Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

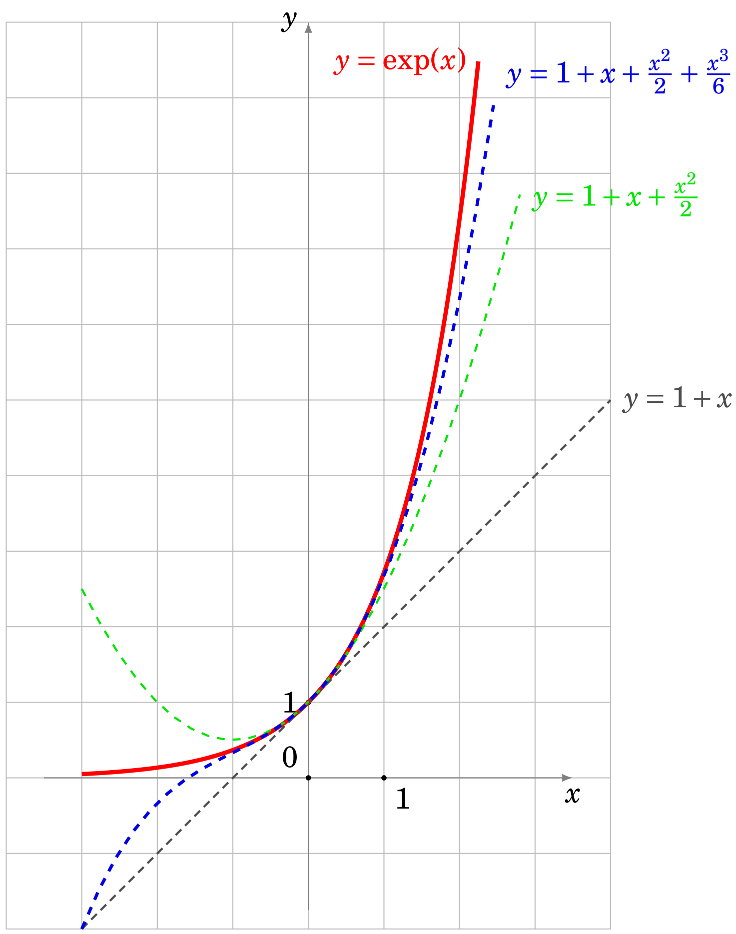
Cours d'Analyse 3, Chapitre I.

B. Bouya & A. Hanine

Chapitre 1

Formule de Taylor et applications

Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit I un intervalle ouvert contenant x_0. Considérons une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0. Nous savons très bien que le graphe $\mathscr{C}(f)$ de f admet une droite tangente au point x_0, dont l'équation est un polynôme de degré 1. Nous voulons maintenant faire mieux, nous nous demandons alors si c'est possible d'approcher $\mathscr{C}(f)$ au voisinage de x_0 par, cette fois, un parabole, autrement dit par un graphe d'un polynôme de degré 2 ! La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor, permet en effet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme de degré assez grand que nous souhaitons. La figure suivante illustre le cas de la fonction exponentielle au voisinage de 0.



1. Dérivées successives

Dans toute la suite, nous désignons par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et par $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^0$ sur I si tout simplement elle est continue sur I, dans ce cas nous écrivons $f \in \mathscr{C}^0(I)$. L'ensemble de toutes les fonctions réelles qui sont continue sur I est noté par $\mathscr{C}^0(I)$.

1.1. Les classes $\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$.

On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I, dans ce cas nous écrivons $f \in \mathscr{C}^1(I)$. Si de plus f' est dérivable sur I, on dit alors que f est deux fois dérivable sur I. La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f et est souvent notée par f'' ou $f^{(2)}$. Plus généralement, pour $n \geqslant 2$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable et que la $(n-1)^{ième}$ dérivée, notée par $f^{(n-1)}$, est aussi dérivable, nous avons

$$f' = f^{(1)}, \quad \left(f^{(1)}\right)' = f^{(2)}, \quad \cdots \quad, \left(f^{(n)}\right)' = f^{(n+1)}.$$

On peut aussi utiliser la notation classique suivante

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x), \qquad x \in I.$$

Définition 1

Soit n un entier naturel. La classe $\mathscr{C}^n(I)$ est l'ensemble de toutes les fonctions n fois dérivable sur I et dont les $n^{ième}$ dérivées sont toutes continues sur I.

