iv)*, $\vec{U} - \vec{V}$ est à la fois orthogonal et colinéaire à W , ce qui entraîne $\vec{U} - \vec{V} = \vec{0}$.

c) On peut établir la relation analytiquement ou géométriquement. On présente ici la méthode géométrique: Soit $T = \vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$. Puisque $\vec{T} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = 0$, on obtient $\vec{T}, \vec{V}, \vec{W}$ sont coplanaires. Il existe donc α, β des réels telque $\vec{T} = \alpha \vec{V} + \beta \vec{W}$. Comme $\vec{T} \cdot \vec{U} = 0$, on déduit que $\alpha \vec{V} \cdot \vec{U} + \beta \vec{W} \cdot \vec{U} = 0$. En particulier lorsque $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux et $\vec{U}$ et $\vec{W}$ sont colinéaires de même sens, le vecteur $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{V}$ et de même sens. Comme $\|\vec{T}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \|\vec{W}\|$, on a $\vec{T} = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \cdot \vec{V}$ et $\alpha = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \cdot \vec{V}$.

De même lorsque $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires de même sens, T est colinéaire à $\vec{W}$ mais de sens opposé. Donc $\vec{T} = -(\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}$ et $\beta = \vec{U} \cdot \vec{V}$.

Ce qui établit la formule du double produit vectoriel:

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{U} \cdot \vec{V}) \vec{W}.$$

Si on forme le double produit $\vec{U} \wedge (\vec{X} \wedge \vec{U}) = (\vec{U} \cdot \vec{U}) \vec{X} - (\vec{U} \cdot \vec{X}) \vec{U} = \|\vec{U}\|^2 \vec{X} - p \vec{U}$, on obtient la formule

$$\vec{X} = \frac{p \vec{X} + \vec{U} \wedge \vec{V}}{\|\vec{U}\|^2}$$

d) On a

$$\begin{aligned} (\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot (\vec{W} \wedge \vec{T}) &= ((\vec{U} \wedge \vec{V}), \vec{W}, \vec{T}) \\ &= (\vec{T}, (\vec{U} \wedge \vec{V}), \vec{W}) \\ &= \vec{T} \cdot ((\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}) \\ &= -\vec{T} \cdot [(\vec{W} \cdot \vec{V}) \vec{U} - (\vec{W} \cdot \vec{U}) \vec{V}] \\ &= (\vec{U} \cdot \vec{W}) \cdot (\vec{V} \cdot \vec{T}) - (\vec{W} \cdot \vec{V}) \cdot (\vec{U} \cdot \vec{T}) \end{aligned}$$

e) Il suffit de vérifier que le vecteur donné est colinéaire au vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ qui est normal au plan (A, B, C) . On a $\vec{OA} \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC} + \vec{OC} \wedge \vec{OA} = (\vec{OC} + \vec{CA}) \wedge \vec{OB} + \vec{OB} \wedge \vec{OC} + (\vec{OA} + \vec{AC}) \wedge \vec{OA} = \vec{AC} \wedge \vec{BA}$.

Exercice 4: Soit A, B, C, D quatre points distincts de l'espace et $\mathcal{E} = \{M, \vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD}\}$

1) Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque A, B, C, D ne sont pas coplanaires

2) On suppose A, B, C, D coplanaires, et soit I tel que $\vec{IA} \wedge \vec{IB} = \vec{IC} \wedge \vec{ID}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ dans chacun des cas suivants:

i) $(AB) \cap (CD) = \{O\}$

ii) $(AB) = (CD)$,

iii) (AB) et (CD) sont parallèles.

Rep. 1) On suppose A, B, C, D non coplanaires. Alors les vecteurs $\vec{MA} \wedge \vec{MB}$ et $\vec{MC} \wedge \vec{MD}$ ne sont pas colinéaires et dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E}$ est réduit à $\emptyset$.

2) i) On suppose maintenant que On suppose A, B, C, D sont coplanaires et que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point O . On a:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff \vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD} \\ &\iff (\vec{MO} + \vec{OA}) \wedge (\vec{MO} + \vec{OB}) = (\vec{MO} + \vec{OC}) \wedge (\vec{MO} + \vec{OD}) \\ &\iff \vec{MO} \wedge \vec{OB} + \vec{MO} \wedge \vec{AO} = \vec{MO} \wedge \vec{OD} + \vec{MO} \wedge \vec{CO} + \vec{OC} \wedge \vec{OD} + \vec{OA} \wedge \vec{OB} \end{aligned}$$

Mais par hypothèse O, C, D sont alignés et O, A, B alignés. Donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD} = 0$, d'où:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &\iff \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{CD} \\ &\iff \overrightarrow{MO} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}), \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii) Supposons maintenant que les droites (AB) et (CD) sont confondues. Dans ce cas le point I est sur la droite $(AB) = (CD)$ et les calculs précédents restent valables avec le même argument $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{IM} \wedge (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{0}$. Si en plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\mathcal{E}$ est l'espace tout entier. Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$ $M \in \mathcal{E} \iff \overrightarrow{IM} = k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ et puisque A, B, C, D sont alignés, $\mathcal{E}$ est la droite (AB) .

iii) Supposons enfin que (AB) et (CD) sont parallèles distinctes. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (AB) et (CD) et soit $J \in (AB)$ et $K \in (CD)$ tels que $\overrightarrow{JK} \cdot \vec{u} = 0$. (La droite (JK) est perpendiculaire à (AB) et (CD)). On a $\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \beta \vec{u}$. et $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) \wedge (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) = \alpha \overrightarrow{MJ} \wedge \vec{u}$. De même $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = \beta \overrightarrow{MK} \wedge \vec{u}$.

