Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Printemps 2017

Cours d'Analyse 3, Chapitre II.

B. Bouya & A. Hanine

Développements limités et applications

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à approcher localement une fonction réelle quelconque par des polynômes. Tout d'abord, nous commençons par un préliminaire simple, mais très utile, sur différentes façons de comparer localement une fonction au voisinage d'un point.

1. Relations de comparaison

Soit I un intervalle ouvert et soit x_0 un point de I. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

1.1. La relation grand O

Définition 1

On écrit "$f = O_{x_0}(g)$" ou "$f = O(g)$ au voisinage de x_0" et on dit que f est un "*grand* O" de g au voisinage de x_0 s'il existe un réel $M > 0$ et un intervalle ouvert $J \subseteq I$, contenant x_0, tel que

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|, \qquad \forall x \in J \setminus \{x_0\}.$$

On dit aussi que f est dominée par g au voisinage de x_0.

Lorsque la fraction $\frac{f}{g}$ est bien définie sur $I \setminus \{x_0\}$, alors dire que $f = O_{x_0}(g)$ signifie qu'il existe un intervalle ouvert $J \subseteq I$, contenant x_0, tel que

$$\sup_{x \in J \setminus \{x_0\}} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Exemple. Nous avons $x^\alpha = O(x^\beta)$ au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha \geqslant \beta$.

1.2. La relation petit o

Définition 2

On écrit "$f = o_{x_0}(g)$" ou "$f = o(g)$ au voisinage de x_0" et on dit que f est un "*petit* o" de g au voisinage de x_0, s'il existe un intervalle ouvert $J \subseteq I$, contenant x_0, et une fonction $\varepsilon : J \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x), \qquad \forall x \in J \setminus \{x_0\},$$

et telle que

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit aussi que f est négligeable devant g au voisinage de x_0.

De même, lorsque la fraction $\frac{f}{g}$ est bien définie sur $I\setminus\{x_0\}$, alors dire que $f = o_{x_0}(g)$ signifie tout simplement que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple. Nous avons $x^\alpha = o(x^\beta)$ au voisinage de 0 si et seulement si $\alpha > \beta$.

1.3. La relation d'équivalence $\asymp$

Définition 3

On écrit $f \underset{x_0}{\asymp} g$ et on dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si

$$f - g = o(g), \qquad \text{au voisinage de } x_0.$$

Exercice. Supposons que la fraction $\frac{f}{g}$ est bien définie sur $I\setminus\{x_0\}$. Alors $f \underset{x_0}{\asymp} g$ si et seulement si une des assertions suivantes est satisfaite

(a)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

(b)

$$\frac{f}{g} - 1 = o_{x_0}(1).$$

(c)

$$\frac{f}{g} \underset{x_0}{\asymp} 1.$$

2. Développement limité

Soit I un intervalle ouvert et $f : I\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction, où $x_0 \in I$.

Définition 4

On dit que f admet un ***développement limité*** (en abrégé ***DL***) d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe des coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right), \qquad \text{au voisinage de } x_0. \tag{1}$$

Le polynôme

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

est appelé la ***partie polynomiale***, d'ordre n au voisinage de x_0, du DL de f. Le terme $o((x-x_0)^n)$ est appelé le ***reste*** du DL de f, d'ordre n au voisinage x_0. Un développement limité représente donc une approximation locale d'une fonction par un polynôme, nous allons voir que cette approximation est d'autant plus précise que l'ordre du DL est élevé.

Exercice. Montrer que si f admet un DL d'ordre n au voisinage x_0, alors elle en possède aussi un pour tout entier naturel $k \leqslant n$. Supposons maintenant que $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n(I)$ et soit $a \in I$.

(a) Montrer que f admet un DL d'ordre n au voisinage de a.

(b) Montrer que f admet un DL d'ordre n dont le reste est nul si et seulement si f est un polynôme de degré au plus n.

2.1. Unicité

Proposition 1

Si f admet un DL alors ce DL est unique.

