Université Mohammed V

Rabat-Agdal

Département de mathématiques

جامعة محمد الخامس-أكدال
Université Mohammed V-Agdal

كلية العلوم
Faculté des Sciences

Licence de mathématiques

Année 2010/2011

Filière : SMA

Cours

Calcul différentiel

Pr. ELKHATTABI NOHA

Table des matières

Introduction. **3**

Rappels et compléments. **7**

0.1 Espace vectoriel normé. Espace de Banach. 7
0.2 Continuité et algébre multilinéaire. 8
0.3 Le groupe Iso(E,F) et l'application $u \mapsto u^{-1}$ 11

1 Applications différentiables. **13**

1.1 Différentielle en un point et sur un ouvert U. 13
1.2 Dérivée directionnelle. 15
1.3 Dérivée d'une fonction composée. 16
1.4 Opérations sur les dérivées. 17
1.5 Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces 18
1.6 Fonctions définies sur un ouvert d'un produit d'espaces 20
1.7 Combinaison des cas précédents 22

2 Théorème des accroissements finis et applications. **24**

2.1 Fonctions à variables réelles. 24
2.2 Fonctions à variable dans un espace de Banach 26
2.3 Applications 26
2.4 Fonctions strictement différentiables 29

3 Difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$ **31**

3.1 Définition et propriété. 31
3.2 Théorème d'inversion locale 32
3.3 Théorème des fonctions implicites 34

4 Dérivées d'ordre supérieur-Formule de Taylor **36**
4.1 Dérivées d'ordre supérieur 36
4.1.1 Dérivées successives 38
4.2 Formule de Taylor 39
4.2.1 Rappel sur l'intégration des fonctions réglées : 39
4.3 Formules de Taylor 40
4.3.1 Formule de Taylor : Cas particulier 40
4.3.2 Formule de Taylor : Cas général 41

5 Maxima et Minima Relatifs **44**
5.1 Extrema libres. 44
5.2 Extrema liés. 47
5.3 Convexité et minima. 49
5.4 Introduction au calcul des variations. 52

Introduction.

Nous commençons par des rappels sur la notion de dérivée dans le cas le plus simple des fonctions à variables réelles et valeurs réelles.

Définition 0.0.1. (**fonction réelle dérivable**)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.
On dit que f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, admet une limite lorsque x tend vers a. Cette limite, comme toute limite de fonction si elle existe est alors unique ; on la note $f'(a)$. Il s'agit ici d'un nombre réel. On dit que $f'(a)$ est la dérivée de f en a. Si f est dérivable en tout point a de I, on en déduit une fonction $I \ni a \to f'(a) \in \mathbb{R}$, appelée fonction dérivée de f.

Remarquons que, dire que f est dérivable en a, équivaut à dire qu'il existe un réel $f'(a)$, tel que la fonction

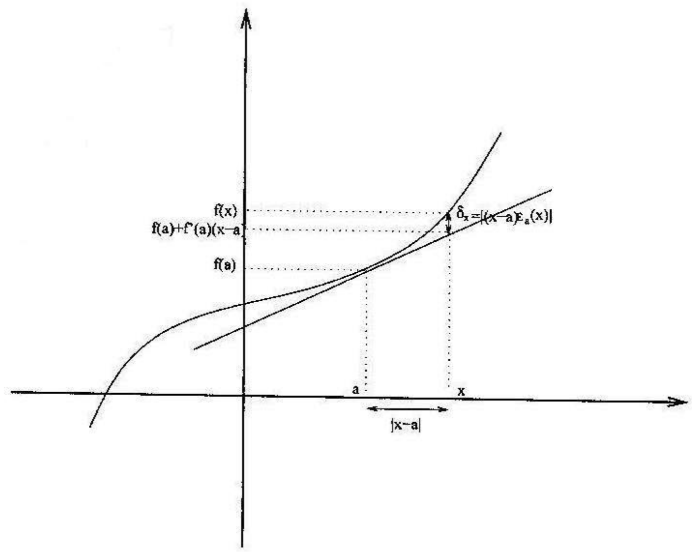
$$I \backslash \{a\} \ni x \mapsto \frac{1}{x - a}[f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)] \in \mathbb{R}$$

tend vers 0 lorsque x tend vers a. Ceci revient encore à dire qu'il existe un réel $f'(a)$ et une fonction $\epsilon_a : I \to \mathbb{R}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers a tels que :

$$\forall x \in I : f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = (x - a)\epsilon_a(x) \qquad (*)$$

Interprétation géométrique.

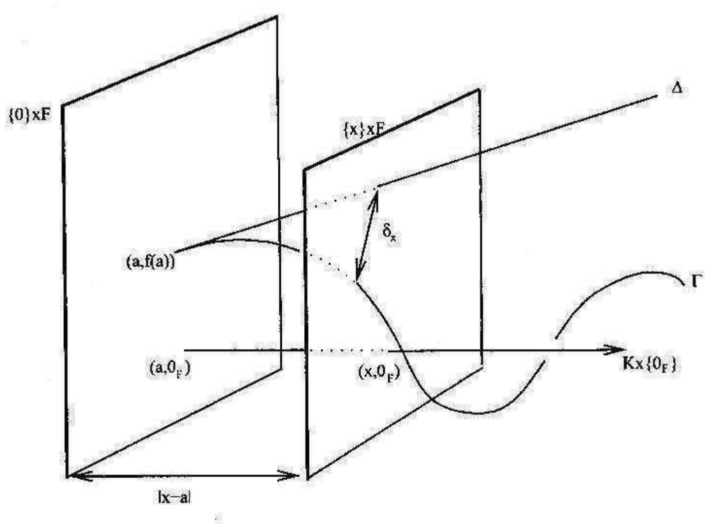
$f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.