Ainsi: $M \in \mathcal{E} \iff \alpha \overrightarrow{MJ} \wedge \vec{u} = \beta \overrightarrow{MK} \wedge \vec{u} \iff \vec{u} \wedge (\alpha \overrightarrow{MJ} - \beta \overrightarrow{MK}) = \overrightarrow{0}$

Si $\alpha - \beta \neq 0$, soit G le barycentre de $\{(J, \alpha), (K, -\beta)\}$, alors $M \in \mathcal{E} \iff \alpha \overrightarrow{MG} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{0}$ et par conséquent $\mathcal{E} = D(G, \vec{u})$.

Si $\alpha - \beta = 0$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\alpha \overrightarrow{MJ} = \beta \overrightarrow{MK}$. D'où $M \in \mathcal{E} \iff \vec{u} \wedge \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires. Ce qui contredit le fait qu'il soient non nul orthogonaux. Donc $\mathcal{E} = \emptyset$.

Exercice 5: L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On rappelle la formule du double produit vectoriel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$ et on considère l'équation vectorielle

$$(E) \quad (\vec{x} \wedge \vec{u}) = \vec{v}$$

a) Donner une condition nécessaire d'existence de solution de (E)

b) On suppose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

i) Montrer que si $\vec{x}_0$ est solution de (E) , alors $\vec{x} - \vec{x}_0$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

ii) Trouver $\vec{x}_0$ tel que $\vec{x}_0 = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

iii) Trouver l'ensemble S des solutions de (E) .

Rep.

$$(E) \quad \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{V}$$

a) Si l'équation (E) admet une solution, on doit avoir nécessairement $\vec{u} \cdot \vec{V} = 0$

b) Soit $\vec{x}_0$ une solution de (E)

i) Si x est aussi une solution de (E) , on a $(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{0}$ c'est à dire que $\vec{x} - \vec{x}_0$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

ii) Le fait que $\vec{x}_0 = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{V})$ soit solution de (E) s'exprime par $\lambda(\vec{u} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{u} = \vec{V}$. Utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient $\lambda[(\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{V} - (\vec{u} \cdot \vec{V}) \vec{u}] = \vec{V}$, soit $\lambda[(\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{V} - \vec{V}] = \vec{V}$, ce qui implique que $\lambda = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2}$.

La solution recherchée est donc $x_0 = \frac{\vec{u} \wedge \vec{V}}{\|\vec{u}\|^2}$

iii) D'après i), si $\vec{x}$ est une solution de (E) , alors $\vec{x} - \vec{x}_0 = k \vec{u}$ et donc $\vec{x} = \vec{x}_0 + k \vec{u}$. Par conséquent l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ \vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{V}}{\|\vec{u}\|^2} + k \vec{u}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 6: a) Montrer que la distance d d'un point P de l'espace à une droite $D(A, \vec{V})$ est donnée par $d = \frac{|\vec{V} \wedge \overrightarrow{AP}|}{\|\vec{V}\|}$. L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, appliquer à $P(2, 1, 3)$, $A(-1, 1, -1)$ et $\vec{V}(-2, 2, 5)$.

b) Soit θ l'angle de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Montrer que $\operatorname{tg} \theta = \frac{|\vec{U} \wedge \vec{V}|}{|\vec{U} \cdot \vec{V}|}$.

Rep. a) Soit H la projection orthogonal de A sur la droite $D(A, \vec{V})$. On a

$$d = PH = PA |\sin \theta| = PA \frac{\|\vec{V}\|}{\|\vec{V}\|} |\sin \theta| = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}\|}{|\sin \theta|}$$

b) On a $|\sin \theta| = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}$ et $|\cos \theta| = \frac{|\vec{U} \cdot \vec{V}|}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}$. Par conséquent: $|\operatorname{tg} \theta| = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{|\vec{U} \cdot \vec{V}|}$

Exercice 7: Soit D la droite passant par les deux points $A(1, 1, 0)$ et $B(1, 0, 1)$, et soit D' la droite de vecteur directeur $\vec{V}(-1, 1, 0)$ et passant par le point $C(0, 1, 0)$. Déterminer la perpendiculaire commune à D et D' et la distance de ces deux droites.