Démonstration. Considérons nous deux DL de f et montrons nous que leurs parties polynomiales sont égales. Soit donc

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right), \qquad x \in I \setminus \{x_0\},$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right), \qquad x \in I \setminus \{x_0\},$$

deux DL de f, à l'ordre n au voisinage de $x_0 \in I$. En effectuant la différence de ces deux égalités

$$(b_0-a_0) + (b_1-a_1)(x-x_0) + \cdots + (b_n-a_n)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) = 0, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}. \tag{2}$$

Nous passons à la limite lorsque x tend vers x_0, nous obtenons alors

$$b_0 - a_0 = 0.$$

Ensuite, on divise (2) par $x - x_0$,

$$(b_1-a_1) + (b_2-a_2)(x-x_0) \cdots + (b_n-a_n)(x-x_0)^{n-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right) = 0, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}. \tag{3}$$

De la même façons, nous passons à la limite lorsque x tend vers x_0, nous obtenons cette fois

$$b_1 - a_1 = 0.$$

On poursuivant cette opération plusieurs fois, nous obtenons à la fin

$$b_0 - a_0 = b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n = 0.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 1.

Exercice. Supposons que $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue.

(a) Montrer que si f admet un DL, voir (1), en un point $x_0 \in I$ à l'ordre $n \geqslant 0$ alors $a_0 = f(x_0)$.

(b) Si f admet un DL en un point x_0 à l'ordre $n \geqslant 1$, alors f est dérivable en x_0 et on a $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$. Déduire dans ce cas que

$$y = a_0 + a_1(x - x_0)$$

est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0.

Corollaire 1

Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

Démonstration. Supposons que f est paire et que pour tout $x \in I \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n) \\ f(-x). \end{cases}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n) \\ c_0 - c_1 x + \cdots + c_n (-x)^n + o(x^n). \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$2f(x) = 2c_0 + 2c_2 x^2 + \cdots + \left(c_n + c_n(-1)^n\right) x^n + o\left(x^n\right).$$

Ainsi, le résultat s'ensuit d'après l'unicité des DL. De la même façon on peut montrer le corollaire pour le cas des fonctions impaires.

2.2. DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants, au voisinage de 0, proviennent directement de la formule de Taylor-Young.

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n + o\left(x^n\right)$$

2.3. DL des fonctions en un point quelconque

La fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(h+a)$ admet un DL au voisinage de 0. Nous avions donc utilisé le changement de variable $h = x - a$ pour revenir au cas du point 0.

Exemples.

1. Nous cherchons un DL de la fonction exponentielle au voisinage de 1. On pose
$$h = x - 1.$$
Remarquons que si x est proche de 1 alors h est proche de 0, nous avons
$$\begin{aligned} \exp x &= \exp(1+(x-1)) = e\exp h = e\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots+\frac{h^n}{n!}+o\left(h^n\right)\right) \\ &= e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{n!}\right)+o_1\left((x-1)^n\right). \end{aligned}$$
2. Nous cherchons un DL de la fonction sinus au voisinage de $\pi/2$. Sachant que
$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$
On se ramène donc au DL de la fonction cosinus lorsque $h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$, nous obtenons
$$\sin x = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} + o_{\pi/2}\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}\right).$$
3. Maintenant, nous voulons le DL d'ordre 3 de la fonction f définie au voisinage de 1 par $f(x) = \ln(1+3x)$. Pour cela on pose $h = x - 1$. Donc
$$f(x) = \ln\left(1+3(1+h)\right) = \ln(4+3h) = \ln 4 + \ln\left(1+\frac{3h}{4}\right).$$
Or, nous avons
$$\ln\left(1+\frac{3h}{4}\right) = \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + o(h^3), \qquad \text{lorsque } h \text{ tend vers } 0.$$
Par conséquent
$$f(x) = \ln 4 + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + o_1\left((x-1)^3\right).$$

3. Opérations sur les développements limités

Nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 5

Soit P un polynôme de degré $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x - x_0)^k.$$