Définition 0.0.2. (fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$)
On dit que l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est dérivable en a si et seulement si la fonction $\Omega \backslash \{a\} \ni a \mapsto \dfrac{1}{x-a}[f(x) - f(a)] \in \mathbb{R}^2$ admet une limite en a dans $\mathbb{R}^2$ (nécessairement unique et noté $\overrightarrow{f'}(a)$), ou de façon équivalente si et seulement si il existe un vecteur $\overrightarrow{f'}(a) \in \mathbb{R}^2$ et une application $\epsilon_a : \Omega \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a, tel que :

$$\forall x \in \Omega : f(x) - f(a) = \overrightarrow{f'}(a)(x-a) + |x-a|\epsilon_a(x) \qquad (**)$$

<u>Interprétation géométrique.</u>



Remarque 0.0.3.

1. Dans cette définition, la norme de $\mathbb{R}^2$ intervient (la notion de limite dépend a priori de la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$), la notion de dérivabilité et de dérivée en un point dépend donc a priori de la norme que l'on se donne sur $\mathbb{R}^2$. Mais dans le cas de $\mathbb{R}^2$ toutes les normes étant équivalentes, la dérivabilité et la dérivée de f en un point sont indépendantes de la norme choisie.

2. La définition de dérivabilité $(**)$ n'a plus de sens dès que f est définie sur un espace vectoriel quelconque E, puisque dans ce cas le produit $(x-a).\overrightarrow{f'}$ n'a plus de sens !

3. Le but de ce cours est de donner une notion pertinente de "dérivée", pour les applications à variables dans un espace vectoriel normé E de dimension > 1. Pour cela, on remarquera que l'application $L : \mathbb{K} \ni x \mapsto x.\overrightarrow{f'} \in F$ est linéaire, sur ce modèle on remplacera donc dans le cas générale la définition $(**)$ par : "il existe une application linéaire $L_a : E \to F$, et une application $p_a : \Omega \to F$ qui tend vers 0_F lorsque sa variable tend vers 0_E, telles que :

$$\forall x \in \Omega : f(x) - f(a) = L_a(a)(x-a) + \|x-a\| p_a(x-a).\text{''}$$

Cependant, lorsque la dimension de E est infinie, il se peut qu'une telle application linéaire L_a ne soit pas continue en 0_E. On réclamera alors, dans la définition ci-dessus, afin qu'elle soit plus forte que la continuité de f en a, que l'application linéaire L_a soit continue.

Rappels et compléments.

0.1 Espace vectoriel normé. Espace de Banach.

Définition 0.1.1. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $\rho : E \to \mathbb{R}^+$ ayant les propriétés suivantes :

- $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\forall x, y \in E$

On note souvent $\rho(x) = \|x\|$.

Normes équivalentes :

Définition 0.1.2. Deux normes ρ_1 et ρ_2 sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives M et m telles que

$$\forall x \in E, \quad m\rho_1 \leq \rho_2 \leq M\rho_1.$$

Remarque 0.1.3. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemple 0.1.4. Si $E = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E et ρ est une norme sur E, on a

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \rho(e_i),$$

avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$.

On en déduit que ρ est continue sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne vers $\mathbb{R}$ et par suite elle est bornée sur la boule unité fermée. Il existe donc m et M vérifiant

$$\forall x \in \overline{B(0,1)}, \qquad m \leq \rho(x) \leq M.$$

Par conséquent

$$\forall x \in E, \qquad m\|x\| \leq \rho(x) \leq M\|x\|.$$

Donc toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme euclidienne.

Un **espace vectoriel normé** E (e.v.n) est un e.v muni d'une norme. Soit d la distance définie par $d(x,y) = \|x-y\|$, alors (E,d) est un espace métrique. Si (E,d) est complet, on dit que E est un **espace de Banach**.
Si de plus la norme de E est issue d'un produit scalaire, E est dit **espace de Hilbert**

Définition 0.1.5. (**continuité dans les evn**).
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux e.v.n, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application. on dit que f est continue en a si et seulement si :
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta_\epsilon$, tel que $\forall x$ vérifiant $\|x-a\| \leq \eta_\epsilon$, on ait : $\|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon$.

Clairement, la définition ci-dessus montre que la notion de continuité en un point dépend des normes que l'on se donne sur E et F.

Remarque 0.1.6. Soient E et F deux e.v.n, $f : E \to F$ est une application continue si et seulement si $\forall (x_n)_n \in E \ / \ x_n \to x$ alors $f(x_n) \to f(x)$

0.2 Continuité et algébre multilinéaire.

Proposition 0.2.1. *L'espace des fonctions linéaires et continues de E vers F, $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

est un espace de Banach.

Proposition 0.2.2. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors on a :*
f est continue $\Leftrightarrow \exists k > 0 \ / \ \|f(x)\| \leq k\|x\|$, pour tout x de E.

Cas particulier :

1) Si $E = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe à F par l'application

$$\phi : \mathcal{L}(E, F) \to F$$
$$\varphi \to \varphi(1) = \phi(\varphi)$$

2) Si $F = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace dual de E ou l'ensemble des formes linéaires sur E.

Proposition 0.2.3. *Si E est de dimension finie, alors E est complet et toute application linéaire $f : E \to F$, où F est un e.v.n est continue.*

Définition 0.2.4. (**applications multilinéaires**).
Soient $E_1, ..., E_n$ et F des e.v.n sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$. On dit qu'une application $L : E_1 \times .... \times E_n \to F$ est $n-$linéaire ssi L est linéaire sur chaque facteur, c'est-à-dire ssi pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, pour tout $(a_1, ..., a_n) \in E_1 \times .... \times E_n$, l'application

$$L_j^a : E_j \to F$$
$$h \to L_j^a(h) = L(a_1, ..., a_{j-1}, h, a_{j+1}, ..., a_n)$$

est linéaire.

Remarque 0.2.5. Lorsque $n = 1$, on retrouve la définition d'une application linéaire ($1-$linéaire).

