Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse 3, Chapitre III.

B. Bouya & A. Hanine

Courbes paramétrées

0.1. Fonctions vectorielles à variable réelle.

Définition 1

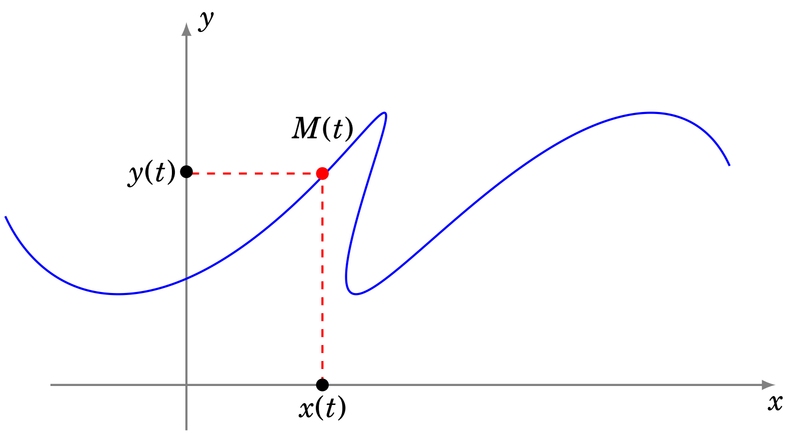
Une ***courbe paramétrée plane*** est une fonction d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rccl} M: & D\subseteq\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & M(t)=(x(t),y(t)). \end{array}$$

Le ***support*** Γ d'une courbe paramétrée M est l'ensemble des points $M(t)$ où t décrit D,

$$\Gamma=\{(x(t),y(t)):\ t\in D\}.$$

Remarque. Une courbe paramétrée plane est aussi dite un arc paramétré, surtout lorsque le sous-ensemble D est un intervalle de $\mathbb{R}$. Voici par exemple l'allure du support d'un arc paramétré



Exemples.

- Soit R un nombre positive. La fonction suivante

$$t\mapsto(R\cos t,R\sin t),\qquad t\in[0,2\pi[,$$

 est une ***paramétrisation du cercle*** $\mathscr{C}(0,R)$, de centre 0 et de rayon R.
- La fonction suivante

$$t\mapsto(t-2,3t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

 est une ***paramétrisation de la droite*** passant par le point $A(-2,0)$ et de vecteur directeur $(1,3)$.

- La fonction suivante
$$t \mapsto (t-2, 3t), \qquad t \in [0,1],$$
est une ***paramétrisation du segment*** fermé $[A,B]$ d'extrémités $A(-2,0)$ et $B(-1,3)$.
- Reprenons maintenant l'exemple du $\mathscr{C}(0,R)$. Les trois paramétrisations suivantes
$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi[, \tag{1}$$
$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in [-3\pi, -\pi[, \tag{2}$$
et
$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$
ont le même support $\mathscr{C}(0,R)$. Mais, le support de la paramétrisation suivante
$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in]-\pi, \pi[,$$
est $\mathscr{C}(0,R) \setminus \{(-R,0)\}$.

Nous concluons que la donnée du support n'est pas suffisante pour définir une courbe paramétrée. Dans le cas de l'exemple (3), les points de la courbe sont dites points multiples. Par contre, les points dans (1) et (2) sont tous simple. Plus généralement, nous avons la définition suivante

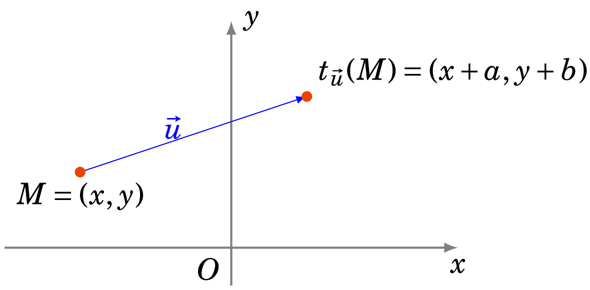
Définition 2 : Points multiples.

On dit qu'un point A d'une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$, où $t \in D \subseteq \mathbb{R}$, est double s'il existe t_1 et t_2 deux points distincts de D tels que : $M(t_1) = M(t_2) = A$. De même, le point A est multiple si le nombre des points $t \in D$ vérifiant l'équation $M(t) = A$ est supérieur ou égale à 2, si ce nombre est unique alors le point A est dit simple.