Rep. Le vecteur directeur de la perpendiculaire commune à D et D' est orthogonal à leurs vecteurs directeurs. Il est donc colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} = (-1, -1, -1)$. On choisira $\vec{u}(1, 1, 1)$ comme vecteur directeur de cette perpendiculaire commune qu'on note Δ , on a

$$\Delta = P(A, \vec{u}, \overrightarrow{AB}) \cap P(C, \vec{u}, \vec{V})$$

Ecrivons les équations cartésiennes de ces deux plans:

$$P(A, \vec{u}, \overrightarrow{AB}) : 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - y - z - 1 \text{ et } P(C, \vec{u}, \vec{V}) : 0 = \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x - y + 2z + 1$$

$$\text{D'où les équation de } \Delta : \begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Si H et H' sont les intersections respectives de Δ avec les plans $\Delta = P(A, \vec{u}, \overrightarrow{AB})$ et $P(C, \vec{u}, \vec{V})$, la distance entre D et D' est égale à HH' . On peut calculer cette distance en déterminant les coordonnées de H et de H' . Mais on peut aussi remarquer que HH' est égale à la distance de n'importe quel point de D au plan $P(C, \vec{V}, \overrightarrow{AB})$ parallèle à D et contenant $D' = D(C, \vec{V})$. Le calcul de l'équation de $P(C, \vec{V}, \overrightarrow{AB})$ donne $x + y + z + 1 = 0$. D'où:

$$HH' = d(A, P(C, \vec{V}, \overrightarrow{AB})) = \frac{1+1+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Exercice 8: Soit la famille de plans $\mathcal{P}$ de direction $\vec{U}(1, 1, 1)$ et $\vec{V}(1, 0, 1)$, et la famille de plans $\mathcal{P}'$ de direction $\vec{U}'(-1, 0, 1)$ et $\vec{V}'(0, 1, 1)$.

Donner un vecteur normal à la famille $\mathcal{P}$ et un vecteur normal à la famille $\mathcal{P}'$.

Montrer que tout plan de $\mathcal{P}$ est orthogonal à tout plan de $\mathcal{P}'$.

Rep. Un vecteur normal à la famille des plans $P(\vec{U}, \vec{V})$ est $\vec{U} \wedge \vec{V} = (1, 0, -1)$. Un vecteur normal à la famille des plans $P(\vec{U}', \vec{V}')$ est $\vec{U}' \wedge \vec{V}' = (1, -1, 1)$. Puisque $\vec{U} \wedge \vec{V}$ et $\vec{U}' \wedge \vec{V}'$ sont orthogonaux, on déduit que tout plan de $P(\vec{U}, \vec{V})$ est orthogonal à tout plan de $P(\vec{U}', \vec{V}')$.

Exercice 9: a) Ecrire l'équation cartésienne du plan (P_1) engendré par les vecteurs $\vec{U}(1, -1, 0)$ et $\vec{V}(0, 1, -1)$ passant par le point $A(1, 0, 0)$. Donner un vecteur normal $\vec{N}$ à ce plan.

b) Donner les composantes d'un vecteur normal à un plan engendré par $\vec{U}$ et $\vec{W}(a, b, c)$. Donner une condition sur a, b, c pour que ce plan soit orthogonal à (P_1) .

c) Utiliser ce qui précède pour montrer que les plans (P_2) engendré par $\vec{U}, \vec{N}$ et (P_3) engendré par $\vec{N}$ et $\vec{R}(1, 1, 0)$ et passant tous les deux par le point $B(0, 0, 1)$ sont orthogonaux à (P_1) . Vérifier que (P_2) et (P_3) sont orthogonaux.

- d) Donner un vecteur directeur de la droite $(D) = (P_1) \cap (P_2)$, ainsi que son équation vectorielle.
- e) Vérifier que les trois plans (P_1) , (P_2) et (P_3) passent par un même point et donner un nouveau repère orthonormé $(B, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ tel que $\vec{k}'$ colinéaire à $\vec{N}$ et $\vec{i}'$ colinéaire à $\vec{U}$.
- f) Ecrire les équations des plans (P_1) , (P_2) et (P_3) dans ce nouveau repère.

Rep. a) L'équation cartésienne de $P_1(A, \vec{U}, \vec{V})$ est donnée par le produit mixte $(\vec{AM}, \vec{U}, \vec{V}) = 0$. En écrivant $M(x, y, z)$, on obtient $P_1 : x + y + z - 1 = 0$. Un vecteur normal est donc $\vec{N}(1, 1, 1)$.

b) Un vecteur normal au plan engendré par $\vec{U}(1, -1, 0)$ et $\vec{W}(a, b, c)$ est $\vec{U} \wedge \vec{W}(-c, -c, a + b)$. Ce plan est orthogonal à P_1 si et seulement si $\vec{N} \cdot (\vec{U} \wedge \vec{W}) = 0$, c'est à dire $a + b - 2c = 0$.

c) On utilise la condition trouvée en b) avec $\vec{W} = \vec{N}$, c'est à dire $a = b = c = 1$, et on vérifie que la condition $a + b - 2c = 0$ est satisfaite. Donc $P_2 = P(B, \vec{U}, \vec{V})$ est orthogonal à P_1 .

