Fonctions Numériques :

Dérivabilité et Applications.

1. Notion de dérivées.

   Définitions, Opérations et Exemples.

2. Dérivées successives.

   Définitions, Opérations et Exemples.

3. Théorème des Acroissements finis et Applications.

   (a) Extremums.

   (b) Théorème des Accroissements finis.

   (c) Régle de l'Hospital.

1 Notion de dérivée

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.
Cette limite sera notée alors $f'(x_0)$.
Si on se limite aux $x > x_0$ dans la définition on parle alors de dérivée à droite (on la note $f'_d(x_0)$). Si on se limite aux $x < x_0$ on parle de limite à gauche (on la note $f'_g(x_0)$).
Par conséquent f est dérivable en x_0 si elle dérivable à droite et à gauche de x_0 et si ces deux dérivées coincident.

La droite d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est la droite tangente au graphe de f, au point $M(x_0, f(x_0))$.

Remarques :

- Si f est dérivable en x_0, alors elle continue en ce point. La réciproque est fausse en général (la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en ce point car la dérivée à droite en 0 est égale à 1 et la dérivée à gauche est -1).
- Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f est dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x sin(1/x) = 0$.
- la fonction f définie par $f(x) = x cos(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas dérivable en 0.

Opérations et dérivées

1) Soient f et g deux fonctions numériques dérivables en x_0.

Somme : La fonction $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Produit : la fonction fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Quotient : Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Proposition :

Soit f une fonction continue bijective sur un intervalle I. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ est sa dérivée est

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Exemples :

- La fonction $Arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée est
$$(Arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
En effet, $(Arcsinx)' = \frac{1}{cos(Arcsinx)}$. On a
$$cos^2(Arcsinx) = 1 - sin^2(Arcsinx) = 1 - x^2.$$
Or $Arcsinx \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $cos(Arcsinx) \geq 0$. Par suite,
$(Arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- La fonction $Arccos$ est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée est
$$(Arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
(Raisonnement analogue au cas de $Arcsin$).
- La fonction $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est
$$(Arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}.$$
(Raisonnement analogue au cas de $Arcsin$).

2 Dérivée successives

On dit que f est deux fois dérivables sur un intervalle I, si f est dérivable sur I et la fonction dérivée f' est dérivable sur I. De manière générale, on dit que f est n-fois dérivable sur I, si elle est $(n-1)$ fois dérivable sur I est $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I la fonction

$(f^{(n-1)})'$ sera notée $f^{(n)}$.
On dit que f est de classe C^n si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.
Si f est n fois dérivable sur I pour tout n, alors on dit qu'elle est indéfiniment dérivable ou de classe C^∞.

Exemples :
1) Soit $f(x) = x^3 sin(1/x)$ est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 0$. La fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 3x^2 sin(1/x) - xcos(1/x)$. Au point 0, $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 sin(1/x) = 0$. Il est alors clair que f' est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $3x^2 sin(1/x)$ est dérivable en 0 et $xcos(1/x)$ n'est pas dérivable en 0, f' n'est pas dérivable en 0. Donc f' n'est pas deux fois dérivable en 0.
2) La fonction $f(x) = \frac{1}{x-a}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ pour tout $n \geq 0$.
3) La fonction sin est de classe C^∞ et $sin^{(n)}(x) = sin(x + n\frac{\pi}{2})$ pour tout $n \geq 0$.

Opérations
Soient f, g deux fonctions n-fois dérivables sur I.
- **Somme :** $f + g$ est n fois dérivable et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
- **Produit : (Formule de Leibniz)** fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

- **Quotient :** Si g ne s'annulle pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.

Proposition :
- Si f est n-fois dérivable sur I et g est n-fois dérivable sur $f(I)$, alors gof est n-fois dérivable sur I.
- Si f est bijective, n-fois dérivables sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est n-fois dérivables sur $f(I)$.

Exemples :
- Calculons la dérivée nième de la fonction $h(x) = xsin(x)$. Posons $f(x) = sin(x)$ et $g(x) = x$. On a, d'une part $g'(x) = 1$ et $g^{(2)}(x) = g^{(3)}(x) = .. = g^{(k)}(x) = 0$ et d'autre part $f^{(k)}(x) = sin(x + k\pi/2)$. D'aprés la formule de Leibniz $h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = C_{n-1}^n xsin(x + (n-1)\pi/2) + C_n^n sin(x + n\pi/2) = (n-1)xsin(x + (n-1)\pi/2) + sin(x + n\pi/2)$.

3 Théorème des Accroissements finis et Applications :

(a) Extremums

On dit qu'une fonction f admet un maximum local au point x_0 si il existe un intervalle $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$.
On dit qu'une fonction f admet un mnimum local au point x_0 si il existe un intervalle $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$.
Un extremum local au point x_0 est un minimum ou un maximum local en ce point.

Remarque :
Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$. La réciproque est fausse en genéral (Il suffit de considérer la fonction $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0$).

(b) Théorème des Accroissements finis.

Théorème de Rolle :
Soit f une fonction continiue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on obtient le théorème des Acroissement finies suivant :
Théorème :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Le théorème des Acroissements finies à plusieurs applications. Signalons d'abord le résultat bien connu suivant :

Corollaire :
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.

En effet, supposons, par exemple, que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Si $a,\ b \in I$ avec $a < b$ alors il existe $c \in I$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0$. Donc $f(b) \geq f(a)$.
Exemples :
1) Montrons que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, pour $x > 0$ d'aprés le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que $e^x - 1 = xe^c$. Donc $e^x - 1 \geq x$. Le même raisonnement reste valable pour $x < 0$.
Une autre application du théorème des Acroissements finies est la règle de l'Hospital suivante :

(c) Règle de l'Hospital :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et tels que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples et Remarques :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cosx}{sinx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{cosx} = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - cosx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{sinx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{cosx} = 1.$

3)La règle de l'Hospital reste encore valable pour les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$. Plus précisément on a : Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I contenant x_0 et tels que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4) Signalons que certaines formes indeterminées peuvent être ramener à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.