Exemple 0.2.6.
• L'application $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $L(x, y) = xy$ (i.e le produit dans $\mathbb{R}$) est une application $2-$linéaire (on dit bilinéaire) sur $\mathbb{R}$.
• L'application $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $L(\vec{h}, \vec{k}) = 3h_1k_1 - 5h_2k_2 + h_1k_2$, où $\vec{h} = (h_1, h_2)$ et $\vec{k} = (k_1, k_2)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$. En effet fixons $\vec{k} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'application $L^{\vec{k}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{h} = (h_1, h_2) \to L^{\vec{k}}(\vec{h}) = L(\vec{h}, \vec{k}) = 3h_1a - 5h_2b + h_1b$ est linéaire en $\vec{h}$ et pour $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'application $L^{\vec{h}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\vec{k} = (k_1, k_2) \to L^{\vec{h}}(\vec{k}) = L(\vec{h}, \vec{k}) = 3ak_1 - 5bk_2 + ak_2$ est linéaire en $\vec{k}$.
• Soit $E = \mathcal{C}_{00}$ l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et $L : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $L(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_j v_j$ (cette somme est finie, car la suite $\vec{u} = (u_0, u_1, ...,)$ et $\vec{v} = (v_0, v_1, ...,)$ sont nulles à partir d'un certain rang). L est bilinéaire.

On suppose maintenant que chaque espace vectoriel $E_1, ..., E_n, F$ de la définition ci-dessus est un espace vectoriel normé, par la norme (respectivement) : $\|.\|_{E_1}, ..., \|.\|_{E_n}, \|.\|_F$. **On munit alors $E_1 \times ... \times E_n$ de la norme** $\|(x_1, ..., x_n)\| = \max\{\|x_1\|_{E_1}, ..., \|x_n\|_{E_n}\}$.

Exercise 0.2.7. Montrer que $\|.\|$ est bien une norme sur $E_1 \times ... \times E_n$. Montrer ensuite que cette norme est équivalente aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ définie par : $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}$ et $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_{E_i}^2}$. Dans le cas où $n = 2$ et $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, représenter la boule unité de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ associée à la norme $\|.\|$.

Exercise 0.2.8. Montrer que l'application bilinéaire $L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de l'exemple ci-dessus est une application qui vérifie : il existe un réel $\Lambda \geq 0$ tel que quel que soit $(\vec{h}, \vec{k}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; $|L(\vec{h}, \vec{k})| \leq \Lambda \|\vec{h}\|_{\mathbb{R}^2}.\|\vec{k}\|_{\mathbb{R}^2} \leq \Lambda \|(\vec{h}, \vec{k})\|^2$, $\|.\|_{\mathbb{R}^2}$ étant la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. En déduire que L est continue.

Théorème 0.2.9.
Soient $E_1, ..., E_n$ et F des e.v.n et soit $L : E_1 \times ... \times E_n \to F$ une application n-linéaire.
On munit $E_1 \times ... \times E_n$ de la norme $\|(h_1, ..., h_n)\| = \max_{j=1,...,n} (\|h_1\|_{E_1}, ..., \|h_n\|_{E_n})$.
Les propriétés qui suivent sont équivalentes :

1. *L est continue sur $E_1 \times ... \times E_n$.*
2. *L est continue seulement en $(0_{E_1}, ..., 0_{E_n})$.*
3. *L est bornée sur $B_1 \times ... \times B_n$, où B_j désigne la boule unité de E_j.*
4. *L est bornée sur $S_1 \times ... \times S_n$, où S_j désigne la sphère unité de E_j.*
5. *Il existe un réel $\Lambda > 0$, tel que pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$,*
$$\|L(x_1, ..., x_n)\| \leq \Lambda \|x_1\| ... \|x_n\|$$

Définition 0.2.10. On note $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues. Pour tout $L \in E_1 \times ... \times E_n$, on définit la norme de L par :

$$\|L\| = \sup_{(x_1,...,x_n) \in E_1 \setminus \{0\} \times ... \times E_n \setminus \{0\}} \frac{\|L(x_1, ..., x_n)\|}{\|x_1\| ... \|x_n\|}$$

Noter que par multilinéairité :

$$\|L\| = \sup_{(x_1,...,x_n) \in B_1 \setminus \{0\} \times ... \times B_n \setminus \{0\}} \frac{\|L(x_1, ..., x_n)\|}{\|x_1\| ... \|x_n\|}$$

Exercise 0.2.11. Montrer que $\|L\|$ est une quantité qui est bien définie (ie $\|L\| \neq \infty$), en montrant que $\|L\| = \inf\{\Lambda \text{ vérifiant la propriété 5 du théorème précédent}\}$.

Théorème 0.2.12.
$\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Remarque 0.2.13.
Par l'exercice 0.2.8, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n$,

$$\|L(x_1, ..., x_n)\|_F \leq \|L\|.\|x_1\|_{E_1} ... \|x_n\|_{E_n}.$$

Théorème 0.2.14.
Si $E_1, ..., E_n$ sont de dimensions finies, toute application n-linéaire $L : E_1 \times ... \times E_n \to F$ est continue (en particulier toute application linéaire qui part d'un espace de dimension finie est lipschitzienne).

0.3 Le groupe Iso(E,F) et l'application $u \mapsto u^{-1}$

Dans l'optique d'étudier l'existence de certains inverses, nous avons besoin de rappeler des résultats sur les séries convergentes dans les espaces de Banach.

Définition 0.3.1. Soit $(u_n)_n$ une suite dans un espace de Banach E. On dit la série $\sum\limits_n u_n$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 0.3.2.
Si une série est normalement convergente, alors elle est convergente.

Démonstration.
Ceci se justifie par l'inigalité

$$\|\sum u_n\| \leq \sum \|u_n\|,$$

et donc le fait d'être de Cauchy pour l'une dans $\mathbb{R}$ implique que l'autre est aussi de cauchy mais cette fois-ci dans l'espace E qui est de Banach.

$\square$

Nous avons les deux propositions suivantes :

Proposition 0.3.3.
Si E est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,E)$ est de Banach et si $u \in \mathcal{L}(E,E)$ est tel que $\|u\| < 1$, alors $1-u$ est inversible.