Le cas du plan $P_3 = P(B, \vec{N}, \vec{R})$ est évident car $\vec{N}$ est normal à P_1 (donc P_3 est orthogonal à P_1). Vérifions le quand même en utilisant la formule d) de l'exercice 3. Répétons le, P_1 et P_3 sont orthogonaux si et seulement si leurs normal le sont, c'est à dire $(\vec{N} \wedge \vec{R}) \cdot (\vec{U}, \vec{V}) = 0$. Ce qui est bien vérifié grâce à la formule

$$(\vec{N} \wedge \vec{R}) \cdot (\vec{U}, \vec{V}) = (\vec{N} \cdot \vec{U})(\vec{R} \cdot \vec{V}) - (\vec{N} \cdot \vec{V})(\vec{R} \cdot \vec{U})$$

puisque $\vec{N} \cdot \vec{U} = \vec{N} \cdot \vec{V} = 0$.

la même formule permet de montrer que P_2 et P_3 sont orthogonaux.

$$(\vec{U} \wedge \vec{N}) \cdot (\vec{N}, \vec{R}) = (\vec{U} \cdot \vec{N})(\vec{N} \cdot \vec{R}) - (\vec{U} \cdot \vec{R})(\vec{N} \cdot \vec{N}) = -\|\vec{N}\| \vec{U} \cdot \vec{R} = 0$$

car $\vec{U} \cdot \vec{R} = 0$.

d) Soit I un point quelconque de $D = P_1 \cap P_2$ est $\vec{IE}$ le représentant de $\vec{U}$ en I . Le vecteur lié $\vec{IE}$ est contenu dans $P_1 \cap P_2$ car $\vec{IE}$ est équipollent à $\vec{U}$ et $\vec{U}$ est l'un des deux vecteurs qui engendrent P_1 et P_2 . Par conséquent U est un vecteur directeur de (D) . Comme on peut le vérifier aisément le point $B \in P_1 \cap P_2$. Donc l'équation vectoriel de (D) est

$$M(x, y, z) \in (D) \iff \vec{BM} = \lambda \vec{U}$$

e) Les trois plans P_1, P_2 et P_3 passent tous par le point $B(0, 0, 1)$. On choisit $\vec{k}' = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, $\vec{i}' = \frac{\vec{U}}{\|\vec{U}\|}$ et $\vec{j}' = \vec{k}' \wedge \vec{i}'$. Le repère de sommet B est donc $\vec{i}'(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $\vec{j}'(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$; $\vec{k}'(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

f) Soit (x, y, z) les coordonnées d'un point M de l'espace dans le repère initial $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (x', y', z') ses coordonnées dans le repère $(B, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. On a $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ et comme $\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, $\vec{j}' = \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{k}$ et $\vec{k}' = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$, on déduit que

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} &= x'(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}) + y'(\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{k}) + z'(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}) \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z')\vec{i} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z')\vec{j} + (1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z')\vec{k} \end{aligned}$$

Il en résulte les expressions des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles

$$\begin{cases} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ y &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \\ z &= 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}y' + \frac{\sqrt{3}}{3}z' \end{cases}$$

L'équation du plan $x + y + z - 1 = 0$ devient en remplaçant $z' = 0$.

On procède de même pour P_2 , et P_3 après avoir écrit leurs équations cartésiennes dans l'ancien repère.

Une autre méthode consiste à écrire les composantes des vecteurs directeurs des plans ainsi que celles des points A, B dans le nouveau repère et exprimer les équations comme d'habitude.

Exercice 10: On considère les points de l'espace rapporté à un repère orthonormé $A(1, 1, 1); B(1, -1, 1); C(0, 1, -1); D(-1, 0, -3)$.

a) Montrer qu'ils sont coplanaires et donner l'équation cartésienne du plan (P) qui les contient.

b) Donner les coordonnées de leur isobaricentre G .

c) On définit l'application à valeurs vectorielles f qui fait correspondre à tout point M de l'espace le vecteur $\vec{f}(M)$ défini par

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} \wedge \overrightarrow{AB}$$

i) Montrer que $\overrightarrow{f(M)}$ est constante, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(G)}$ pour tout point M .

ii) Vérifier que $\overrightarrow{f(A)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ et conclure que $\overrightarrow{f(M)}$ est orthogonal au plan (P)

Rep.

a) Les quatres points sont coplanaire, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont aussi coplanaires. On a:

$$\overrightarrow{AB}(0, -2, 0), \overrightarrow{AC}(-1, 0, -2) \text{ et } \overrightarrow{AD}(-2, -1, -4) \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0.$$

$$\text{L'équation du plan est } \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4x - 2z - 2 = 0. \text{ Ou encore } 2x - y - 1 = 0$$

b) Les coordonnées de G sont $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{2}$

c) i)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)} &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \wedge \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \wedge \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \wedge \overrightarrow{DA} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{f(G)} \\ &= \overrightarrow{f(G)} \end{aligned}$$

ii) Calculons $\overrightarrow{f(A)}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(A)} &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

De sorte que $\overrightarrow{f(A)} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = 0$.

On voit aussi que $\overrightarrow{f(A)} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Donc $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(A)}$ est normal au plan engendré par $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ qui est le plan (P) .

