Fonctions Numériques :
Limites et continuité.

1. Notion de limites
   Définitions, opérations et Exemples.
2. Fonctions monotones.
   (a) Définitions.
   (b) Limites des fonctions monotones.
3. Fonctions continues.
   (a) Définition.
   (b) Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences.
   (c) Monotonie et continuité.
4. Réciproques des fonctions trigonométriques.
5. Suites et fonctions.
   (a) Rappels.
   (b) Suites récurentes.

1 Notions de Limite

Dans toute la suite a, b, x_0 désigneront des nombres réels tels que $a < x_0 < b$.
On appellera segment un ensemble de la forme $[a,b] = \{x \ : \ a \leq x \leq b\}$.
Définition
On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $a, \ b \ \in I$ on a $[a,b] \subset I$.
Les intervalles ouverts sont : $]a,b[,]a,+\infty[,]-\infty,b[$ et $\mathbb{R}$.
Les intervalles fermés sont : $[a,b], [a,+\infty[,]-\infty,b]$ et $\mathbb{R}$.

Définition
Soit f une fonction définie sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la limite de f en x_0 est $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \eta > 0 \ \ / \ \ 0 < |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Opérations et limites

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$.

1) Somme : Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l + l'$

2) Produit : Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ll'$

3) Quotient : Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

Exemples :

1) Fonctions polynômes : Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x_0^k$ d'aprés 2) de la proposition précédente. Par suite si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$ est un polynôme à coéfficients réels, alors $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.

2) Fractions rationnelles : $f(x) = P(x)/Q(x)$ est une fraction rationnelle, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) \neq 0$ on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2+x-6}{x^2+x-2}, \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}{x^2-1}, \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{sinx+1}-\sqrt{1-sinx}}{x(x+1)}.$$

Limites à droite et limites à gauche

Définitions :

1) Soit f une fonction définie sur $]x_0,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la limite de f à droite de x_0 est l si

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \eta > 0\ /\ 0 < x - x_0 < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = l$.

2) Soit f une fonction définie sur $]a,x_0[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la limite de f à gauche de x_0 est l si

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \eta > 0\ /\ 0 < x_0 - x < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On notera alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = l$.

Remarques :

1) Ces limites quand elles existent sont uniques.

2) On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

Exemples :

1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a \quad \text{pour} \quad x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \quad \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

D'une part $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+x+a) = a$. D'autre part $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$. Donc f est continue en 0 si et seulement si $a = 0$.

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin(ax)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}} \quad \text{pour} \quad x > 0 \\ sin(\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} \quad \text{pour} \quad x < 0 \end{cases}$$

Comme $|sin(\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}| \leq |e^{\frac{1}{x}}|$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} sin(\dfrac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} = 0$.

On a

$$\frac{sin(ax)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}} = \frac{sin(ax)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1+x})}{(2x+1)-(1+x)} = \frac{sin(ax)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1+x})}{x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(ax)}{x} = a$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sin(ax)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1+x})}{x} = 2a.$$

Par conséquent f est continue en 0 si, et seulement si, $a = 0$.

Définitions :

1)Soit f une fonction numérique définie sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$. On dit que la limite de f en x_0 est égale à $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout M (resp. m) $\in \mathbb{R}$ il existe $\eta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta$ entraîne $f(x) \geq M$ (resp. $f(x) \leq m$).

2) Soit f une fonction numérique définie sur $]a, +\infty[$. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists A \ / \ x \geq A \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

3) Soit f une fonction numérique définie sur $]a, +\infty[$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$) quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall\ M(\text{resp. } m) \in \mathbb{R}\ \ \exists A\ /\ x \geq A \implies f(x) \geq M\ (\text{resp.} f(x) \leq m)$$

On définit par analogie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ Les opérations sur les limites énoncées plus haut restent valable en faisant attention aux formes indéterminées suivantes :

$$+\infty - \infty, 0 \times \infty,\ \ \frac{\infty}{0},\ \ \frac{\infty}{\infty},\ \ \frac{0}{0},\ \ 0^0,\ \ 0^\infty,\ \ 1^\infty ...$$

Exemples :
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{x^2+1}},\quad \lim_{x\to+\infty} sin(\frac{x^2}{x\sqrt{x^2+3}+1}) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

2 Fonctions monotones

Définition :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
1) On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si :

$$\forall x,\ y \in I \ \text{ on a } \ \ x < y \implies f(x) \leq f(y)\ (\text{resp. } \ f(x) < f(y)).$$