Démonstration.
Le premier point a déjà été établi précédemment.
Soit u tel que $\|u\| < 1$. La série $\sum u_n$ est convergente car elle est normalement convergente et si on pose $v = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, alors v vérifie

$$uv = vu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Par suite, $Id = v - uv = (Id-u)v = u = v - vu = v(Id-u)$ ce qui prouve que $1-u$ est inversible. □

Proposition 0.3.4.
1. $Iso(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E,E)$. (F est supposé de Banach)
2. L'application $u \mapsto u^{-1}$ est continue.

Démonstration.
Pour montrer qu'il s'agit d'un ouvert, il suffit de montrer que $u_0^{-1}u$ est inversible si u est proche de $u_0 \in \mathcal{L}(E,E)$. D'après le résultat précédent, il suffit de vérifier que $\|1-u_0^{-1}u\| < 1$ si u est suffisamment proche de u_0.
Or $1-u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0-u)$, d'où en passant aux normes

$$\|1-u_0^{-1}u\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0-u\|.$$

Ainsi si on suppose que $\|u_0-u\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$, alors on aura $u_0^{-1}u$ inversible et par suite u est inversible.
Pour l'autre point, on pose $u = u_0(1-v)$ avec $\|v\| < 1$.
On a $u^{-1} = (1-v)^{-1}u_0^{-1}$, d'où on déduit

$$\|u_0^{-1} - u^{-1}\| \leq \frac{\|u\|}{1-\|v\|} \qquad (*)$$

et quand u tend vers u_0, v tend vers 0 ($v = 1-u_0^{-1}$) donc $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\|\|u_0-u\|$) et, en vertu de $(*)$, u^{-1} tend vers u_0^{-1}. D'où la continuité. □

Chapitre 1

Applications différentiables.

1.1 Différentielle en un point et sur un ouvert U.

Définition 1.1.1. Soient E et F deux e.v.n et U un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est dite différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\|f(a+u) - f(a) - L(u)\| = o(\|u\|). \tag{1.1}$$

L est appelée la dérivée de f au point a et noté $f'(a)$, ou $Df(a)$

Remarque 1.1.2.
Si f est différentiable en a alors sa dérivée en a est unique. En effet supposons que f admette deux dérivées L et $K \in \mathcal{L}(E, F)$, au point a on aura alors : $\|(L-K)\| = o(\|u\|)$ i.e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\|u\| \leq \delta \Rightarrow \|(L-K)\| \leq \varepsilon \|u\|$. Alors $\forall x \in E$, $x \neq 0$ en prenant $u = \delta \dfrac{x}{\|x\|}$ on obtient $\|(L-K)(x)\| = 0$.

Définition 1.1.3. On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U.
On peut alors définir <u>*l'application dérivée de f*</u>

$$f' : U \to \mathcal{L}(E, F)$$
$$a \to f'(a)$$

Remarque 1.1.4.
Si f est différentiable en a alors f est continue en a. Cela découle de (1.1) et de la continuité de $f'(a)$.

Exemple 1.1.5.

1. Si $E = \mathbb{R}$ on a $\mathcal{L}(E, F) \simeq F$ $(f \to f(1))$
   f est différentiable en $a \Leftrightarrow \exists c \in F$ tel que $\|f(a+u) - f(a) - uc\| = o(\|u\|)$.
2. Si f est linéaire alors $f'(a) = f$ pour tout a.
3. Soit E un e.v.n et U un ouvert de E. Si $f : U \to F$ est constante, elle est différentiable sur U, et $f'(u) = 0$, pour tout u de U.

Proposition 1.1.6. *Soient $E_1, ..., E_n, F$, des espaces vectoriels normés, $n \geq 1$, et $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ une application $n-$linéaire continue. Alors f est différentiable et sa différentielle est :*

$$Df_{(a)} : E_1 \times ... \times E_n \to F$$
$$(\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)) \to f(\vec{h}_1, a_2, ..., a_n) + ... + f(a_1, ..., a_{n-1} + \vec{h}_n)$$

Démonstration. Si $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ est une application multilinéaire continue.
$f(a+\vec{h}) - f(a) = f((a_1, ..., a_n) + (\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n)) - f(a_1, ..., a_n) = f(\vec{h}_1, a_2, ..., a_n) + ... + f(a_1, ..., a_{n-A} + \vec{h}_n) + f^*$, où f^* est une somme de termes du type $f(*_1, ..., *_n)$, avec au moins deux h_j comme argument, et des a_k pour compléter. Or

$$(\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n) \mapsto f(\vec{h}_1, a_2, ..., a_n) + ... + f(a_1, ..., a_{n-1}, \vec{h}_n)$$

est linéaire continue et $\|f(*_1, ..., *_n)\| \leq \|f\|.\|\vec{h}\|^k.(\max_j \|a_j\|)^{n-k}$, où $k(\geq 2)$ est le nombre de composantes de $\vec{h}$ figurant dans $f(*_1, ..., *_n)$.
En notant $A = \max_k(\max_j \|a_j\|)^{n-k}$, on obtient : $\|f(*_1, ..., *_n) \leq \|f\|.\|\vec{h}\|^k.A$, avec $k \geq 2$. Enfin comme le nombre de termes du type $f(*_1, ..., *_n)$ dans f^* ne dépend que de n (il est égale à $2^n - 1 - n$), on a montré que $\|f^*\| = \|\vec{h}\|.\epsilon(\vec{h})$, avec $\epsilon(\vec{h}) \to 0$ quand $\vec{h} \to 0$. □

Définition 1.1.7. On dit que $f : U \to F$ est continûment différentiable sur U ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si

- f est différentiable sur U, et
- $f' : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|')$, U un ouvert de E et $f : U \to F$ continue. Munissons E de la norme $\|.\|_1$ équivalente à $\|.\|$ et F de la norme $\|.\|_1'$ équivalente à $\|.\|'$ alors U reste ouvert, f reste continue et nous avons :

Proposition 1.1.8. *Si f est différentiable en un point a de U pour les anciennes normes, f l'est aussi pour les nouvelles normes et sa dérivée est la même.*

1.2 Dérivée directionnelle.

Définition 1.2.1. Soit $f : U \to F$ et $a \in U$.
On dit que f admet au point a une dérivée directionnelle suivant la direction $h \in E$ si et seulement si l'application $t \to f(a + th)$ de variable scalaire est dérivable en $0 \in \mathbb{K}$.
Si cette dérivée existe, en tant que limite, elle est unique ; on la note alors $D_{\vec{h}} f(a)$.