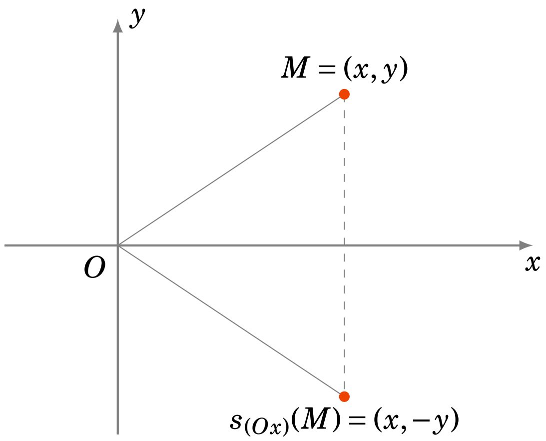
0.2. Réduction du domaine d'étude

Soit $M(x,y)$ un point, où x et y désignent les coordonnées de M dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Nous rappelons d'abord quelques transformations géométriques classiques.

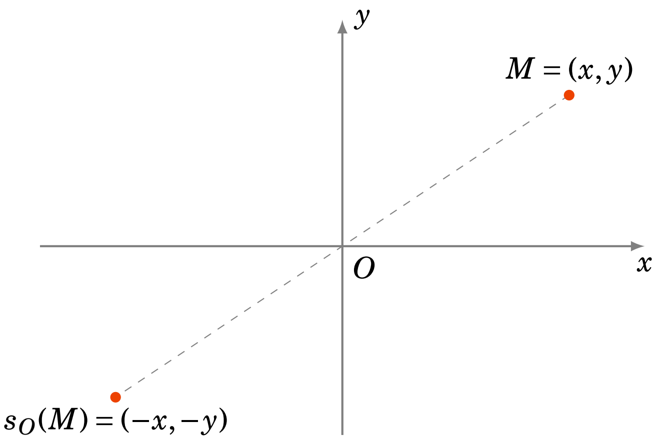
1. Translation de vecteur $\vec{u}(a,b)$:



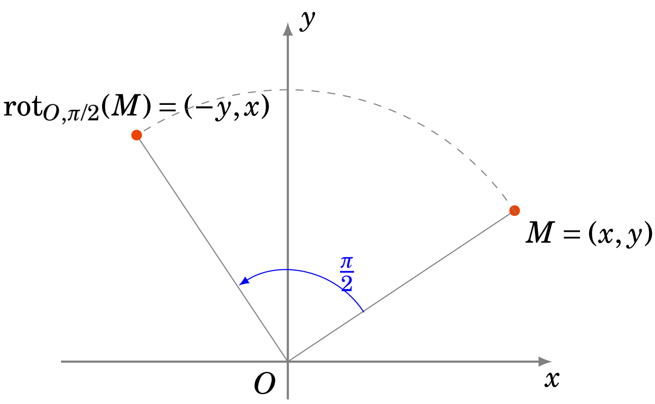
2. Réflexion d'axe (Ox) :



3. Réflexion d'axe (Oy) : $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$.
4. Symétrie centrale de centre O :



5. Symétrie centrale de centre $I(a, b)$: $s_I(M) = (2a - x, 2b - y)$.
6. Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $s_D(M) = (y, x)$.
7. Réflexion d'axe la droite (D') d'équation $y = -x$: $s_{D'}(M) = (-y, -x)$.
8. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O :



9. Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de O : $\mathrm{rot}_{O,-\pi/2}(M) = (y, -x)$.

Étant donnée maintenant une courbe paramétrée M, nous nous intéressons à tracer une allure de son support Γ. Les transformations géométriques suivantes sont très utiles pour réduire le domaine d'étude.