2) On dit que f est décroissante (resp. strictement décroissante) si :

$$\forall x,\ y \in I \ \text{ on a } \ \ x < y \implies f(x) \geq f(y)\ (\text{resp. } \ f(x) > f(y)).$$

3) On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).
Proposition :
Soit f une fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$. Alors elle admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $]a, b[$.
Exemples :
1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{pour } \ x \leq 1 \\ 2x^2+3 & \text{pour } \ x > 1 \end{cases}$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$ et aussi strictement croissante sur $]1,+\infty[$. De plus $f(1)=4\leq \lim\limits_{x\to 1^+} 2x^2+3=5$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2)) Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+1 & \text{pour} \quad x\leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2+3 & \text{pour} \quad x>1 \end{cases}$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$ et aussi strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Cependant f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ car $f(1)=4>\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=7/2$.
3) Vérifier, en utilisant la définition, que $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Définition :
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. On dit que f est injective sur I si

$$\forall x,\ y\ \in I \text{ on a } \ x\neq y \Longrightarrow f(x)\neq f(y).$$

Remarque :
Une fonction strictement monotone sur I est injective sur I.

3 Fonctions continues :

Définition :
Soit f une fonction numérique définie sur $]a,b[$ et soit $x_0\in]a,b[$. On dit que f est contiuue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
On dit que f est continue sur $]a,b[$ si f est continue en tout point de $]a,b[$.
Remarque
1) Si f est une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $f(b)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
2)Soit f une fonction numérique définie sur $]a,b[\backslash\{x_0\}$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ existe. La fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in]a,b[\backslash\{x_0\} \\ l & x=x_0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en x_0.

Opérations :
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $]a, b[$ et continues en un point x_0 de $]a, b[$ on a :
1) $f + g$ est continue en x_0.
2) fg est continue en x_0.
3) Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
Proposition :
Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.
Exemples :
1) Tout polynôme est continu sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fraction rationnelle $f = P/Q$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{x \ : \ Q(x) = 0 \ \}$.
3) Les fonctions $sinx$, $cosx$, $tanx, ln\ x$ et e^x sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.
Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est un intervalle.
c. à. d. Si $a,\ b \in I$ tel que $f(a) < f(b)$, alors pour tout $y \in]f(a), f(b)[$ il existe $x \in]a, b[\subset I$ tel que $y = f(x)$.
Remarques :
1) Le point c dans le théorème des valeurs intermédiares n'est pas, en géneral, unique (il suffit de considérer $f(x) = x(x-1)(x-2)$ on a alors $f(-1) = -6 < 0$ et $f(3) = 6 > 0$ de plus $f(0) = f(1) = f(2) = 0$).
2) Dans le cas où f est injective sur $]a, b[$ (en particulier si f est strictement monotone), alors le point c dans le théorème des valeurs intermédiares est unique.
3) Le théorème des valeurs intermédiares est souvent utilisé sous la forme suivante :
Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tels que $f(c) = 0$.
Ceci permet quelques fois de montrer que certaines équations admettent des solutions et donne par la même occasion une méthode pour approcher ces solutions.
Exemples :

1. Soit $f(x) = x^4 + 4x + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in] - 1, 0[$ tel que $f(x_0) = 0$.
   (b) Le graphe de la fonction f rencontre t-il la droite d'équation $y = x + 1$?

2. Tout polynôme de degrés impaire admet une solution réelle. En effet, soit $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + .. + a_1x + a_0$. Supposons que $a_{2n+1} > 0$. Comme $f(b)$ tend vers $+\infty$ quand b tend vers $+\infty$, on peut trouver un b assez grand pour que $f(b) > 0$ (tracer l'allure de la courbe au voisinage de $+\infty$). De même, en utilisant que $f(a)$ tend vers $-\infty$ quand a tend vers $-\infty$, on peut trouver a tel que $f(a) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe un c tel que $f(c) = 0$. Le cas $a_{2n+1} < 0$ se traite de manière analogue.