Exercice 11: Soit A, B, C, D des points de l'espace et G leur isobarycentre.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| = 3\|\overrightarrow{MD}\|$

2) Soit I le milieu de GD et k un réel. Montrer que $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 - IG^2$. déterminer le lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 3k$

Rep.

1) On a $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{BC}$. Ainsi

$M \in E_1 \iff \|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$. Soit D' tel que $\overrightarrow{GD'} = \overrightarrow{BC}$, on aura

$M \in E_1 \iff \|\overrightarrow{MD'}\| = \|\overrightarrow{MD}\|$, E_1 est le plan médiateur de DD' , c'est à dire le plan orthogonal à la droite (DD') passant par le milieu du segment DD' .

2) On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IG}) \\ &= \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IG}\|^2 \end{aligned}$$

Comme G est l'isobarycentre de A, B, C , on a $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD}$ et par suite

$$\begin{aligned} M \in E_2 &\iff 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD} = 2k \\ &\iff \|\overrightarrow{MI}\|^2 - \|\overrightarrow{IG}\|^2 = k \\ &\iff \|\overrightarrow{MI}\|^2 = \|\overrightarrow{IG}\|^2 + k \end{aligned}$$

Si $k < -\|\overrightarrow{IG}\|^2$, $E_2 = \emptyset$

Si $k = -\|\vec{IG}\|^2$, $E_2 = \{I\}$,

Si $k > -\|\vec{IG}\|^2$, E_2 est la sphere de centre I et de rayon $\sqrt{k + \|\vec{IG}\|^2}$.

Exercice 12: Soit A et B deux points distincts fixés de l'espace. On définit l'application ponctuelle f qui fait correspondre à tout point M de l'espace le point $M' = f(M)$ défini par $\vec{AM'} = \vec{AB} \wedge \vec{AM}$.

a) Montrer que l'image par f d'une droite D passant par un point C et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$ est une droite Δ dont on précisera un point et un vecteur directeur. Vérifier que D et Δ sont orthogonales.

b) Pour tout point M déterminer $f \circ f(M)$ et $f \circ f \circ f(M)$.

Rep. a) Soit M un point de la droite $D(C, \vec{u})$ et notons $M' = f(M)$ et $C' = f(C)$. On a

$$\vec{C'M'} = \vec{C'A} + \vec{AM'} = \vec{AB} \wedge (\vec{CA} + \vec{AM}) = \vec{AB} \wedge \vec{CM}$$

et $M \in D(C, \vec{u})$ entraîne l'existence de α tel que $\vec{CM} = \alpha \vec{u}$. D'où $\vec{C'M'} = \alpha \vec{u'}$ avec $\vec{u'} = \vec{AB} \wedge \vec{u}$. Par conséquent, l'image de $D(C, \vec{u})$ est la droite $D(C', \vec{u'})$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont orthogonaux, on déduit que les droites $D(C, \vec{u})$ et $D(C', \vec{u'})$ sont perpendiculaires

b) Soit $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$, on a $\vec{AM'} = \vec{AB} \wedge \vec{AM}$ et

$$\vec{AM''} = \vec{AB} \wedge \vec{AM'} = \vec{AB} \wedge (\vec{AB} \wedge \vec{AM}).$$

M'' est dans le plan $P(A, \vec{AB}, \vec{AM})$. Le vecteur $\vec{AM''}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et sa norme est $\|\vec{AM''}\| = \|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AM}\| |\sin(\vec{AB}, \vec{AM})|$.

En définitive, le point $M'' = f \circ f(M)$ est sur le plan $P(A, \vec{AB}, \vec{AM})$, de plus $\vec{AM''} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\|\vec{AM''}\| = \|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AM}\| |\sin(\vec{AB}, \vec{AM})|$.

De même pour $M^{(3)} = f(M'')$, on a $\vec{AM^{(3)}} = \vec{AB} \wedge \vec{AM''}$ et le point $M^{(3)}$ est sur la normal au plan $P(A, \vec{AB}, \vec{AM})$ et tel que $\|\vec{AM^{(3)}}\| = \|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AM}\| |\sin(\vec{AB}, \vec{AM})|$.

Exercice 13: Soit Ω un point du plan affine $\mathcal{P}$, k un réel strictement positif et f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ définie par

$$m \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \longrightarrow f(m) = M \quad \text{tel que} \quad \vec{\Omega M} = \frac{k}{\|\vec{\Omega m}\|^2} \vec{\Omega m}.$$

1) Etablir que f est une application involutive, c'est à dire $f \circ f = \text{id}$.

2) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Montrer que f partage $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ en trois régions A_1, A_2, A_3 telles que $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_3$ et $f(A_3) = A_2$.

3) On considère $\mathcal{P}$ comme le plan complexe et on désigne par α, z, Z les affixes respectives de Ω, m, M . Montrer que

$$M = f(m) \iff Z = \alpha + \frac{k}{z - \alpha}. \quad \text{On pose} \quad f(z) = \alpha + \frac{k}{z - \alpha}, \quad \text{retrouver les résultats de 1)}$$

et de 2).