1. **Périodicité.** On dit que la courbe paramétrée est périodique, et de période P, si et seulement si pour tout $t \in D$, nous avons
$$t+P \in D \qquad et \qquad M(t+P) = M(t).$$
Ce qui est équivalent à dire que $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques sur D, et de période P.
Exemple. La paramétrisation suivante
$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t), \qquad t \in \mathbb{R},$$
est périodique de période 2π.
2. **Invariance par translation.** La courbe Γ est invariante par la translation $\mathscr{T}$ si et seulement si $\mathscr{T}(\Gamma) = \Gamma$.
Exemple. La paramétrisation suivante
$$t \mapsto (t, \sin t), \qquad t \in \mathbb{R},$$
est invariante par la translation $\mathscr{T}$ de vecteur $(2\pi, 0)$.
3. **Symétrie par rapport à un point.** La courbe Γ est invariante par la symétrie $\mathscr{S}_I$, par rapport à un point $I(a,b)$, si et seulement si $\mathscr{S}_I(\Gamma) = \Gamma$, autrement dit,
$$\forall t \in D, \exists u \in D : \; x(u) = 2a - x(t) \text{ et } y(u) = 2b - y(t).$$
4. **Réflexion par rapport à une droite.**
   - **Réflexion d'axe** $x = a$. La courbe Γ est invariante par rapport à la réflexion d'axe $x = a$ si et seulement si
   $$\forall t \in D, \exists u \in D : \; x(u) = 2a - x(t) \text{ et } y(u) = y(t).$$
   - **Réflexion d'axe** $y = b$. La courbe Γ est invariante par rapport à la réflexion d'axe $y = b$ si et seulement si
   $$\forall t \in D, \exists u \in D : \; x(u) = x(t) \text{ et } y(u) = 2b - y(t).$$
   - **Réflexion d'axe** $y = x$. La courbe Γ est invariante par rapport à la réflexion d'axe $y = x$ si et seulement si
   $$\forall t \in D, \exists u \in D : \; x(u) = y(t) \text{ et } y(u) = x(t).$$

Exemple. Nous voulons déterminer un domaine d'étude le plus simple possible pour tracer la ***courbe de Lissajous*** suivante $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, où
$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(a) Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t+2\pi) = M(t)$. Donc la courbe est périodique de période 2π. Il suffit donc de considérer l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(b) Pour $t \in [-\pi, \pi]$, nous avons

$$M(-t) = \big(-x(t), -y(t)\big) = \mathscr{S}_O\big(M(t)\big).$$

La courbe admet une symétrie centrale de centre O. Il suffit de construire la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

(c) Pour $t \in [0, \pi]$, nous avons

$$M(\pi - t) = \big(\sin(2\pi - 2t), \sin(3\pi - 3t)\big) = \big(\sin(-2t), \sin(\pi - 3t)\big) = \big(-x(t), y(t)\big) = \mathscr{S}_{Oy}\big(M(t)\big).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis on effectue la réflexion d'axe (Oy). Nous obtenons la courbe complète par symétrie centrale de centre O.

0.3. La continuité

Définition 3

Soit $t \mapsto M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, une courbe paramétrée et soit $t_0 \in D$. La courbe est ***continue en*** t_0 si et seulement si les fonctions x et y sont continues en t_0. La courbe est ***continue sur*** D si et seulement si elle est continue en tout point de D.

1. Tangente à une courbe paramétrée

Soit I un intervalle ouvert et soit $M : t \mapsto M(t)$, $t \in I$, une courbe paramétrée.

Définition 4 : Tangente

Soit $t_0 \in I$ tel que $M(t) \neq M(t_0)$, pour tout $t \in I$. On dit que la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une position limite quand t tend vers t_0. Dans ce cas, la droite limite est la ***tangente*** au point $M(t_0)$.

1.1. La dérivée

Définition 5 : Vecteur dérivé

Soient $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, une courbe paramétrée et $t_0 \in D$. La courbe est ***dérivable en*** t_0 si et seulement si les fonctions x et y le sont. Dans ce cas, le ***vecteur dérivé*** de la courbe en t_0 est le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$. Ce vecteur se note $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

1.2. Tangente en un point

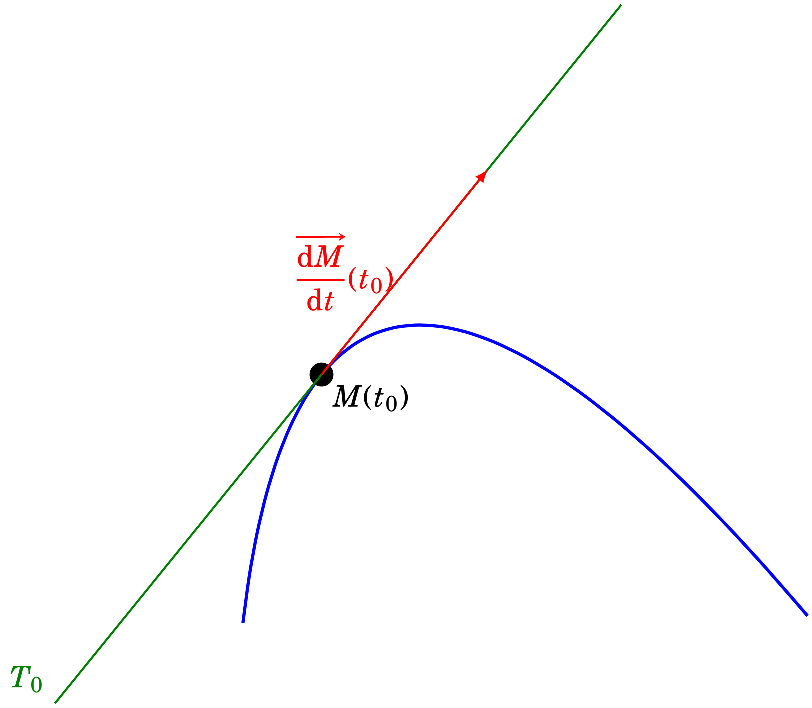
Soit $t \mapsto M(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}$, une courbe dérivable sur D et soit t_0 un réel de D.