3. Le théorème des valeurs intermédiaires est souvent utilisé pour approcher des solutions de certaines équations.(La méthode de dichotomie).
   Soit $f(x) = 3x^3+2x-4$. Comme $f(0) = -4 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, la fonction f admet un zéro entre 0 et 1. Or $f(1/2) = -13/8 < 0$ donc la fonction f admet un zéro entre $1/2$ et 1. Comme $f(3/4) < 0$ ($3/4$ est le milieu de l'intervalle $[1/2, 1]$), f admet un zéro dans l'intervalle $]3/4, 1[$ càd qu'il existe $c \in]3/4, 1[$ tel que $f(c) = 0$. On peut continuer le processus pour approcher encore mieux une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Théorème
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Remarque :
1) Ce théorème dit que si f est continue sur un intervalle de la forme $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un intervalle de même type c.à.d de la forme $[m, M]$. En particulier, il existe $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que $f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$.
2) Si f est continue sur un intervalle I, pas nécessairement un segment, alors $f(I)$ est un intevalle mais pas nécessairement de même nature que I. Considérons par exemple $f(x) = x^2$, on a $f(]-1, 1[) = [0, 1[$.
Continuité et monotonie :
Nous allons rappeler d'abords la notion de bijection et de fonction réciproque.
Soit f une fonction définie entre deux ensembles X et Y.
On dit que f est bijective pour exprimer que :
1) f est injective (si $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$).
2) f est surjective (pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$).
Notons que f est bijective si pour tout $y \in Y$ on peut trouver un et un seul $x \in X$ tel que $f(x) = y$. La fonction qui à y associe ce x est appelé la fonction réciproque

de f. On note f^{-1} cette fonction. Elle vérifie : $f(f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in Y$ et $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$.

Remarque :

Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$.

Proposoition :

Soit f une fonction bijective de I dans J. Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J.

4 Réciproques des fonctions trigonométriques :

1)**Fonction** *Arcsin* **:**

La fonction $sin \ : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est continue. Elle est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ elle définie ainsi une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1,1]$. La fonction réciproque est appellé arcsinus notée $Arcsin$. Elle vérifie :

$$\begin{array}{rcl} Arcsin : [-1,1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ x & \longmapsto & Arcsinx \end{array}$$

$sin(Arcsinx) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $Arcsin(sinx) = x$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Exemples :

1) Calculer $Arcsin(sin\pi)$, $Arcsin(sin\frac{3\pi}{2})$, $Arcsin(sin\frac{3\pi}{4})$.

2) Calculer $Arcsin(sinx)$ pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

2)**Fonction** *Arccos* **:**

La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et définie ainsi une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa fonction réciproque appellé arccosinus notée $Arccos$ est l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} Arccos : [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & Arccosx \end{array}$$

vérifiant $cos(Arccosx) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $Arccos(cosx) = x$ pour tout $x \in [0,\pi]$.

Exemples :

1) Calculer $Arccos(cos 3\pi)$, $Arccos(cos\frac{3\pi}{2})$, $Arccos(cos\frac{5\pi}{4})$.
2) Calculer $Arccos(cosx)$ pour $x \in [\pi, 2\pi]$.

3) **Fonction** $Arctan$ **:**
La fonction tan est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ elle définie ainsi une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque est appellé arctangente et notée $Arctan$. Elle vérifie :

$$\begin{array}{rcl} Arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi/2, \pi/2[\\ x & \longmapsto & Arctanx \end{array}$$

$tan(Arctanx) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $Arctan(tanx) = x$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Exemples :
1) Calculer $Arctan(tan\pi)$, $Arctan(tan\frac{3\pi}{4})$.
2) Calculer $Arctan(tanx)$ pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$.

5 Suites et fonctions :

Proposition :
Soit $(u_n)_n$ une suite numérique qui converge vers x_0 (On suppose que $u_n \neq x_0$). Et soit f est une fonction qui admet une limite l en x_0. Alors la suite $(f(u_n))_n$ est une suite qui converge vers l.
Exemples :
1) Dans le cas $v_n = f(n)$ on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ lorsque cette dernière existe.
2) Il se peut que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ n'existe pas et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existe (prendre comme exemple $f(x) = sin\pi x$. Dans ce cas $v_n = f(n) = 0$).
3) Soit $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) est convergente vers l et f est continue en l, alors $f(l) = l$.
4) Soit f une fonction croissante de $]a, b[$ sur $]a, b[$. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in]a, b[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Deux cas se présentent :
i) Si $u_0 \leq u_1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante. En effet, supposons que $u_{n-1} \leq u_n$. Comme f est croissante alors $f(u_{n-1}) \leq f(u_n)$ c.à.d. $u_n \leq u_{n+1}$. Donc pour que $(u_n)_{n\geq 0}$ soit convergente, il suffit qu'elle soit majorée (c'est le cas si par exemple $b < \infty$).

ii) Si $u_0 \geq u_1$, alors, par un raisonnement analogue au cas précédent, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante. Pour qu'elle soit convergente il suffit qu'elle soit minorée.

5) Etudier la convergence des suites numériques suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = cos(\frac{1}{u_n+1}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = cos(\frac{1}{u_n+1}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{5}. \end{cases}$$