Rep.

1) Montrons que f est involutive (c'est à dire $f \circ f(M) = M$). Soit $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$. On a $\vec{\Omega M''} = \frac{k}{\|\vec{\Omega M'}\|^2} \vec{\Omega M'}$ et $\vec{\Omega M'} = \frac{k}{\|\vec{\Omega M}\|^2} \vec{\Omega M}$. Ce qui donne

$$\vec{\Omega M''} = \frac{k}{k^2} \|\vec{\Omega M}\|^2 \frac{k}{\|\vec{\Omega M}\|^2} \vec{\Omega M} = \vec{\Omega M}$$

On a bien $f \circ f(M) = M$.

2) Un point M est invariant par f si $f(M) = M$, ce qui est équivalent à $\vec{\Omega M} = \frac{k}{\|\vec{\Omega M}\|^2} \vec{\Omega M}$, ou encore $\|\vec{\Omega M}\|^2 = k$. L'ensemble des points invariants par f est donc le cercle $C(\Omega, \sqrt{k})$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$. Soit

$$A_1 = C(\Omega, \sqrt{k}) = \{M \in \mathcal{P} : \|\vec{\Omega M}\|^2 = k\}$$

$$A_2 = \{M \in P : \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 < k\}$$

$$A_3 = \{M \in P : \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 > k\}$$

Déterminons $f(A_2)$. Pour $M \in A_2$ et $M' = f(M)$, on a $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2} \overrightarrow{\Omega M} > k$. Donc $f(M) \in A_3$ et on a $f(A_2) \subset A_3$. Comme f est involutive on déduit que $A_2 = f \circ f(A_2) \subset f(A_3)$. On montre de même que $f(A_3) \subset A_2$ et $A_3 = f \circ f(A_3) \subset f(A_2)$. Finalement

$$f(A_1) = A_1 \quad f(A_2) = A_3 \quad f(A_3) = A_2.$$

3) On a $M = f(m) \iff \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega m}\|^2} \overrightarrow{\Omega m}$. Dans le plan complexe cela s'écrit $Z - \alpha = \frac{k}{(z - \alpha)(\overline{z - \alpha})}(z - \alpha)$, soit $Z = \alpha + \frac{k}{\overline{z - \alpha}}$.

Posons $Z = f(z)$, on a $f^2(z) = f(Z) = \alpha + \frac{k}{\overline{Z - \alpha}}$. Comme $\overline{Z - \alpha} = \frac{k}{z - \alpha}$, on a $f^2(z) = \alpha + z - \alpha = z$.

$$\begin{aligned} f(z) = z &\iff \alpha + \frac{k}{\overline{z - \alpha}} = z \\ &\iff z - \alpha = \frac{k}{\overline{z - \alpha}} \\ &\iff |z - \alpha|^2 = k \\ &\iff z \in C(\Omega, \sqrt{k}) \end{aligned}$$

Les autres assertions s'obtiennent de la même manière.

Fonctions vectorielles

Exercice 1. Donner la nature des courbes suivantes

$$2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 3x + 3y + 1 = 0$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$$

$$(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$$

Exercice 2 Montrer que pour qu'un vecteur dérivable $\vec{V}(t)$ garde un module constant, il faut et il suffit que $\vec{V}(t)$ et $\vec{V}'(t)$ soient orthogonaux. Pour qu'un vecteur dérivable $\vec{V}(t)$ garde une direction invariante, il faut et il suffit que $\vec{V}(t)$ et $\vec{V}'(t)$ soient colinéaires.

Rep. Soit $\vec{V}(t)$ un vecteur dérivable de module constant $\|\vec{V}(t)\| = c$. On aura $\vec{V}(t) \cdot \vec{V}(t) = \|\vec{V}(t)\|^2 = c^2$, ce qui entraîne que $(\vec{V}(t) \cdot \vec{V}(t))' = 0$ et donc que $2(\vec{V}(t))' \cdot \vec{V}(t) = 0$. Finalement $\vec{V}(t)$ et $\vec{V}'(t)$ soient orthogonaux. La réciproque s'obtient de la même manière.

Pour la réciproque, remarquons que $\vec{V}(t)$ que garde une direction constante si et seulement si le vecteur $\frac{\vec{V}(t)}{\|\vec{V}(t)\|}$ est constant, ce qui équivaut à $(\frac{\vec{V}(t)}{\|\vec{V}(t)\|})' = 0$. On calcule cette dérivée, $\frac{(\vec{V}(t))' \|\vec{V}(t)\| - \vec{V}(t) 2 \frac{(\vec{V}(t)) \cdot (\vec{V}(t))'}{\|\vec{V}(t)\|}}{\|\vec{V}(t)\|^2}$ qu'est nul lorsqu'on suppose que $\vec{V}(t)$ et $\vec{V}'(t)$ sont colinéaires $\alpha(t)(\vec{V}(t))' = \vec{V}'(t)$.

Exercice 3

Dans l'espace affine E_3 rapporté à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit P le plan d'équation $x - 2y - 3z = 0$. On se donne le vecteur

$\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ et on définit l'application $p: E_3 \rightarrow P$ par $p(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

1) Donner une interprétation géométrique de p .