(a) Une fonction f de l'ensemble $\mathscr{C}^n(I)$ est dite de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.

(b) Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. La classe $\mathscr{C}^\infty(I)$ est donc c'est l'ensemble des fonctions admettant des dérivées supérieurs de tout ordre.

D'après cette définition, nous déduisons que,

$$\mathscr{C}^0(I) \supset \mathscr{C}^1(I) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(I),$$

et que

$$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I).$$

Exemples :

- Les polynômes sont de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
- Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
- La fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & si & x = 0. \end{cases}$$

  est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

1.2. Opérations élémentaires sur les dérivées.

Soit f et g deux fonctions réelles définie sur I, nous pouvons montrer facilement par récurrence la propriété suivante.

Propriété 1

Si f et g sont n fois dérivable sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$ et λf sont n fois dérivable sur I et

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

Nous déduisons alors que la classe $\mathscr{C}^n(I)$ est un espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La formule de Leibniz

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors leur produit fg est aussi n fois dérivable sur I, et on a la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

où les nombres entiers $\binom{n}{i}$ sont les coefficients binômiaux :

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Démonstration de la formule de Leibniz. On considère l'hypothèse de récurrence suivante ;

$\mathscr{H}_n$: Si f et g sont deux fonctions dérivables à l'ordre n sur I, alors le produit fg est aussi dérivable à l'ordre n sur I et on a $(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$.

L'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_n$, pour $n = 1$, provient du simple fait que le produit de deux fonctions dérivable est aussi dérivable et de plus

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Fixons maintenant un entier naturel $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathscr{H}_n$ est vérifiée. Soient f et g deux fonctions dérivables à l'ordre $n+1$ sur I. D'après notre supposition, f et g sont donc dérivables à l'ordre n sur I, ainsi que leur produit et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Les fonctions f^i et g^{n-i} pour $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ sont dérivables (car f et g sont $n+1$ fois dérivables) donc $(fg)^{(n)}$ est dérivable. Par conséquent le produit fg est aussi $n+1$ fois dérivable. Nous rappelons la formule suivante, dite du triangle de Pascal,

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(f^{(i)}g^{(n-i)}\right)' = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(f^{(i+1)}g^{(n-i)}+f^{(i)}g^{(n+1-i)}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i+1)}g^{(n-i)}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n+1-i)}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}f^{(i)}g^{(n+1-i)}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n+1-i)}\\ &= f^{(n+1)}g+fg^{(n+1)}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]f^{(i)}g^{(n+1-i)}\\ &= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}f^{(i)}g^{(n+1-i)}.\end{aligned}$$

Ceci entraine que l'hypothèse $\mathscr{H}_{n+1}$ est satisfaite. Ainsi, la formule de Leibniz est démontée.

Nous terminons cette section par la proposition suivante, que nous pouvons déduire à partir de la propriété 1 et de la formule de Leibniz.

Proposition 1

L'ensemble $\mathscr{C}^n(I)$, où $n \in \mathbb{N}$, muni de l'addition et de la multiplication habituelle des fonctions, est une algèbre.

Exercice. Montrer qu'une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I)$ est inversible dans l'algèbre $\mathscr{C}^n(I)$ si et seulement si elle ne s'annule pas sur I.

2. Fonctions convexes

Tout d'abord, on cherchera à se familiariser avec la notion de la convexité, et ensuite nous allons établir le lien avec les fonctions dérivables. Rappelons que pour tous points $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$

$$\begin{aligned}[a,b] &= \{(1-\lambda)a+\lambda b \ : \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{\lambda a+(1-\lambda)b \ : \ \lambda \in [0,1]\}\\ &= \{\lambda_1 a+\lambda_2 b \ : \ \lambda_1,\lambda_2 \in [0,1] \text{ et } \lambda_1+\lambda_2=1\}.\end{aligned}$$

Définition 2

On dit que f est convexe sur I si pour tous points $x, y \in I$ et tout scalaire $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