Exemple 1.2.2.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{y^3}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$. Cette fonction admet des dérivées directionnelles suivant toutes les directions à l'origine, cependant f n'est pas continue en $(0, 0)$. Soit en effet $\vec{h} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f((0, 0)+t\vec{h})-f(0, 0) = f(ta, tb) = t^3b^3/ta$ si $a \neq 0$, et 0 si $a = 0$. Donc quel soit $\vec{h}$, $D_{\vec{h}} f(0, 0)$ existe et vaut 0. Or la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = (t^3, t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en $t = 0$ et $\gamma(0) = (0, 0)$. Donc si f était continue en $(0, 0)$, $f \circ \gamma$ serait continue en 0. Mais $(f \circ \gamma)(t) = 1$ et $(f \circ \gamma)(0) = 0$: $\lim\limits_{t\to 0}(f \circ \gamma)(t) \neq (f \circ \gamma)(0)$ et f n'est pas continue en $(0, 0)$.

b) Exemple de fonctions non différentiables en un point, mais continue et admettant qu'en ce point toutes ses dérivées directionnelles $D_{\vec{h}}\nu(a)$ sont linéaires et continues par rapport à $\vec{h}$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^4} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ et } f(0, 0) = 0$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2 \text{ si } y = x^2, \text{ et } f(0, 0) = 0 \text{ sinon}$$

Nous allons maintenant vérifier que la différentiabilité est une notion plus forte que l'existence des dérivées directionnelles suivant toutes les directions. Supposons f différentiable en a. Pour tout t suffisamment petit, $a + t.\vec{h} \in U$, puisque U est un ouvert de E, nous pouvons alors écrire :

$$f(a + t.\vec{h}) - f(a) = t.L_a(\vec{h}) + |t|.\|\vec{h}\|.\epsilon_a(a + t.\vec{h})$$

de sorte qu'en faisant tendre t vers 0, on obtient l'existence de la dérivée directionnelle $D_{\vec{h}}f_{(a)}$, et $L_a(\vec{h}) = D_{\vec{h}}f_{(a)}$. D'où la proposition :

Proposition 1.2.3. *Si f est différentiable en a, f admet en a des dérivées directionnelles suivant toutes les directions, la différentielle L_a (et par conséquent l'application ϵ_a) est unique, on la note $Df_{(a)}$ et on a l'égalité :*

$$Df_{(a)}(\vec{h}) = D_{\vec{h}}f_{(a)}$$

1.3 Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 1.3.1. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et V un ouvert de F.*
Soient $f : U \to F$, $g : V \to G$, $a \in U$ et $b = f(a) \in V$.
Si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $b = f(a)$, alors $h = g \circ f$ est différentiable au point a et on a :

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a)$$

Démonstration. On a :
$f(a + u) - f(a) - f'(a)u = \varphi(u)$ où $\|\varphi(u)\| = o(\|u\|)$
et $g(b + v) - g(b) - g'(b)v = \psi(v)$ où $\|\psi(v)\| = o(\|v\|)$
d'où

$$g(f(a + u)) - g(f(a)) - g'(b).[f(a + u) - f(a)] = \psi(f(a + u) - f(a))$$

c'est à dire

$$h(a + u) - h(a) - g'(b).[f'(a).u + \varphi(u)] = \psi(f(a + u) - f(a))$$

donc

$$h(a + u) - h(a) - (g'(b) \circ f'(a)).u = \psi(f(a + u) - f(a)) + g'(b)\varphi(u)$$

il suffit donc de démontrer que

$$\|g'(b)\varphi(u) + \psi(f(a+u) - f(a))\| = o(\|u\|)$$

or $\dfrac{\|g'(b)\varphi(u)\|}{\|u\|} \leq \|g'(b)\|.\dfrac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|} \to 0$ lorsque $\|u\| \to 0$
et

$$\frac{\|\psi(f(a+u) - f(a))\|}{\|u\|} = \underbrace{\frac{\|\psi(f(a+u) - f(a))\|}{\|f(a+u) - f(a)\|}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} . \frac{\|f(a+u) - f(a)\|}{\|u\|} \quad \text{lorsque } u \to 0.$$

et

$$\frac{\|f(a+u) - f(a)\|}{\|u\|} \leq \|f'(a)\| + \frac{\|\varphi(u)\|}{\|u\|}$$

$$\frac{\|g'(b)\varphi(u) + \psi(f(a+u) - f(a))\|}{\|u\|} \leq \frac{\|g'(b)\varphi(u)\|}{\|u\|} + \frac{\|\psi(f(a+u) - f(a))\|}{\|u\|}$$

□

1.4 Opérations sur les dérivées.

Proposition 1.4.1.
Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, et $a \in E$. Si U est un ouvert de E, $f, g : U \to F$ deux applications différentiables en a, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont aussi différentiables en a, et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$, $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

On en conclut que l'ensemble des applications différentiables en un point a de E est un sous espace vectoriel de l'espace des applications continues en a, on le note $\mathcal{D}(a)$. De plus, l'application qui a chaque $f \in \mathcal{D}(a)$ associe $f'(a)$ est une application linéaire.
Même énoncé pour les applications différentiables sur un ouvert donné de E.