Le polynôme T_n, tronqué d'ordre $n \leqslant m$ de P, est le suivant

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k .$$

Tronquer un polynôme P à l'ordre n signifie donc que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leqslant n$.
Soient maintenant I et J deux intervalles ouverts et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$ deux points. Dans toute la suite nous considérons deux fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$, admettant les DL d'ordre n respectivement au voisinage de x_0 et de y_0,

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

et

$$g(y) = b_0 + b_1 (y - y_0) + \cdots + b_n (y - y_0)^n + o\left((y - y_0)^n\right)$$

et on pose

$$A_n(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n \quad \text{et} \quad B_n(y) = b_0 + b_1 (y - y_0) + \cdots + b_n (y - y_0)^n ,$$

qui représentent les parties polynomiales du DL respectivement de f et de g.

3.1. Somme et produit

Proposition 2

Supposons que $x_0 = y_0$. Alors la fonction somme $f + g$ et la fonction produit $f \times g$ admettent aussi un DL d'ordre n au voisinage x_0, et on a

$$(f + g)(x) = A_n(x) + B_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \qquad \text{et} \qquad (f \times g)(x) = T_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right),$$

où T_n est le polynôme tronqué d'ordre n du polynôme $A_n \times B_n$.

Démonstration. Nous avons

$$f(x) = A_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

et

$$g(x) = B_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

D'une coté nous obtenons

$$f(x) + g(x) = A_n(x) + B_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

D'un autre coté

$$f(x) \times g(x) \;=\; A_n(x) \times B_n(x) + A_n(x) o\left((x - x_0)^n\right) + B_n(x) o\left((x - x_0)^n\right) + \left(o\left((x - x_0)^n\right)\right)^2 .$$

Or, d'une part

$$A_n(x) o\left((x - x_0)^n\right) + B_n(x) o\left((x - x_0)^n\right) + \left(o\left((x - x_0)^n\right)\right)^2 = o\left((x - x_0)^n\right).$$

D'autre part

$$A_n(x) \times B_n(x) = T_n(x) + (A_n(x) \times B_n(x) - T_n(x)) = T_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Par conséquent, nous déduisons

$$f(x) \times g(x) = T_n(x) + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Ceci donc termine la preuve de la proposition 2.

Exemple. Nous voulons calculer le DL d'ordre 2 au voisinage 0, de la fonction $x \mapsto (\cos x)\sqrt{1+x}$. Nous savons que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Puisque le polynôme tronqué d'ordre 2 du polynôme produit suivant

$$\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)$$

est égale à

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2.$$

Nous obtenons

$$(\cos x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2).$$

3.2. Composition

Rappelons que puisque f admet un DL au voisinage de x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$.

Proposition 3

Supposons que $a_0 = y_0$. Alors $g \circ f$ possède aussi un DL d'ordre n au voisinage de x_0. De plus, la partie polynomiale d'ordre n du DL de $g \circ f$ est le polynôme tronqué d'ordre n du polynôme $B_n \circ A_n$.

Exercice. Démontrer la Proposition 3.

Dans le corollaire suivant, nous donnons un cas particulier simple mais très fréquent concernant le DL d'une composition de deux fonctions.

Corollaire 2

Supposons que $x_0 = y_0 = 0$. Si $a_0 = 0$, alors la fonction $g \circ f$ admet aussi un DL d'ordre n en 0, dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué d'ordre n du polynôme $B_n \circ A_n$.

Exemple. Nous nous intéressons à calculer le DL d'ordre 3 au voisinage de 0, de la fonction

$$g \circ f(x) = \sin(\ln(1+x)),$$

où

$$g(u)=\sin u \qquad \text{et} \qquad f(x)=\ln(1+x).$$

On a

$$g(u)=u-\frac{u^3}{3!}+o\left(u^3\right) \qquad \text{et} \qquad f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

Pour calculer le polynôme tronqué d'ordre 3 du polynôme composé des parties polynomiales de f et g, on pose

$$u=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

et on calcule

$$u-\frac{u^3}{3!}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3!}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