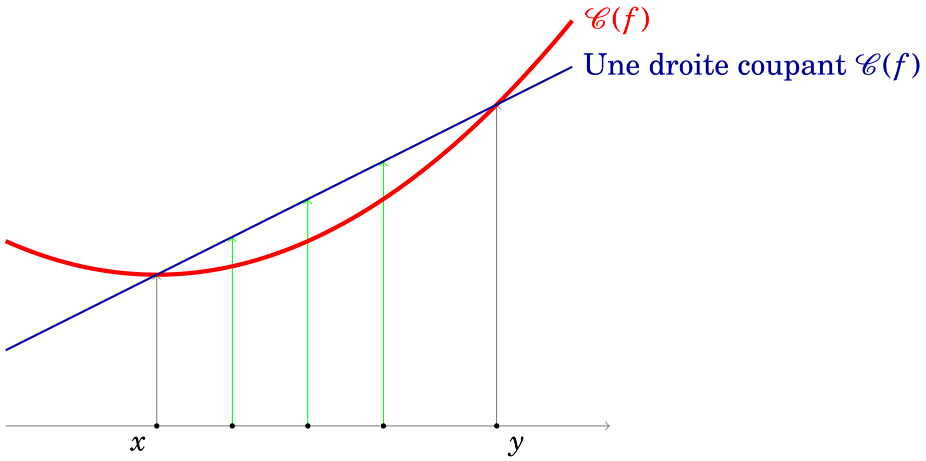
On dit aussi que f est concave si $-f$ est convexe.

Autrement dit, la fonction f est convexe si l'image du barycentre est plus petite que le barycentre des images. Notons aussi que dans la définition de la convexité, nous n'avons pas supposer que la fonction f est continue.

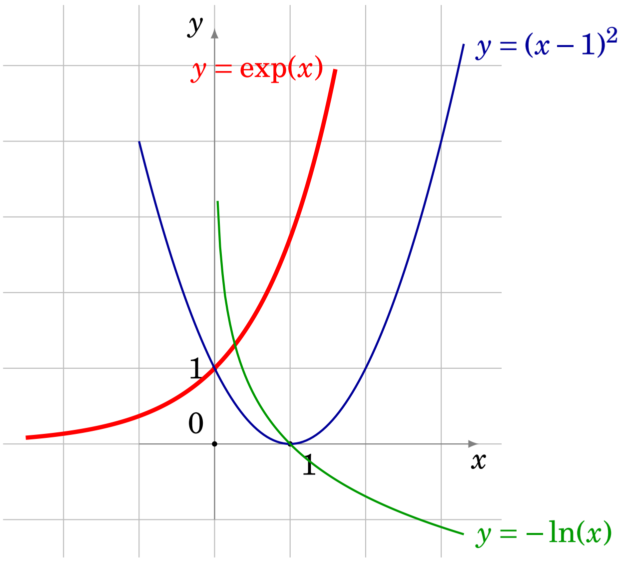
Exercices. Soit f une fonction réelle et convexe sur I.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous points $x, y \in I$ et tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \leqslant \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(y).$$
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^0(I)$.

Interprétation géométrique de la convexité. La figure suivante représente une courbe convexe $\mathscr{C}(f)$ d'une fonction réelle f coupée par une droite en deux points d'abscisses x et y. L'image par f d'un point entre x et y est toujours plus petite que son image par la droite.



Exemples de fonctions convexes.



2.1. L'inégalité de Jensen

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si pour tous points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ et tous scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \tag{1.1}$$

où $n \geqslant 1$ est un entier naturel, c'est l'inégalité de Jensen.

Exercice. Montrer par récurrence (1.1).

Démonstration. Pour $n = 1$, l'inégalité de Jensen est trivial, sans même supposer la convexité de f. Pour $n \geqslant 2$, nous allons la montrer par récurrence. Remarquons que pour $n = 2$, l'inégalité (1.1) n'est autre que la définition de la convexité. Supposons maintenant que (1.1) est bien réalisé pour un entier fixe $n \geqslant 2$, et montrons la pour $n+1$. Pour cela, on considère des points $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in I$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i = 1$. Dans le cas où $\lambda_{n+1} = 0$, on en déduit le résultat trivialement de notre hypothèse de récurrence. Dans le cas où $\lambda_{n+1} \neq 0$, il est claire que

$$\alpha_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \neq 0$$

On pose

$$X_n = \frac{\lambda_n}{\alpha_n} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} x_{n+1}.$$

Puisque

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n} + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} = 1,$$

donc $X_n \in I$ et d'après notre hypothèse de récurrence

$$f(X_n) \leqslant \frac{\lambda_n}{\alpha_n} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\alpha_n} f(x_{n+1}). \tag{1.2}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \alpha_n X_n. \end{aligned}$$

Maintenant, nous appliquons encore une fois notre hypothèse de récurrence au points $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, X_n \in I$ et aux scalaires $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_{n-1}, \alpha_n \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \alpha_n X_n\right) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(x_i) + \alpha_n f(X_n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Les inégalités (1.2) et (1.3) nous donne

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Ceci termine la démonstration de l'inégalité de Jensen.