Tangente en un point régulier :

Si $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit ***régulier***. Une courbe dont tous les points sont réguliers est appelée ***courbe régulière***. Nous avons la proposition suivante.

Proposition 1

Tout point régulier admet une tangente, dirigée par le vecteur dérivé en ce point.



Corollaire 1

Si $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}$, alors l'équation de la tangente T_0 au point $M(t_0)$ est donnée par :

$$M(x,y) \in T_0 \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0 \iff y'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) - x'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) = 0.$$

Exemple. Reprenons notre étude sur la courbe de Lissajous (4). Nous nous intéressons maintenant à déterminer les tangentes de la courbe en un point $M(t)$, où $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nous avons

$$\frac{d\overrightarrow{M(t)}}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \tag{5}$$

Puisque

$$x'(t) = 0 \iff 2\cos(2t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{4}$$

et

$$y'(t) = 0 \iff 3\cos(3t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la courbe de Lissajous est régulière et par conséquent

- Le vecteur $\frac{\overrightarrow{dM(t)}}{dt}$ est un vecteur directeur de la droite tangente au point $M(t)$.
- Pour $t = \frac{\pi}{4}$ le support de la courbe admet une tangente verticale.
- Pour $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{2}$ le support de la courbe admet une tangente horizontale.

Tangente en un point singulier :

Si $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit ***singulier*** (ou stationnaire). Dans le cas où $t \mapsto M(t)$ admet des dérivées d'ordre n, en t_o, nous pouvons utiliser la proposition suivante

Proposition 2

Supposons qu'il existe un entier naturel $m \leqslant n$ tel que $M^{(m)}(t_0) \neq (0,0)$. Soit p le plus petit entier vérifiant $M^{(p)}(t_0) \neq (0,0)$, alors la courbe admet une tangente au point $M(t_0)$ de vecteur directeur $M^{(p)}(t_0)$.

Corollaire 2

Si p est le plus petit entier vérifiant $M^{(p)}(t_0) \neq (0,0)$, alors l'équation de la tangente T_0 au point $M(t_0)$ est donnée par :

$$M(x,y) \in T_0 \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x^{(p)}(t_0) \\ y - y(t_0) & y^{(p)}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \iff y^{(p)}(t_0)\big(x - x(t_0)\big) - x^{(p)}(t_0)\big(y - y(t_0)\big) = 0.$$

Dans certain cas de point singulier $M(t_0)$, il suffit d'étudier la limite suivante

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}.$$

- Si cette limite est un réel ℓ, alors la courbe admet une tangente en $M(t_0)$ de coefficient directeur ℓ.
- Si cette limite est infinie, alors la courbe admet une tangente verticale en $M(t_0)$.

1.3. Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Pour déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point t_0, nous pouvons, si cela est possible, se servir d'un développement limité des coordonnées de $t \mapsto M(t) = ((x(t), y(t))$ au voisinage de t_0. On suppose que $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ admettent des dérivées d'ordre n, en t_o, et on suppose aussi qu'il existe des entiers $p, q \leqslant n$ tels que : Le nombre p est le plus petit entier vérifiant $M^{(p)}(t_0) \neq 0$ et le nombre q est le plus petit entier, supérieur ou égale à p, tel que le système $\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. La formule de Taylor-Young, d'ordre q, au voisinage de t_0, nous donne

$$x(t) = x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} x^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^q\right)$$

et

$$y(t) = y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^q}{q!} y^{(q)}(t_0) + o\left((t-t_0)^q\right).$$

Puisque, pour chaque entier $n \in [p, q-1]$, les deux vecteurs $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(n)}(t_0)$ sont colinéaire, il existe alors des scalaires $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f^{(n)}(t_0) = \lambda_n f^{(p)}(t_0), \qquad \text{pour tout } n \in [p, q-1].$$