Ainsi

$$g\circ f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

Exemple. Nous cherchons cette fois un DL d'ordre 4 au voisinage de 0, de la fonction

$$h(x)=\sqrt{\cos x}.$$

On pose

$$g(u)=\sqrt{1+u} \qquad \text{et} \qquad f(x)=\cos(x)-1.$$

Donc

$$h=g\circ f \qquad \text{et} \qquad f(0)=0.$$

Le DL de f d'ordre 4 en 0 est le suivant

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right).$$

Remarquons que

$$\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)^n=o\left(x^4\right), \qquad \forall n\geqslant 3.$$

Donc, pour calculer le DL d'ordre 4 de h nous avons besoin seulement d'un DL d'ordre 2 de g, soit donc

$$g(u)=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2).$$

On pose

$$u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$

et on calcule

$$1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}=1+\frac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}}{2}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right)^2}{8}=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o\left(x^4\right).$$

Ainsi

$$g\circ f(x)=1-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o\left(x^4\right).$$

3.3. Inverse

Proposition 4

On suppose que $a_0 = 0$, alors la fonction $x \to \dfrac{1}{1-f(x)}$ admet aussi un DL d'ordre n au voisinage de x_0. Ce DL est le même que celui de la fonction $\sum_{k=0}^{n} f^k$.

Démonstration. Il suffit de voir que la fonction $x \to \dfrac{1}{1-f(x)}$ est la composée de la fonction f et la fonction classique $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ dont le DL est en 0 est

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right).$$

La preuve donc s'ensuit directement de la Proposition 3.
Remarque. On peut calculer qu'au voisinage de x_0,

$$\sum_{k=0}^{n} f^k(x) = S_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right),$$

où S_n est le polynôme tronqué d'ordre n du polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k.$$

Exemple. Nous allons calculer le DL d'ordre 5 en 0 de la fonction tangente. D'une part, nous avons

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right),$$

et d'autre part

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) = 1 - u,$$

en posant

$$u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right).$$

Remarquons que

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^n = o\left(x^5\right), \qquad \forall n \geqslant 3.$$

Donc, nous avons besoin seulement de calculer

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right).$$

Ainsi

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^5 + o\left(u^5\right) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^5\right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right).$$

Finalement

$$\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

3.4. Intégration

Proposition 5

Supposons que f est continue. Alors toute primitive F de f possède aussi un DL d'ordre $n+1$ en x_0

$$F(x) = F(a) + a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + o_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Démonstration. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k + (x-x_0)^n\,\varepsilon(x),$$

où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \\ &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} a_k\,(t-x_0)^k\,dt + \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\varepsilon(t)dt \\ &= F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k\,dt + \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\varepsilon(t)dt. \end{aligned}$$

D'un coté, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} (t-x_0)^k\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\,(t-x_0)^{k+1}.$$

D'un autre coté

$$\begin{aligned} \left|\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\varepsilon(t)dt\right| &\leqslant \sup\{|\varepsilon(t)|\}\left|\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,dt\right| \\ &= o_{x_0}(1)\left|(x-x_0)^{n+1}\right|, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\int_{x_0}^{x} (t-x_0)^n\,\varepsilon(t)dt = o_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Ainsi

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\,(t-x_0)^{k+1} + o_{x_0}\left((x-x_0)^{n+1}\right),$$

et ceci termine la démonstration.

Exercice. En utilisant la Proposition 5, donner un DL au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

4. Applications des développements limités

4.1. Calculs de limites

Considérons une fonction $h : I \setminus \{x_0\} \mapsto \mathbb{R}$ bien définie et de la forme

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Supposons que f et g admettent des DL en x_0 et nous supposons de plus que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Nous cherchons une méthode générale pour calculer $\lim_{x\to x_0} h(x)$. Soit donc

$$f(x) = a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

et

$$g(x) = b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 \cdots + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

On pose

$$n_f = \inf\{k \in \{1,\cdots,n\}, a_k \neq 0\} \qquad \text{et} \qquad n_g = \inf\{k \in \{1,\cdots,n\}, b_k \neq 0\}.$$

Alors nous avons la proposition suivante

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n_g \leqslant n$. Alors

(a) Si $n_f > n_g$, alors $\lim_{x\to x_0} h(x) = 0$

(b) Si $n_f = n_g$, alors $\lim_{x\to x_0} h(x) = \dfrac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$

(c) Si $n_f < n_g$, alors h a une limite infinie à gauche et à droite.