2.2. Critères de convexité

Nous commençons par la propriété suivante.

Propriété 2 : Critère de la pente croissante.

La fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tout point $z \in I$, la fonction ϕ_z définie par

$$\phi_z(x) = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}, \qquad x \in I \setminus \{z\}, \tag{1.4}$$

est croissante.

Démonstration. Pour montrer que ϕ_z est croissante, nous prenons deux points $x, y \in I \setminus \{z\}$ tels que $x < y$ et nous considérons les trois cas suivants

$$x < z < y, \qquad x < y < z \qquad \text{et} \qquad z < x < y.$$

Pour chaque cas, la démonstration se déduit facilement du fait que pour tous points $a, b, c \in I$ tels que $a < c < b$, l'inégalité suivante

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

est satisfaite si et seulement si

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b).$$

Nous allons maintenant se servir de la propriété 2 pour démontrer la propriété suivante.

Propriété 3 : Critère de la dérivée.

Supposons que la fonction f est dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.

Démonstration. Soit $y \in I$. Puisque f est dérivable, on peut calculer que

$$\phi_y'(x) = \frac{f'(x)(x-y) - (f(x)-f(y))}{(x-y)^2}, \qquad x \in I \setminus \{y\}.$$

Pour que $\phi_y' \geqslant 0$ il est nécessaire et suffisant que

$$f'(x)(x-y) - (f(x)-f(y)) \geqslant 0, \qquad x \in I \setminus \{y\}.$$

Ceci veut dire que lorsque $x < y$

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

et lorsque $y < x$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'(x).$$

Par conséquent, la fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tous points $x, y \in I$ vérifiant $x < y$, on a

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y). \tag{1.5}$$

Le résultat de la propriété 3, se déduit de (1.5) et du théorème d'accroissements finis.

Proposition 2 : Critère de la dérivée seconde.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I.

Démonstration. Il découle directement de la propriété 3.

2.3. Inégalités de Convexité

Proposition 3 : Convexité et Extremum.

Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I. S'il existe un point $x_0 \in I$ tel que $f'(x_o) = 0$, alors f admet un minimum global en x_o sur I.

Exemples.

1. Pour tous points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

La démonstration repose sur le fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe puisque $f''(x) = 2 \geqslant 0$. Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Jensen pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on obtient alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2,$$

et puis considérer le cas particulier lorsque $\lambda_k = \frac{1}{n}$.

2. Pour tous nombres $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{1.6}$$

Pour montrer l'inégalité (1.6), on peut remarquer d'abord que (1.6) est équivalente à dire que pour tous nombres $a, b, c > 0$ tels que $a + b + c = 1$, on a

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ensuite, on applique la formule de Jensen à la fonction suivante $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$, dont on peut vérifier facilement sa convexité puisqu'il est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition et en particulier $f \in \mathscr{C}^2(]0,1[)$.

Exercice. Montrer que pour tous points $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Autrement dit, la moyenne géométrique et toujours plus petit que la moyenne arithmétique. Pour la démonstration, on peut appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction ln.

3. Formule de Taylor

Comme ce qui précède, nous désignons toujours par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et par $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Nous désignons aussi par n un entier naturel.

3.1. Préliminaire

Nous commençons d'abord par le cas simple d'une fonction polynôme.

Proposition 4

Un polynôme est entièrement déterminé par les valeurs de ses dérivées en un seul point.

Démonstration. Soit P le polynôme de degré n suivant

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Suivez les étapes de l'exercice suivant pour en conclure le résultat de la proposition 4.
Exercice. Fixons un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \qquad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

2. Déduire que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

3. A l'aide d'un changement de variable simple (une translation), montrer que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Définition 3 : Polynôme et Reste de Taylor

Considérons une fonction f de la classe $\mathscr{C}^n(I)$ et fixons un point $x_0 \in I$.