Nous obtenons

$$M(t) = M(t_0) + \alpha(t)(t-t_0)^p f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \overrightarrow{\varepsilon_{t_0}}(t),$$

où

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon_{t_0}}(t) = (0,0)$$

et

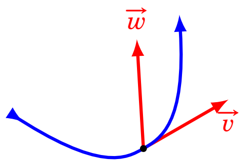
$$\alpha(t) = \frac{1}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{t-t_0}{(p+1)!} + \cdots + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!}.$$

Ainsi, en résumé nous avons

- $\overrightarrow{v} = f^{(p)}(t_0)$ et $\overrightarrow{w} = f^{(q)}(t_0)$ sont deux vecteurs non colinéaires et $p < q$.
- La fonction α est strictement positive au voisinage de t_0, puisque $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = \dfrac{1}{p!} > 0$.
- $\overrightarrow{\varepsilon_{t_0}}(t)$ est un vecteur, tel que $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon_{t_0}}(t) = (0,0)$.

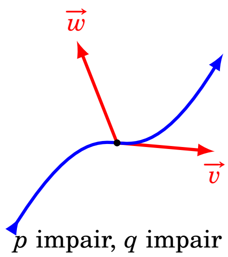
Nous pouvons conclure que, les fonctions $t \longmapsto \alpha(t)(t-t_0)^p$ et $t \longmapsto \frac{(t-t_0)^q}{q!}$ représentent approximativement les coordonnées, au voisinage de t_0, du vecteur $M(t) - M(t_0)$ dans la base $\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\}$.

En un tel point $M(t_0)$, la courbe admet une tangente, dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}$. La position de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par la parité de p et q :



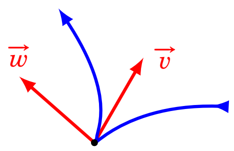
p impair, q pair

point d'allure ordinaire



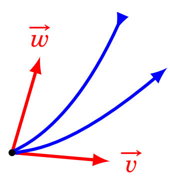
p impair, q impair

point d'inflexion



p pair, q impair

rebroussement de première espèce



p pair, q pair

rebroussement de seconde espèce

1.4. Branches infinies

Soit $M : t \in I \longmapsto M(t)$ une courbe paramétrée, où I un intervalle ouvert. Notons par t_0 l'une des bornes de I. Notons que t_0 est soit un réel, soit $+\infty$ ou soit $-\infty$.

Définition 6

Nous disons que, la courbe paramétrée M admet une ***branche infinie*** en t_0 si

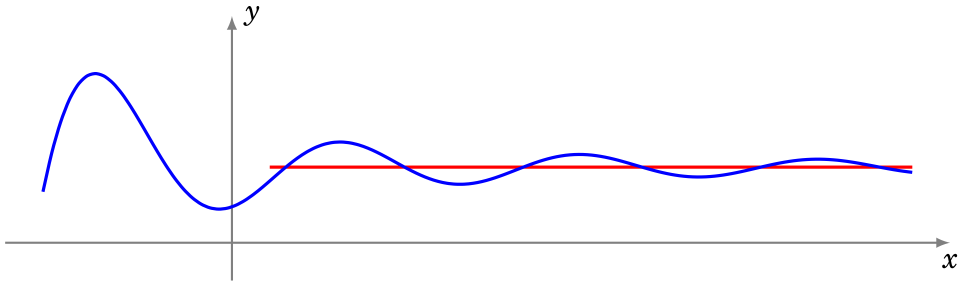
$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in I}} |x(t)| = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in I}} |y(t)| = +\infty.$$

Notons par Γ le support de M. Pour chaque branche infinie, nous cherchons s'il existe une asymptote, c'est-à-dire une droite approchant $\mathscr{C}$ lorsque $t \in I \to t_0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote*** à Γ si

$$\lim_{t\to t_0} y(t) - (ax(t) + b) = 0.$$

Nous avons les différents cas classiques suivants, lorsque t tend vers t_0.

1. Si $x(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et $y(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est une ***asymptote horizontale*** à Γ.



2. Si $y(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et $x(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $x = \ell$ est une ***asymptote verticale*** à Γ.
3. Si $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors on pose

$$\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a.$$

Nous avons les cas suivants

31. Si $a = \pm\infty$, alors Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
32. Si $a = 0$, alors Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
33. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors on pose

$$b = \lim_{t\to t_0} y(t) - (ax(t)),$$

et nous avons les cas suivants

- Si b n'existe pas, on dit que Γ possède une branche infinie de direction la droite d'équation $y = ax$.
- Si $b = \pm\infty$, alors Γ admet branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
- Si $\beta \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une ***asymptote oblique*** pour Γ.