2) Donner une représentation paramétrique de $C' = p(C)$, où C est l'ensemble des points M de E_3 de coordonnées $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. Soit D la tangente à C au point A correspondant à $t = 1$. Vérifier que $p(D)$ est la tangente à C' au point correspondant à $t = 1$.

Rep. 1) On a $\vec{u}$ est orthogonal au plan P et $\overrightarrow{MM'} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ entraîne que $\overrightarrow{MM'}$ est aussi orthogonal à P . Puis que en plus $M' \in P$, on déduit que c'est la projection orthogonal de M sur P .

2) Soit $M(t, t^2, t^3) \in C$ et $M'(x, y, z)$ son image, il existe λ réel tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{u}$. Ce qui donne $x - t = -\lambda$, $y - t^2 = 2\lambda$ et $z - t^3 = 3\lambda$ et par suite $x = t - \lambda$, $y = t^2 + 2\lambda$ et $z = t^3 + 3\lambda$. Du fait que $M' \in P$, on tire que $t - 2t^2 - 3t^3 = 14\lambda$

Exercice 4

Montrer que la torsion $\tau(t)$ en un point d'une courbe définie par une fonction vectorielle $F(t)$ est donnée par la formule

$$\tau(t) = -\frac{(F'(t), F''(t), F'''(t))}{\|F'(t) \wedge F''(t)\|^2}. \quad \text{On peut procéder comme suit :}$$

- i) Calculer $F''(t)$. ii) Montrer que $\overrightarrow{N'(t)} \cdot \overrightarrow{T(t)} + v(t)c(t) = 0$ et $\overrightarrow{N'(t)} \cdot \overrightarrow{B(t)} + \tau v(t) = 0$, où $v(t) = \|F'(t)\|$
iii) Calculer $\overrightarrow{N'(t)}$ et déduire la formule du calcul du produit mixte

$$(F'(t), F''(t), F'''(t)).$$

Exercice 5

Déterminer la courbure, le rayon de courbure, le centre de courbure et la torsion en un point quelconque M de chacune des courbes suivantes

$$F(t) = (3t^2, t^3 - 3t, t^3 + 3t). \quad \text{Application à } t = 1.$$

$$G(t) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta, a \cos 2\theta)$$

Exercice 6 Soit la portion de courbe (C) $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$. Déterminer l'équation de la surface de révolution obtenue par rotation de (C) autour de la droite d'équations $y = 3$, $z = 0$. (On peut effectuer le changement de variable $u = y - 3$).

Exercice 7

Soit (S) la surface d'équation $x \sin \frac{z}{a} - y \cos \frac{z}{a} = 0$. Donner une représentation paramétrique de (S) . Trouver le lieu des points de (S) en lesquels le plan tangent passe par un point donné $A(a, 0, 0)$.

Exercice 8

Soit la courbe (C) dont une représentation paramétrique est $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$

- 1) Déterminer la surface engendrée par cette courbe en tournant autour de l'axe Oz .
- 2) Calculer la courbure et le rayon de courbure en un point de (C) pour lequel $t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- 3) Déterminer les coordonnées du centre de courbure en un tel point ainsi que le trièdre de Frenet en ce point.
- 4) Quel est le lieu du centre de courbure lorsque (C) tourne autour de Oz ?

Exercice 9

Soit (S) la surface de représentation paramétrique

$$x(u, v) = 1 + u \cos v, \quad y(u, v) = 1 + u \sin v, \quad z(u, v) = u^2 \cos 2v.$$

- 1) Vérifier que les points $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 0)$ appartiennent à (S) .
- 2) Calculer $(x - 1)^2 - (y - 1)^2$ pour donner l'équation cartésienne de (S) . Nature de (S) .
- 3) Donner l'équation du plan tangent à (S) en un point (x_0, y_0, z_0) de (S) .
- 4) Déterminer le lieu des points $M(x_0, y_0, z_0)$ de (S) tels que le plan tangent en $M(x_0, y_0, z_0)$ passe par l'origine.
- 5) Vérifier que ce lieu est une courbe plane (C) qui est l'intersection de (S) avec le plan (P) d'équation $2x_0 + 2y_0 + 2z_0 = 0$.
- 6) Quel est le plan osculateur à (C) en l'un quelconque de ses points?
- 7) Donner une représentation paramétrique de (C) . (On pourra la déduire de celle de (S) à l'aide de l'équation de (P)). Identifier (C) .

Exercice 10

Soit $a > 0$. 1) Montrer qu'un plan contient la droite (D_1) :

$z = 2a$, $y = 0$ si et seulement s'il existe tel que son équation cartésienne se mette sous la forme $y = \alpha(z - 2a)$. Montrer de même qu'un plan contient la droite (D_2) : $z = -2a$, $x = 0$ si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que son équation cartésienne se mette sous la forme $x = \beta(z + 2a)$.