(a) Le polynôme suivant

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \qquad x \in I, \tag{1.7}$$

s'appelle *le polynôme de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0.

(b) La fonction suivante

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x), \qquad x \in I, \tag{1.8}$$

est appelée *le reste de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0.

Exercice. *Polynômes de Taylor pour certaines fonctions usuelles de classe* $\mathscr{C}^\infty$. En calculons les dérivées $n^{ième}$ au point 0, montrer le tableaux suivant.

Fonction	Polynôme de Taylor au point 0
$\exp(x)$	$1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$
$\sin(x)$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\cos(x)$	$1-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1+x+x^2+\cdots+x^n$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n$
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$
$\ln(1-x)$	$-x-\dfrac{x^2}{2}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}$
$\ln(1+x)$	$x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

Définition 4 : Formule de Taylor

Soit f une fonction de la classe $\mathscr{C}^n(I)$ et soit x_0 un point de I. *La formule de Taylor* de f à l'ordre n au point x_0 est la suivante

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \qquad x\in I, \tag{1.9}$$

où P_n et R_n sont respectivement le polynôme et le reste de Taylor.

Dans la suite, nous allons donner différentes expressions de la fonction reste de Taylor R_n.

3.2. Formule de Taylor avec reste intégral

Pour que l'expression de R_n soit sous forme intégrale, dans le théorème suivant nous exigeons plus de régularité sur la fonction f, nous obtenons alors ce qu'on appelle *formule de Taylor avec reste intégral.*

Théorème 1 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Fixons un point $x_0\in I$. Alors

$$f(x)=P_n(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt, \qquad \text{pour tout point } x\in I, \tag{1.10}$$

où P_n représente le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, défini par (1.7).

Exercice. A l'aide d'un changement de variable de type translation, montrer que (1.10) est équivalente à dire que pour tout $h\in I-\{x_0\}$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\int_0^h\frac{f^{(n+1)}(x_0+u)}{n!}(h-u)^n\,du,$$

où $I-\{x_0\}=\{x-x_0\ :\ x\in I\}$.

Exemple. Il est bien connu que la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la dérivée $n^{ième}$ de la fonction exponentielle coïncide avec elle même. Pour un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) + \cdots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, lorsque $x_0 = 0$, nous déduisons la formule de Taylor, avec reste intégral, de la fonction exponentielle au point 0

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Démonstration du Théorème 1. Nous allons montrer par récurrence que

$$f(x) = P_k(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt, \qquad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \cdots, n\}. \tag{1.12}$$

Pour $k = 0$, l'égalité (1.12) devient

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t) dt,$$

ce qui est évident lorsque $f \in \mathscr{C}^1(I)$. Si $n = 0$, alors le théorème est prouvé puisque $f \in \mathscr{C}^1(I)$ d'après les hypothèses. Si $n \geqslant 1$, nous adoptons dans ce cas un raisonnement par récurrence, nous supposons alors que (1.12) est vérifiée pour un certain indice k tel que $0 \leqslant k < n$ et nous montrons la pour $k+1$. Sachant par hypothèse que $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et puisque $k+2 \leqslant n+1$, alors $f \in \mathscr{C}^{k+2}(I)$. Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} dt &= \left[-f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} \right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t) \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} dt \\
&= \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^{x} f^{(k+2)}(t) \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} dt. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

En substituons l'intégral figurant à (1.12) par le terme de la droite de l'égalité (1.13), nous déduisons alors que (1.12) est aussi vérifiée pour l'indice $k+1$ au lieu de k, comme voulu. Ceci termine la démonstration du Théorème 1.

3.3. Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange est appelé aussi la formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$, elle nécessite moins de régularité (sur f) que la formule précédente de Taylor avec reste intégral.

Théorème 2 : Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur I. Fixons un point $x_0 \in I$. Pour tout point $x \in I$, il existe un point c entre x_0 et x (dépendant de x) tel que :

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{1.14}$$

où P_n représente le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, défini par (1.7).

L'expression « c entre x_0 et x » dans le Théorème 2 signifie que $c \in]x_0, x[$ dans le cas où $x_0 < x$ et $c \in]x, x_0[$ dans le cas où $x < x_0$. Lorsque $n = 0$, nous retrouvons exactement le théorème des accroissements finis.