2. Construction de courbes paramétrées planes

2.1. Plan d'étude

Dans un but de tracer le support d'une courbe paramétrée, nous pouvons adapter le plan d'étude suivant selon le cas traiter.

1. Réduction du domaine d'étude.
2. Étude des branches infinies et recherche des asymptotes ainsi que la position de ces asymptotes par rapport au support de la courbe.
3. Remplir le tableau de variations conjointes des deux fonctions coordonnées $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$

t	
$x'(t)$	
$y'(t)$	
x	
y	

4. Recherche des points particuliers ; les points stationnaires, multiples, d'inflexions et de rebroussements.
5. Tracé soigneusement le support de la courbe paramétrée dans un repère orthonormé.

2.2. Applications

A. La courbe de Lissajous.

Nous continuons notre étude sur la courbe de Lissajous suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dans (4), nous avions montrer qu'il suffit de construire la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et puis d'effectuer la réflexion d'axe (Oy). Nous obtenons la courbe complète par symétrie centrale de centre O. Dans (5), nous avions montrer que la courbe de Lissajous est régulière et que

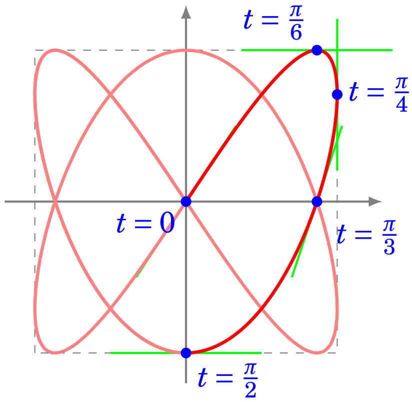
- Le vecteur $\overrightarrow{\frac{dM(t)}{dt}}$ est un vecteur directeur de la droite tangente au point $M(t)$.
- Pour $t = \frac{\pi}{4}$ le support de la courbe admet une tangente verticale.
- Pour $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{2}$ le support de la courbe admet une tangente horizontale.

Il est aussi facile de voir que

- La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(2,3)$ et a donc pour coefficient directeur $3/2$.

- Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $M(t) \in (Ox)$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{3}$. La tangente en $M(\pi/3)$ est dirigée par le vecteur $(-1, -3)$ et a donc pour coefficient directeur 3.

t	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/2$
x'		$+$		$+$	0	$-$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}/2$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sqrt{2}/2$	$\searrow$	-1



B. Nous voulons étudier la courbe paramétrée définie par

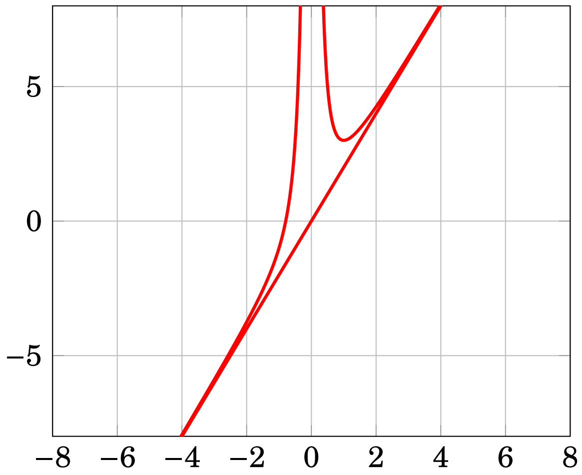
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t^3+2}{t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

L'application $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tableau de variations conjointes

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x'		$-$		$-$		$-$	
y'		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Lorsque $t \to +\infty$, nous avons $x(t) \to 0^+$ et $y(t) \to +\infty$. L'axe (Oy) est donc asymptote et la courbe est à droite.
- Lorsque $t \to -\infty$, nous avons $x(t) \to 0^-$ et $y(t) \to +\infty$. L'axe (Oy) est donc asymptote et la courbe est à gauche.

- Lorsque $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$, nous calculons que $y(t)/x(t) \to 2$ $y(t) - 2x(t) \to 0^+$. La droite d'équation $y = 2x$ est asymptote et la courbe est au dessus.
- Lorsque $t \to 0^-$, même conclusion mais la courbe évolue dans le quadrant opposé.



