Chapitre IV :

DEVELOPPEMENTS LIMITES

Plan du chapitre :

1) Formule de Taylor et Variantes

2) Développements Limités

3) Applications au calcul des limites

2) Formule de Taylor :

2.1 : Formule de Taylor :

Si f est un polynôme de degré n càd

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

$f(0) = a_0.$

$$f^{'}(x) = n a_n x^{n-1} + .. + 2a_2 x + a_1$$

$$\Downarrow$$

$$f^{'}(0) = a_1.$$

Aprés k itérations, on obtient $f^{(k)}(0) = k! a_k$

Ainsi f s'ecrit :

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Peut-on généraliser cette propriété à une fonction f "quelconque" ?

Théoréme (Formule de Taylor) Soit f une fonction C^∞ sur $[a,b]$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Si on prend $a = 0$ et $b = x$, on obtient :

$$f(x) =$$

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+..+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Le polynome de Taylor associé à f est :

$$T_n(f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + .. + \frac{f^{(n)}0)}{n!}x^n$$

Le reste est $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Formules de Taylor de quelques fonctions usuelles.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + Ax^{n+1}$

avec $A = \frac{e^c}{(n+1)!}$.

2. $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + Ax^{2p+2}$.

3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + Ax^{2p+1}$.

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + Ax^{n+1}$

avec $A = \frac{1}{(1-c)^{n+2}}$.

5. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - .. - \frac{x^n}{n} + Ax^{n+1}$ avec $A = -\frac{1}{n(1-c)^{n+1}}$.

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ...$

$.. + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + Ax^{n+1}$

avec $A = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}$

a) Pour $\alpha = -1$:

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + Ax^{n+1}$.

b) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + ... + \frac{(-1)n-1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}} + Ax^{n+1}$.

Application au calcul numérique

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + ..$$

$$.. + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Si on pose,

$$g(a) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

L'erreur commise est

$$|f(a+h) - g(a)| = |\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)|$$

$|f^{(n+1)}(c)| \leq M$ sur $]a, a+h[$ on a

$$|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)| < \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Calculer $e^{0,1}$ à 10^{-4} prés.

Développements limités

i) On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, a_1, .., a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

ii) On dit que f admet on D.L d'ordre n au voisinage de x_0 si

$$f(x) =$$

$$a_0 + a_1(x - x_0) + .. + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

avec $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$.

iii) On dit que f admet on D.L d'ordre n au voisinage de ∞ si

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + ...\frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

avec $\varepsilon(\frac{1}{x}) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Unicité du développement limité

Si f admet un D.L d'ordre n en 0 alors il est unique.

DL des fonctions paires et impaires

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 et qui admet le D.L

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

i) Si f est paire alors

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$$

ii) Si f est impaire alors

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$$

Opérations sur les DL

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x),\ g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon(x)$$

i) Somme

$$f(x) + g(x) = (P_n(x) + Q_n(x)) + x^n\varepsilon(x)$$

ii) Produit

$$f(x) \times g(x) = [P_n(x) \times Q_n(x)]\,/(\deg n) + x^n\varepsilon(x)$$

c'est à dire si f et g admettent un développement limité à l'ordre n , au voisinage de x_0, fini ou non, alors fg admet un développement limité à l'ordre n, obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

iii) Quotient

Si $g(0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n. Pour déterminer la partie principale de $\frac{f}{g}$, on fait la division de P par Q suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n.

Remarques :

i) Si g admet un D.L d'ordre n en 0 et que $g(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ admet un D.L d'ordre n en 0.

*ii) Pour calculer le DL d'ordre n de $f.g$, **Il** suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n puis de faire le produit par celui de f et ne conservant que les termes de degré $\leq n$.*

ii) Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut opérer d'une manière analogue, mais on obtient un développement limité généralisé.

iv) Composition

Si f admet un D.L. à l'ordre n en x_0, fini ou non, si le terme constant de f et si g admet un D.L à l'ordre n en $f(x_0)$, alors gof admet un D.L à l'ordre n en x_0, obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.

La technique à utiliser est de remplacer tous les termes en x de la partie principale du DL en 0 de f par la partie principale de g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égale à n.

Théorème de Taylor-Young

Soit f une fonction C^∞ sur I contenant 0 alors f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de 0 de la forme

$$f(x) = f(0)+xf'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+x^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Développement limité des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + .. + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ..$$

$$.. + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Equation de la tangente et sa position

Théorème :
Soit f une fonction qui a le DL limité :

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+(x-x_0)^2\varepsilon((x-x_0)).$$

Alors $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est l'équation de la tangente à la courbe au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. De plus :

1) Si $a_2 > 0$, alors
y se trouve au dessous de $\mathcal{C}_f$.

2) Si $a_2 < 0$, alors
y se trouve au dessus de $\mathcal{C}_f$.

3) Si $a_2 = 0$, on ne peut pas conclure et il faudra donc faire un DL à l'ordre 3 pour étudier le signe de $f(x) - y$.

Calcul des limites

Exemple :
Soit $f(x) = \frac{1}{1-cosx} ln(\frac{sinx}{x})$.

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. On a :

$$\frac{sinx}{x} = \frac{x - x^3/6 + x^3\varepsilon(x)}{x} = 1 - x^2/6 + x^2\varepsilon(x)$$

Donc $ln(\frac{sinx}{x}) = -x^2/6 + x^2\varepsilon(x)$.

On a aussi $1 - cosx = x^2/2 + x^2\varepsilon(x)$.

Donc $f(x) = \frac{-x^2/6 + x^2\varepsilon(x)}{x^2/2 + x^2\varepsilon(x)} = \frac{-1/6+\varepsilon(x)}{1/2+\varepsilon(x)}$.

Par suite $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1/3$

Développements Limités Généralisés

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut être en 0 tel que $x^p f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_{n+p} x^{n+p} + x^{n+p} \varepsilon(x)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + .. + a_{n+p} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de 0 ($\pm\infty$) à l'ordre n. Pour les opérations sur les D.L. généralisés on se ramène aux développements limités usuels.

Pour le D.L. généralisé en ($\pm\infty$) il s'obtient en faisant le changement de variable $t = 1/x$. Ainsi le D.L. généralisé en ($\pm\infty$) sera de la forme :

$$f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + .. + a_{n+p}\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(1/x)$$

Les D.L au voisinage de l'infini ($\pm\infty$) sont utilisés pour l'étude des branches infinies des courbes.

Théorème
Si f admet le DL généralisé en $+\infty$ de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(1/x),$$

alors $y = ax + b$ est l'assymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$. De plus 1) Si $c > 0$, alors
y se trouve au dessous de $\mathcal{C}_f$.
2) Si $c < 0$, alors
y se trouve au dessus de $\mathcal{C}_f$.
3) Si $c = 0$, on ne peut pas conclure directement et il faudra donc faire un DL généralisé à l'ordre 2 .

Exemples :
Soit $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$. pour $x > 0$, on a

$$f(x) = x\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2}$$

En posant $t = 1/x$, on obtient

$$\sqrt{1 + t + t^2} = 1 + \frac{1}{2}(t + t^2) + \frac{-1}{8}(t + t^2)^2 + t^2\varepsilon(t)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + t^2\varepsilon(t)$$

Ainsi

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(1/x)$$

$y = x + \frac{1}{2}$ est l'equation de l'assyptote au voisinage de $+\infty$.
De plus $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de la tangente.