Démonstration. Nous avons

$$h(x) = \frac{a_{n_f}(x-x_0)^{n_f} + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{b_{n_g}(x-x_0)^{n_g} + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Maintenant, il suffit de factoriser soigneusement le numérateur et le dénominateur et puis conclure selon chaque cas.

Exemple. Calculons la limite en 0 de la fonction $x \mapsto h(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$.

Nous avons,

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^2).$$

Donc, d'une part

$$3x^2\sin^2 x = 3x^4 + o(x^4).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + o(x^4) \\
&= -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$h(x) = \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \frac{-\frac{5}{12} + o(1)}{3 + o(1)} = -\frac{5}{36} + o(1).$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} h(x) = -\frac{5}{36}.$$

4.2. Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Considérons une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un DL au voisinage d'un point $x_0 \in I$, de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o\left((x - x_0)^n\right),$$

où p est le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que le coefficient a_p est non nul. Nous savons que l'équation de la tangente à la courbe de f au point x_0 est

$$y = a_0 + a_1(x - a).$$

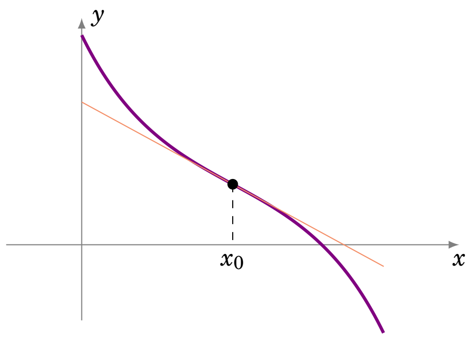
Maintenant nous nous intéressons à connaitre la position cette tangente par rapport à la courbe de f au voisinage de x_0.

Proposition 7

La position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de x_0 est donnée par 3 cas possibles selon le signe de la fonction $x \mapsto a_p(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.

1. Si le signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente, il s'agit alors d'un ***minimum local***.
2. Si le signe est négatif alors la courbe est au-dessous de la tangente, c'est un ***maximum local***.
3. Si, pour tout voisinage de x_0, le signe change. Alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse x_0, c'est un ***point d'inflexion***.

Voici un exemple d'une courbe qui représente point d'inflexion au point d'abscisse x_0



Exercice. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2(I)$.

1. Montrer que si $x_0 \in I$ est un point d'inflexion alors $f''(x_0) = 0$.
2. Déterminer tous les points d'inflexion de la fonction $x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$.

5. Développements asymptotiques

5.1. Direction asymptotique

Considérons-nous une fonction $f :]A, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, où $A > 0$. Nous nous intéressons à étudier le comportement au voisinage de $+\infty$ du graphe de f. Pour cela, nous allons se servir du changement de variables

$$t = \frac{1}{x}$$

pour ramener cette étude au cas du point 0. Soit donc la fonction

$$g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \qquad 0 < t < \frac{1}{A}.$$

Si g admet un DL au voisinage de 0 à droite,

$$g(t) = P_n(t) + o\left(t^n\right), \qquad 0 < t < \frac{1}{A}.$$

Alors on peut approché f par une fraction rationnelle au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right), \qquad x > A.$$

Dire que la fonction $x \mapsto f(x)$ admet un DL d'ordre n au voisinage de $+\infty$ est équivalent à dire que la fonction $x \to f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 à droite, plus précisément nous avons la définition suivante.