Démonstration. La preuve se fait directement en écrivant la définition de différentiabilité. □

Proposition 1.4.2. *(Dérivée d'un produit de deux applications)*
Soit $f, g : U \subset E \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ deux applications différentiables sur U. On

définit l'application produit fg de la manière suivante :

$$\begin{aligned} fg : U \subset E &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x)g(x), \end{aligned}$$

alors fg est différentiable et $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

Démonstration. On décompose fg en :

$$\begin{aligned} \gamma : U &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x &\to (f(x), g(x)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (f(x), g(x)) &\to f(x).g(x), \end{aligned}$$

Alors on a

• γ est différentiable et $\gamma'(x) = (f'(x), g'(x))$

• ϕ est bilinéaire et continue donc différentiable et on a

$$\varphi'(a, b)(h_1, h_2) = \varphi(a, h_2) + \varphi(h_1, b)$$

• $fg = \phi \circ \gamma$ donc fg est différentiable et on a

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \phi'(\gamma(x)) \circ \gamma'(x). \\ &= \phi'(f(x), g(x)).(f'(x), g'(x)) \\ &= \phi(f'x), g'(x)) + \phi(f'(x), g(x)) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \end{aligned}$$

□

1.5 Fonctions à valeurs dans un produit d'espaces

Soient $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_k$, et $U \subset E$ ouvert.

On définit les applications linéaires et continues

$$\begin{aligned} \phi_i : F &\to F_i \\ y = (y_1, ..., y_k) &\mapsto y_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_i : F_i &\to F \\ y_i &\mapsto (0, 0, .., y_i, 0, .., 0) \end{aligned}$$

On a alors $\phi_i \circ q_i = 1_{F_i}$ et $\sum_{i=1}^{k} q_i \circ \phi_i = 1_F$

Proposition 1.5.1. *Soit $f : U \to F$ continue et $a \in U$.*

f est différentiable en a $\Leftrightarrow \forall i$ $f_i = \phi_i \circ f : U \to F_i$ est différentiable en a,

et alors $f'(a) = \sum_{i=1}^{k} q_i \circ f_i'(a)$

Démonstration. ($\Rightarrow$) si f est différentiable en a.
$f_i = \phi_i \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$f_i^{'}(a) = \phi_i^{'}(f(a)) \circ f'(a) = \phi_i \circ f'(a)$$

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \circ f_i'(a) = \sum_{i=1}^{k} q_i \circ \phi_i \circ f'(a) = f'(a)$$

($\Leftarrow$) si f_i est différentiable,
on a $f = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i \circ f_i$ est différentiable et $f'(a) = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i \circ f_i'(a)$. $\square$

Exercise 1.5.2. Soit $f : U \to F$ une application, où E et F sont deux espaces vectoriel normés, F étant de dimension finie, et où U est un ouvert de E. Soient, $a \in U$ et $\mathcal{E}_F = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m)$ une base de F. Si on écrit $f(x) = f_1(x).\vec{e}_1 + ... + f_m(x).\vec{e}_m$ (les composantes de $f(x)$ dans la base $\mathcal{E}_F$), cette écriture définit les composantes $(f_j)_{j\in\{1,...,m\}}$ de f dans la base de $\mathcal{E}_F$, i.e : $f = \sum\limits_{j=1}^{m} f_j\vec{e}_j$. Montrer que f est différentiable en a si et seulement si f_j le sont et montrer qu'alors $Df(a) = \sum\limits_{j=1}^{m} Df_j(a)\vec{e}_j$.

Considérons maintenant le cas où E et F sont de dimensions respectives n et m, et choisissons un couple de bases $\mathcal{E}_E$ et $\mathcal{E}_F$, pour respectivement E et F.

Soient alors U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application différentiable en a. Sa différentielle $Df(a) : E \to F$ étant une application linéaire de E dans F, on peut lui associer une unique matrice $n \times m$ qui la représente, dans les bases $\mathcal{E}_E$ et $\mathcal{E}_F$. Notons-la $J(f)_{(\mathcal{E}_E,\mathcal{E}_F)}(a)$ ou plus simplement $J(f)(a)$, sans ambiguité.
Si $\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$ est un vecteur de E écrit dans $\mathcal{E}_E$, on a :

$$[Df(a)(\vec{h})]_{\mathcal{E}_F} = J(f)(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Par l'exercice précédent :

$$[Df(a)(\vec{h})]_{\mathcal{E}_F} = [\sum_{j=1}^{m} Df_j(a)(\vec{h})\vec{e}_j]_{\mathcal{E}_F} = \begin{pmatrix} Df_1(a)(\vec{h}) \\ \vdots \\ Df_m(a)(\vec{h}) \end{pmatrix} = J(f)(a)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

de sorte que l'élément de $J(f)(a)$ qui se trouve à la j^{eme} ligne et la k^{eme} colonne est $Df_j(a)(\vec{e}_k) = D_{\vec{e}_k} f_j(a) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$.

Théorème 1.5.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension respectivement n et m, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$ une application différentiable en a. Si on fixe deux bases $\mathcal{E}_E$ et $\mathcal{E}_F$ respectivement de E et F, la matrice associée à $Df(a) : E \to F$ dans ces bases est notée $Jac(f)(a)$. On l'appelle la matrice jacobienne de f en a. Ces coefficients sont donnés par :*

$$Jac(f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

où f_j est la j^{eme} composante de f dans $\mathcal{E}_E$.

Le théorème 1.3.1 donne immédiatement (dim(G)=p) :

$$Jac(g \circ f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_m}(f(a)) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

1.6 Fonctions définies sur un ouvert d'un produit d'espaces

Soient $E = E_1 \times ... \times E_n$, où E_i sont des e.v.n, $i = 1, ..., n$ et U un ouvert de E.
Soit $f : U \to F$ une application continue.
Pour chaque $a = (a_1, ..., a_n) \in E$, on considère l'injection
$\gamma_i : E_i \to F$ définie par $\gamma_i(x_i) = (a_i, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$
L'application composée $f \circ \gamma_i$ est appelée i^{eme} application partielle au point a.
Si f est différentiable au point a, alors pour tout i avec $1 \leq i \leq n$, $f \circ \gamma_i$ est

différentiable au point a_i et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sa dérivée ($\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$) qu'on appelle i^{eme} dérivée partielle de f en a.
On a d'autre part :

$$f'(a)(h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$$

En effet

$$\gamma_i(x_i) = (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0) + (a_1, a_2, ..., 0, ...a_n)$$

donc $\gamma_i^{'}(x_i) = r_i$ où $r_i(x_i) = (0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$ et $(f \circ \gamma_i)'(a_i) = f'(a) \circ r_i \Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i = f'(a)$ avec $p_i(x) = x_i$.