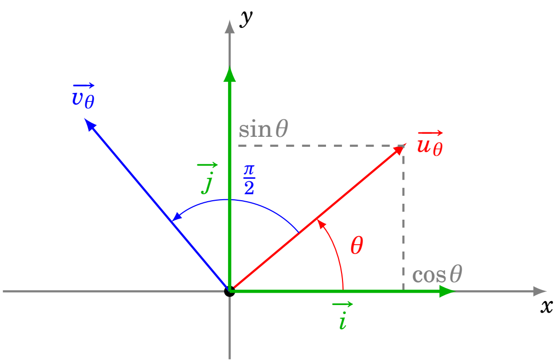
3. Courbes en polaires

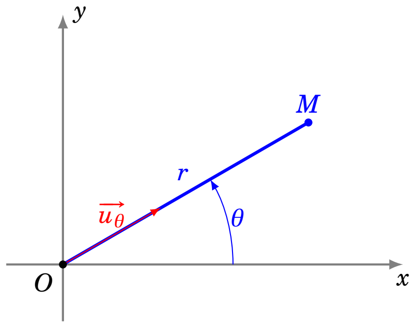
3.1. Coordonnées polaires

On muni le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On pose

$$\vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v_\theta} = \overrightarrow{u_{\theta+\pi/2}} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

On appelle système de ***coordonnées polaires*** tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_\theta}$, où M est un point du plan.





3.2. Courbes d'équations polaires

La courbe d'***équation polaire*** $M(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta$ est l'application suivante

$$\begin{array}{rccl} M: & D & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \mapsto & M(\theta) = r(\theta)\vec{u}_\theta \end{array}.$$

Remarquons que la distance entre le point $M(\theta)$ et l'origine O est donnée par $OM(\theta) = |r(\theta)|$, car la fonction r peut prendre des valeurs strictement négatives. D'un autre coté, on peut passer d'une représentation polaire à une représentation en coordonnée cartésienne grâce au système de changement de variables suivant

$$\theta \mapsto \begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) \end{cases}.$$

3.3. Tangente en un point distinct de l'origine

Soit Γ la courbe de représentation polaire $\theta \mapsto r(\theta)\overrightarrow{u_\theta}$, où nous supposons dans toute la suite que la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ est dérivable.

Proposition 3 : Tangente en un point distinct de l'origine.

Tout point $M(\theta) \neq O$ est un point régulier et la tangente en ce point est dirigée par le vecteur

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + r(\theta)\overrightarrow{v_\theta}.$$

Démonstration. En dérivant par rapport à θ l'égalité suivante

$$M(\theta) = r(\theta)\overrightarrow{u_\theta},$$

nous obtenons

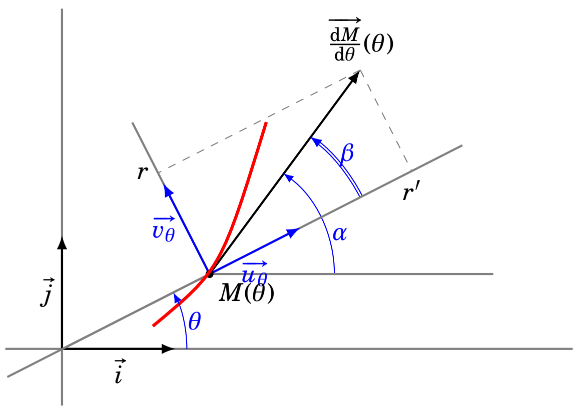
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \frac{\mathrm{d}r(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r(\theta)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = r'(\theta)\overrightarrow{u_\theta} + r(\theta)\overrightarrow{v_\theta}.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{v_\theta}$ ne sont pas colinéaires,

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \overrightarrow{0} \iff r(\theta) = 0 \text{ et } r'(\theta) = 0,$$

et en particulier tout point distinct de l'origine est un point régulier et ceci termine la démonstration.

Le repère $(M(\theta), \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$ est le ***repère polaire*** en $M(\theta)$.

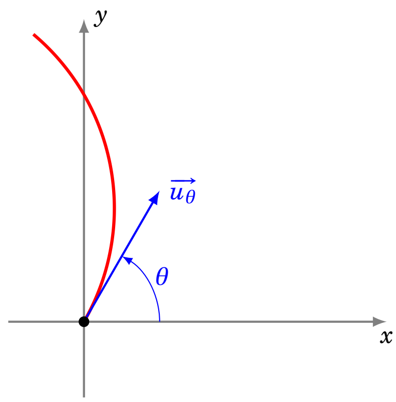


Dans ce repère, les coordonnées du vecteur $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}$ sont (r', r). Si β désigne l'angle $(\overrightarrow{u_\theta}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta})$ et α l'angle $(\vec{i}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta})$ alors $\alpha = \beta + \theta$.