Définition 6

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]A, +\infty[$, où $A > 0$. On dit que f admet un ***DL*** d'ordre n au voisinage de $+\infty$, s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right), \qquad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

On peut définir de la même façon un DL au voisinage de $-\infty$. Un DL au voisinage de $\pm\infty$ s'appelle aussi un ***développement asymptotique.*** Nous remarquons que lorsque f admet un DL au voisinage de $+\infty$, alors nécessairement

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a_0 \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas l'équation de la droite tangente au voisinage de $+\infty$ (dite aussi ***asymptote***) est

$$y = a_0.$$

La position du graphe $\mathscr{C}_f$ de f par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{a_k}{x^k}$, où $k \geqslant 1$ est le plus petit entier (s'il existe) tel que $a_k \neq 0$.

Dans le cas générale, nous avons la proposition suivante.

Proposition 8

On suppose que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet le DL au voisinage de $+\infty$ suivant

$$\frac{f(x)}{x} = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_k}{x^k} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^k\right),$$

où $k \geqslant 2$ est un entier tel que $b_k \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (b_0 x + b_1) = 0.$$

La droite d'équation $y = b_0 x + b_1$ est une ***asymptote*** pour $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $\dfrac{b_k}{x^{k-1}}$.

Démonstration. Nous avons

$$(f(x) - b_0 x - b_1) = \frac{b_k}{x^{k-1}} + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1}\right).$$

En particulier

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - b_0 x - b_1\big) = 0,$$

et donc l'équation

$$y = b_0 x + b_1$$

représente une asymptote pour $\mathscr{C}_f$. La position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote est une conséquence du fait que

$$(f(x) - b_0 x - b_1) = \frac{b_k}{x^{k-1}} (1 + o(1)).$$

Définition 7

Lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R},$$

on dit que la courbe $\mathscr{C}(f)$ possède une direction asymptotique de coefficient α.

C'est le cas, par exemple lorsque f admet un DL asymptotique, au voisinage de $+\infty$, de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + o(x),$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, le nombre α est le coefficient directeur de l'asymptote oblique, au voisinage de $+\infty$.

Exemples.

(a) Nous voulons calculer un développement asymptotique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$, au voisinage de ∞. Au voisinage de $+\infty$, nous avons

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

et de même, au voisinage de $-\infty$, nous avons

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Or,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Donc

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{lorsque } x \to +\infty,$$

et
$$f(x) = -x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{lorsque } x \to -\infty.$$
Ceci nous dit que le graphe $\mathscr{C}(f)$ de f admet la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$. De même $\mathscr{C}(f)$ admet la droite d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ comme asymptote au voisinage de $-\infty$. De plus, $\mathscr{C}(f)$ est toujours au-dessous de ces asymptotes à ∞.

(b) Nous cherchons les asymptotes, au voisinage de ∞, de la fonction
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \exp \frac{1}{x}.$$
Au voisinage de $+\infty$, nous avons
$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \exp \frac{1}{x}$$
et de même, au voisinage de $-\infty$, nous avons
$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \exp \frac{1}{x}.$$
D'une part
$$\exp \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$
D'autre part
$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \quad = \quad \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$
Donc
$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \exp \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad \text{lorsque } x \to \infty.$$
Ce qui implique
$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{lorsque } x \to +\infty,$$
et
$$f(x) = -x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \text{lorsque } x \to -\infty.$$
Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote pour $\mathscr{C}(f)$ au voisinage de $+\infty$. Aussi la droite d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote pour $\mathscr{C}(f)$ au voisinage de $-\infty$. La courbe $\mathscr{C}(f)$ est au-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, par contre elle est au-dessus de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

5.2. Branche parabolique

Considérons une courbe $\mathscr{C}(f)$ d'une fonction f admettant une direction asymptotique de coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$, au voisinage de $+\infty$. Nous disons que $\mathscr{C}(f)$ admet ***une branche parabolique***, au voisinage de $+\infty$, lorsque
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \alpha x = \infty.$$

Dans le cas où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty,$$

on dit que $\mathscr{C}(f)$ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

Exercice. Soit $\rho \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto x^\rho$ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses si et seulement si $\rho < 1$, et dans la direction de l'axe des ordonnées si et seulement si $\rho > 1$.