Proposition 1.6.1. *Si f est différentiable dans U alors*
f est de classe $\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathcal{L}(E_i, F)$ sont continues.

Démonstration.
($\Rightarrow$) Soit $L : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E_i, F)$
$\varphi \mapsto \varphi \circ r_i$
alors L est linéaire et continue et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a) \circ r_i = (L \circ f)'(a).$$

($\Leftarrow$) Soit $r : \mathcal{L}(E_i, F) \to \mathcal{L}(E, F)$
$\varphi \mapsto \varphi \circ p_i$
alors r est linéaire et continue et on a :

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \circ p_i = \sum_{i=1}^{n} r \circ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

□

Remarque 1.6.2. Si $E = \mathbb{R}^n$, la i^{eme} dérivée partielle de f au point a n'est autre que la dérivée directionnelle de f dans la direction e_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Il en est de même si E est de dimension finie de base $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$.

Exemple 1.6.3. • Calculons la deuxième dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y, z) = sin(xy) - z/y^2$, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, au point $(1, 1, 1)$. Pour cela on fixe les premières et troixième coordonnées de (x, y, z) dans la base canonique et on libère la deuxième. On obtient la deuxième fonction partielle de f en $(1, 1, 1)$: $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(1, y, 1) = sin(y) - 1/y^2$. $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1)$ est la dérivée de cette fonction en $y = 1$, soit $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1, 1, 1) = \cos(1) + 2$

• Soit E l'espace vectoriel des polynômes d'une seule variable et de degré ≤ 2. Cet espace est de dimension 3. Soit la base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = X, \vec{e}_3 = X^2)$ de E. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$, définie par $E \ni P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 \mapsto \sin(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) + \cos(\alpha_0)\alpha_0^3 \in \mathbb{R}$. Calculons la troixième dérivée partielle de f dans la base $\mathcal{E}$ au point $Q = 1 + X^2$. La troixième application partielle de f en Q est : $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(Q + x.X^2) = f(1 + (1 + x)X^2) = \sin(1 + x) + \cos(1)(1 + x)^3$. Sa dérivée en $x = 0$ est donc $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_3}(Q) = 4\cos(1)$

1.7 Combinaison des cas précédents

Si $f : U \to F_1 \times ... \times F_n$ avec $U \subset E_1 \times ... \times E_n$

$$\begin{array}{ll} p_i : E \to E_i & q_i : F_i \to F \\ \quad x \mapsto x_i & \quad y_i \mapsto (0, 0, .., y_i, 0, .., 0) \end{array}$$

On a alors, si on suppose que f est dérivable en $a \in U$:

$$f'(a) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} q_i \circ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ p_j$$

où $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in \mathcal{L}(E_j, F_i)$.

Exercise 1.7.1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{l} f : U \subset E \to F \\ \qquad u \to u^{-1} \end{array}$$

est différentiable, où $E = \mathcal{L}(X, Y)$, $F = \mathcal{L}(Y, X)$ et $U = Iso(X, Y)$.

Supposons que f est différentiable, et considèrons l'application

$$\begin{aligned} \phi : E \times F &\to \mathcal{L}(X,Y) \\ (u,v) &\to v \circ u \end{aligned}$$

ϕ est bilinéaire et continue et on a $\phi(u, f(u)) = id_X$,
donc $\phi'(u,v)(h_1,h_2) = \phi(u,h_2) + \phi(h_1,v)$

$$\begin{aligned} &\phi(u, f'(u)).(h, f'(u).h) = 0 \\ &\phi(u, f'(u).h) + \phi(h, f(u)) = 0 \\ &(f'(u).h) \circ u = -f(u) \circ h \\ &f'(u).h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que f est différentiable.
Soit $u \in U$.
On a
$$\begin{aligned} (u+h)^{-1} - u^{-1} &= [(u+h)^{-1} \circ u - \mathbb{I}_X]u^{-1} \\ &= (u+h)^{-1}(u - u - h)u^{-1} \\ &= -(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} \end{aligned}$$
d'où
$$\begin{aligned} \|f(u+h) - f(u) + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\| &= \| -(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\| \\ &= \|[u^{-1} - (u+h)^{-1}] \circ h \circ u^{-1}\| \\ &\leq \|[u^{-1} - (u+h)^{-1}]\| \|h\| \|u^{-1}\| \end{aligned}$$
comme $u \to u^{-1}$ est continue $\|f(u+h) - f(u) + u^{-1} \circ h \circ u^{-1}\| = o(\|h\|)$.
Donc f est différentiable et $f'(u).h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis et applications.

2.1 Fonctions à variables réelles.

Théorème 2.1.1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a, b] \to F$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et différentiables sur $]a, b[$ telles que :*

$$\|f'(x)\| \leq g'(x), \qquad a < x < b.$$

Alors on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $U = \{x \in [a, b] / \|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\}$.
Montrons que U est vide. (Ensuite prendre $x = b$ et $\varepsilon \to 0$)

- U est un ouvert, en effet $U = \{x \in [a, b] / \varphi(x) > 0\}$ avec $\varphi(x) = \|f(x) - f(a)\| - g(x) + g(a) - \varepsilon(x - a) - \varepsilon\}$ et φ est continue. $U = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$.
- Supposons que $U \neq \emptyset$. Soit $c = \inf U$, alors
  - $c > a$ (car $\varphi(a) = -\varepsilon > 0$ et φ est continue.)
  - $c \notin U$ (car U est un ouvert)
  - $c < b$ (car sinon $U = \{b\}$ fermé)

Donc $a < c < b$ et ainsi on a :

$$\|f'(c)\| \leq g'(c). \qquad (1)$$

Il découle de la dérivabilité de f et de g l'existence d'un intervalle $[c, c+\eta]$ ($\eta > 0$) dans lequel on a :

$$\|f'(c)\| \geq \|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\| - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

$$g'(c) \leq \|\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

(1), (2) et (3) entraîne

$$\|f(x) - f(c)\| \leq g(x) - g(c) + \varepsilon(x-c).$$

et comme $c \notin U$ on a :

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon.$$

Ce qui donne finalement pour tout $x \in [c, c+\eta]$,

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon.$$

c-à-d $[c, c+\eta] \subset U^c$ ce qui contredit le fait que c est la borne inf de U. □

Remarque 2.1.2. Le théorème précédent reste valable si on remplace la différentiablité de f et g par la différentiabilité à droite.