Démonstration. Puisque la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un c entre x_0 et x vérifiant

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0) = f^{(n+1)}(c)(x - x_0)$$

Considérons la fonction φ_n définie sur I par

$$\varphi_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour prouver l'égalité (1.14), il suffit de montrer que

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\varphi_n(x). \tag{1.15}$$

où R_n est la fonction reste du Taylor, défini par (1.8). En calculons la dérivée $n^{ième}$ par rapport à la variable x, nous obtenons pour R_n

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$$

et pour φ_n

$$\varphi_n^{(n)}(x) = (x - x_0).$$

Par conséquent

$$R_n^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(c)\varphi_n^{(n)}(x), \qquad x \in I. \tag{1.16}$$

Fixons un entier $k \in \{1, \cdots, n\}$. Remarquons que

$$R_n^{(k-1)}(x_0) = \varphi_n^{(k-1)}(x_0) = 0. \tag{1.17}$$

Supposons maintenant que

$$R_n^{(k)}(x) = f^{(n+1)}(c)\varphi_n^{(k)}(x), \qquad x \in I. \tag{1.18}$$

En intégrant (1.18)

$$\int_{x_0}^{x} R_n^{(k)}(t)dt = f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x} \varphi_n^{(k)}(t)dt, \tag{1.19}$$

et puis en utilisant (1.17), nous obtenons

$$R_n^{(k-1)}(x) = f^{(n+1)}(c)\varphi_n^{(k-1)}(x), \qquad x \in I. \tag{1.20}$$

Ainsi, nous avions montrer par récurrence que (1.16) implique (1.15). Ce qui termine la preuve du Théorème 2.

Exemple. Reprenons l'exemple précédent (1.11) de la fonction exponentielle. Une simple application du Théorème 2 à cette fonction au point 0 nous donne

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp c}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où c est un point entre 0 et x.
Dans le but de savoir à quelle degré le polynôme P_n est proche de la fonction f au point x_0, nous avons besoin d'estimer le reste de Taylor. La formule de Taylor-Lagrange nous dit que pour estimer le reste de Taylor d'ordre n d'une fonction f au point x_0, il suffit de connaitre la dérivée $(n+1)^{ième}$ de f au voisinage de x_0. Le corollaire suivant nous donne un résultat de ce genre.

Corollaire 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur I. Supposons de plus que

$$\sup_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)| = M < \infty.$$

Fixons un point $x_0 \in I$, alors

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \forall x \in I. \tag{1.21}$$

L'inégalité (1.21) est une estimation de la fonction R_n, le reste de Taylor défini par (1.8).
Exercice. Pouvons-nous utiliser le Théorème 1.10 pour déduire l'inégalité (1.21) ?
Application. *Approximation de la valeur de la fonction* sin *au point* 0,01. Nous avons

$$\sin'(x) = \cos x, \qquad \sin''(x) = -\sin x, \qquad \sin^{(3)}(x) = -\cos x \qquad \text{et} \qquad \sin^{(4)}(x) = \sin x.$$

Donc

$$\sin(0) = 0, \qquad \sin'(0) = 1, \qquad \sin''(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin^{(3)}(0) = -1.$$

Appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction sin au point 0 à l'ordre 3, nous obtenons

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(c)}{4!}x^4, \qquad x \in \mathbb{R},$$

pour un certain point c entre 0 et x. Par conséquent

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| \leqslant \frac{x^4}{4!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le cas particulier où $x = 0,01$, nous déduisons

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!}\right)\right| \leqslant \frac{10^{-8}}{4!}.$$

Par conséquent

$$\left|\sin(0,01) - \left(0,01 - \frac{(0,01)^3}{3!}\right)\right| \leqslant 10^{-9}.$$

On dit alors que la valeur $p = 0,01 - \dfrac{(0,01)^3}{3!}$ est une valeur approché de $\sin(0,01)$ à 10^{-9} prés. Ainsi notre approximation p de $\sin(0,01)$ donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

3.4. Formule de Taylor-Young

Théorème 3 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $x_0 \in I$. Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = P_n(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

où ε est une fonction définie sur I, et telle que

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Démonstration. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$. Pour tout $x \in I$, il existe $c = c(x)$ compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-x_0)^n,$$

où P_{n-1} est le polynôme de Taylor de f à l'ordre $n-1$ au point x_0. Donc

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

où

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Puisque $f^{(n)}$ est continue et que $c(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$ alors $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, et ainsi le théorème 3 est prouvé.