3.4. Tangente à l'origine

Proposition 4 : Tangente à l'origine.

Si $M(\theta) = O$, la tangente en $M(\theta)$ est la droite d'angle polaire θ.



L'équation cartésienne de cette droite est la suivante

$$y = \tan(\theta)x, \qquad \text{si } \theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},$$

ou

$$x = 0, \qquad \text{si } \theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Le vecteur

$$\frac{1}{r(\varphi)}\overrightarrow{M(\theta)M(\varphi)} = \frac{1}{r(\varphi)}\overrightarrow{OM(\varphi)} = \overrightarrow{u_\varphi},$$

est un vecteur directeur pour la droite $\big(M(\theta)M(\varphi)\big)$, lorsque $\varphi \neq \theta$. A la limite nous obtenons que $\overrightarrow{u_\theta}$ est un vecteur directeur de la tangente au point O.

3.5. Plan d'étude d'une courbe en polaires

1. Réduction du ***domaine d'étude*** en précisant les transformations géométriques permettant de reconstituer la courbe.
2. ***Tableau de Variations*** de la fonction r ainsi que le ***signe*** de la fonction r. Ce signe aura une influence sur le tracé de la courbe et il permet aussi de savoir si l'origine est un point de rebroussement ou un point ordinaire.
3. ***Les tangentes*** au points particuliers et aussi à l'origine.
4. ***Étude des branches infinies.***
5. ***Construction de la courbe :*** Nous avons les cas suivants.
   – Si r est positif et croît : on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
   – Si r est négatif et décroit : on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
   – Si r est positif et décroît : on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.
   – Si r est négatif et croît : on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.
6. ***Points multiples.*** Recherche éventuelle de points multiples si le tracé de la courbe le suggère.

Exemple 1. Étudier la courbe d'équation polaire

$$r(\theta) = \cos^2\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

- La fonction $r :\mapsto r(\theta) = \cos^2\theta$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $r(\theta+\pi) = r(\theta)$ donc $M(\theta+\pi)$ et $M(\theta)$ sont symétrique par rapport à l'origine.
- $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox).

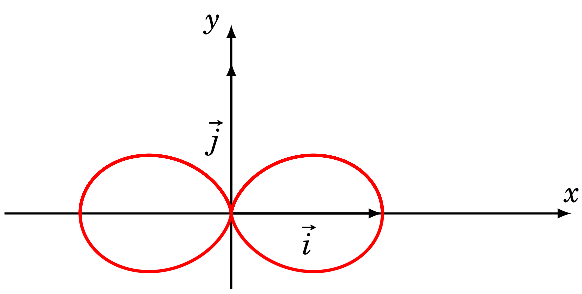
Nous pouvons donc limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi/2]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox) et la symétrie de centre O. Nous avons le tableau de variation

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$r(\theta)$	1 $\searrow$	0

En $\theta = 0$, nous avons $r(0) = 1$ et $r'(0) = 0$. Il y a une tangente orthoradiale.
En $\theta = \pi/2$, nous avons $r(\pi/2) = 0$, c'est un passage par l'origine et puisque

θ		$\frac{\pi}{2}$	
$r(\theta)$	$+$	0	$+$

Donc, c'est un point de rebroussement avec une tangente d'équation $\theta = \pi/2$.



Exemple 2. Étudier la courbe d'équation polaire

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

- La fonction $r :\mapsto r(\theta) = 1+\cos\theta$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- $r(\theta+2\pi) = r(\theta)$ donc $M(\theta+2\pi) = M(\theta)$.
- $r(-\theta) = r(\theta)$ donc $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox).

Nous pouvons donc limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. La courbe obtenue sera complétée par la symétrie d'axe (Ox). Nous avons le tableau de variation

θ	0	π
$r(\theta)$	2 $\searrow$	0

En $\theta = 0$, nous avons $r(0) = 2$ et $r'(0) = 0$. Il y a une tangente orthoradiale.
En $\theta = \pi$, nous avons $r(\pi) = 0$, c'est un passage par l'origine et puisque

θ		π	
$r(\theta)$	$+$	0	$+$

Donc, c'est un point de rebroussement avec une tangente d'équation $\theta = \pi$.