2) Donner l'équation cartésienne de la droite $(\Delta_{\alpha, \beta})$ intersection d'un plan passant par (D_1) et d'un plan passant par (D_2) . Vérifier que les points de coordonnées $(0, -4a\alpha, -2a)$ et $(4a\beta, 0, 2a)$ appartiennent à $(\Delta_{\alpha, \beta})$ et donner les équations paramétriques de $(\Delta_{\alpha, \beta})$.

3) Donner l'équation de la surface (S) engendrée par la droite s'appuyant sur les droites (D_1) et (D_2) et sur le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$.

4) Quelle est la nature des sections de (S) par les plans $z = h$, $h \in \mathbb{R}$

Exercice 11

1) Vérifier que la courbe (C) : $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^3$, est sur la surface (Σ) d'équations paramétriques

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3.$$

2) Montrer que $(C) = \{M(u, v) \in (\Sigma) \mid u = v\}$
 $= \left\{ M(u, v) \in (\Sigma) \mid \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ et } \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \text{ sont colinéaires} \right\}$.

3) Donner un vecteur normal au plan osculateur de (C) en un point courant $M(t)$, équation cartésienne de ce plan. Quel est ce plan pour $t = 0$ et $t = 1$? Déterminer les paramètres u et v correspondants à $t = 0$ et à $t = 1$.

4) Donner l'équation du plan tangent à (Σ) en un point $M(u)$ en lequel $v = -u$, $u \neq 0$. Vérifier que tous ces plans contiennent l'axe Oy .

Exercice 12

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de classe C^2 définie dans un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On pose $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$. Soit la surface (S) d'équation $z = \varphi(x, y)$, $M = M(x, y)$ le point de (S) de coordonnées (x, y, z) et $P = P(x, y)$ la projection orthogonale de l'origine O sur le plan tangent à (S) en M . On note (Σ) l'ensemble des points P lorsque M décrit (S) .

1) Donner l'équation du plan tangent à (S) en un point $M(x, y)$.

2) Calculer les coordonnées X, Y, Z de P en fonction de x, y, z, p, q .

3) Montrer que (Σ) admet une représentation paramétrique définie par la fonction vectorielle $\vec{F}(x, y) = f(x, y) \left[p \vec{i} + q \vec{j} - \vec{k} \right]$, les paramètres x, y variant dans le domaine D et $f(x, y)$ une fonction à déterminer.

4) On suppose que (S) est le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = \varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Exprimer dans ce cas X, Y et Z puis montrer que (Σ) a pour équation cartésienne $2Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + X^2 - Y^2 = 0$. Montrer que si (Σ) admet au point P un plan tangent, la normale à (Σ) en ce point est la droite (PI) où I est le milieu du segment OM .

Examen 2005/2006

Université Mohammed V-Agdal
 Faculté des sciences Mathématiques
 Contrôle final de Calcul Vectoriel

Semestre 1 ; 2005 -2006
 SM - SMI
 Durée : 1 H 30mn

Exercice 1 Donner la forme canonique de la conique suivante, puis la reconnaître :

$$3\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + 2\sqrt{3}\mathbf{xy} + 7\mathbf{x} + \sqrt{3}\mathbf{y} + 2 = 0$$

On rappelle les formules de changement de coordonnées par rotation d'angle θ qui lient les anciennes coordonnées (x, y) aux nouvelles (X, Y) :

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta, y = X \sin \theta + Y \cos \theta$$

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta, Y = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Exercice 2 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les trois points de l'espace $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$; $C(0, 0, 1)$ et G le barycentre du système $\{A(1), B(1), C(2)\}$.

- 1) Déterminer les coordonnées de G et montrer qu'il est dans le plan défini par les points A, B, C .
- 2) Soit a un réel non nul et le point K tel que $\vec{OK} = a\vec{OG}$
- i) Donner en fonction de a , les composantes d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $(\mathcal{P}_1)$ déterminé par les points A, C, K , et celles d'un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan $(\mathcal{P}_2)$ déterminé par les points B, C, K .
- ii) Dédire la condition sur a pour que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ soient orthogonaux. Déterminer a pour qu'il en soit ainsi.

Exercice 3 Soit $(\mathcal{S})$ la surface de représentation paramétrique

$$x = u \cos v; y = u \sin v; z = \frac{1}{2}u^2 \cos 2v$$

- 1) Calculer $x^2 - y^2$ et donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{S})$.
- 2) Donner un vecteur normal à $(\mathcal{S})$ en un point quelconque $M(x_0, y_0, z_0)$ de $(\mathcal{S})$. Donner l'équation cartésienne du plan tangent à $(\mathcal{S})$ au point $M(x_0, y_0, z_0)$.
- 3) Montrer que l'ensemble des points $M(x_0, y_0, z_0)$ de $(\mathcal{S})$ en lesquels le plan tangent passe par le point $A(1, 1, 1)$ est l'intersection de $(\mathcal{S})$ et du plan d'équation $x_0 + y_0 - z_0 - 1 = 0$.
- 4) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ d'équations paramétriques
 $x = \cos t; y = \sin t; z = \frac{1}{2} \cos 2t$
 est contenue dans $(\mathcal{S})$