3.5. Exemple.

Nous allons calculer les polynômes de Taylor au point 0 pour la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad x > -1.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Nous avons

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad \text{et} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Il est facile de montrer par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

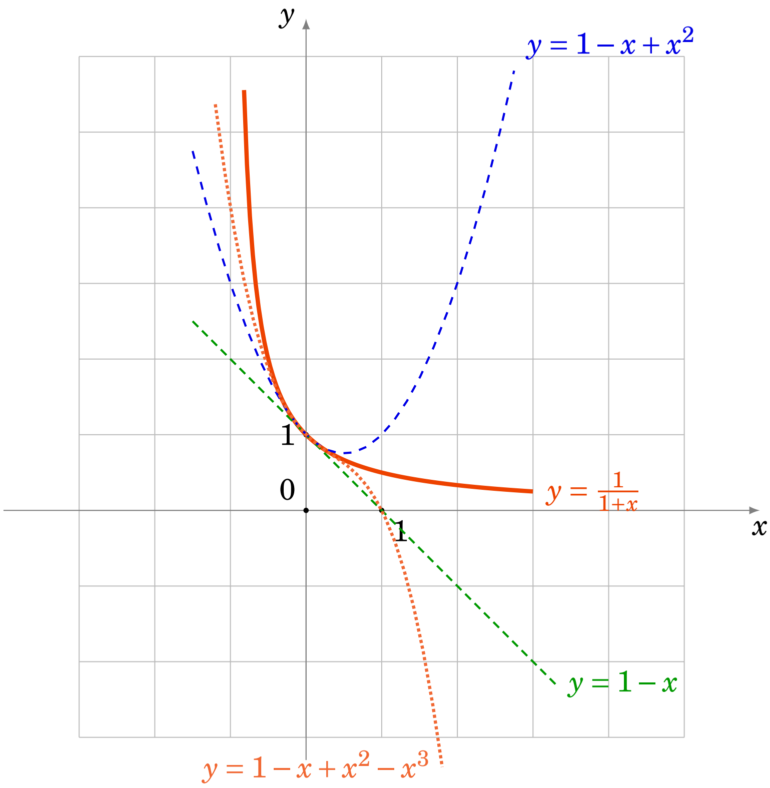
Par conséquent

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Voici donc les trois premiers polynômes de Taylor de f au point 0 :

$$P_1(x) = 1 - x, \qquad P_2(x) = 1 - x + x^2, \qquad \text{et} \qquad P_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

Sur la figure, les graphes des polynômes P_1, P_2 et P_3 s'approchent de plus en plus au graphe de f au voisinage de 0.



4. Résumé du Chapitre I

4.1. Fonctions convexes

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe, où $I =]a, b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- **Inégalité de Jensen.** Pour tous points $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ et tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i = 1$, l'inégalité de Jensen suivante

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

  est satisfaite, où $n \geqslant 1$ est un entier naturel.
- **Le cas d'une fonction convexe et dérivable.** La fonction f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I. S'il existe un point $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$, alors x_0 est un minimum global pour f, ceci veut dire que

$$f(x) \geqslant f(x_0), \qquad \forall x \in I.$$

- **Le cas d'une fonction convexe et deux fois dérivable.** La fonction f est convexe si et seulement si $f^{(2)} \geqslant 0$.

4.2. Formule de Taylor

Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^n(I)$, nous avons les formules suivantes.

- **Formule de Taylor avec reste intégral.** Si $f^{(n)} \in \mathscr{C}^1(I)$, alors pour tous points $a, b \in I$,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt.$$

- **Formule de Taylor-Lagrange.** Si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, alors pour tous points $a, b \in I$, il existe un point c, entre a et b, vérifiant

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

- **Majoration de la fonction reste de Taylor.** Si $f^{(n)}$ est dérivable sur I, et telle que

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\{|f^{(n+1)}(t)|\right\} = M < \infty,$$

alors, pour tous points $a, b \in I$,

$$\left| f(b) - \left(f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right) \right| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- **Formule de Taylor-Young.** Soit $x_0 \in I$, alors il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

et vérifiant

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0))}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x),$$

pour tout x dans I.

- **Polynômes de Taylor pour certaines fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$.**

Fonction	Polynôme de Taylor au point 0
$\exp(x)$	$1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$