Définition 2.1.3. On dit que $f : [a, b] \to F$ est dérivable à droite en $x \in [a, b[$ si et seulement si :

$$f'_d(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe.

Corollaire 2.1.4. *Soit $f : [a, b] \to F$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que :*

$$\|f'(x)\| \leq k \ (k > 0 \text{ constante})$$

Alors on a :

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k(b-a),$$

et plus généralement on a :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

2.2 Fonctions à variable dans un espace de Banach

Soit U un ouvert d'un espace de Banach E, F un espace de Banach et $f : U \to F$ continue.

Proposition 2.2.1. *Si f est différentiable dans U et si pour tout a et b de U, $[a, b] = \{x \in U / \exists t \in [0, 1] : x = (1-t)a + tb\} \subseteq U$, alors on a :*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'((1-t)a + tb)\|$$

Démonstration. Soit $h(t) = f((1-t)a + tb)$. Alors h est différentiable et on a : $h'(t) = f'((1-t)a + tb).(b - a)$, d'où

$$\|h'(t)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'((1-t)a + tb)\|.\|b - a\|$$

appliquer ensuite le corollaire. $\square$

Théorème 2.2.2. *Soit U un ouvert convexe de E (e.v.n) et $f : U \to F$ une application différentiable. Supposons que $\|f'(x)\| \leq k$ pour tout x de U. Alors,*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in U$$

2.3 Applications

Théorème 2.3.1. *Soit U un ouvert convexe de E (e.v.n) et soit $f_n : U \to F$ où F est de Banach. Supposons que*

i) Il existe $a \in U$ tel que $(f_n(a))_n$ converge dans F.

ii) La suite $f_n^{'} : U \to \mathcal{L}(E, F)$ converge uniformément dans U vers $g : U \to \mathcal{L}(E, F)$

Alors pour tout x de U, $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x) \in F$.
f est différentiable et sa dérivée $f'(x) = g(x)$

Démonstration. D'après le théorème précédent on a :

$$\|f_p(x) - f_p(a) - (f_q(x) - f_q(a))\| \leq \|x - a\| \sup_{y \in U} \|f_p^{'}(y) - f_q^{'}(y)\| \qquad (4)$$

$ii) \Rightarrow$ le second membre tend vers 0 lorsque p et q tend vers $+\infty$ pourvu que $\|x-a\|$ reste borné. Dans ce cas la suite $(f_n(x)-f_n(a))_n$ est de Cauchy donc convergente, or on sait que $(f_n(a))$ converge donc la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$, uniformément sur tout borné de U
(car $\|f_p(x)-f(x)\| \leq \|f_p(x)-f_p(a)-(f(x)-f(a))\| + \|(f_p(a)-f(a))\|$)
f est donc continue au voisinage de chacun de ces points donc continue.
Reste à montrer la différentiabilité de f et que $f' = g$.
On a $\|f(x)-f(x_0)-g(x_0).(x-x_0)\| \leq \|f(x)-f(x_0)-(f_n(x)-f_n(x_0))\| + \|f_n(x)-f_n(x_0)-f_n^{'}(x_0).(x-x_0)\| + \|f_n^{'}(x_0).(x-x_0)-g(x_0).(x-x_0)\|$
Soit $\varepsilon > 0$. Il découle de la relation (4) en remplaçant a par x_0 que : $\exists n_0$ tel que $p > 0$ et $n > n_0 \Rightarrow$

$$\|f_p(x)-f_p(x_0)-(f_n(x)-f_n(x_0))\| \leq \varepsilon\|x-x_0\|$$

d'où en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$

$$\|f(x)-f(x_0)-(f_n(x)-f_n(x_0))\| \leq \varepsilon\|x-x_0\|$$

D'autre part pour $n \geq n_0$ on a :

$$\|f_n^{'}(x_0).(x-x_0)-g(x_0).(x-x_0)\| \leq \|f_n^{'}(x_0)-g(x_0)\|.\|(x-x_0)\| \leq \varepsilon\|x-x_0\|$$

et on sait que

$$\|f_n(x)-f_n(x_0)-f_n^{'}(x_0).(x-x_0)\| = o(\|x-x_0\|)$$

En fixant $n \geq n_0$ on obtient donc

$$\|f(x)-f(x_0)-g(x_0).(x-x_0)\| = o(\|x-x_0\|).$$

□

Théorème 2.3.2. *Soit U un ouvert de $E = E_1 \times ... \times E_n$ et $f : U \to F$ une application continue.*
Pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ il faut et il suffit que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathcal{L}(E_i, F)$ existent et soient continues.

Démonstration. Nous avons déjà démontré que la condition était nécessaire (prop.1.6.1). Supposons donc que pour tout $a \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent et que

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathcal{L}(E_i, F)$ soient continues. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ il suffira de démontrer que f est différentiable (prop.1.6.1).
Soit $a \in U$, montrons que $f'(a)$ existe, i.e que

$$\|f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).(x_i - a_i)\| = o(\|x - a\|)$$

or on a :
$\|f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).(x_i - a_i)\| \leq \|f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).(x_1 - a_1)\| + \|f(a_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).(x_2 - a_2)\|$
$\ldots + \|f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).(x_n - a_n)\|$
Soit l'application $f : E_1 \to F$ définie par :

$$g(\xi_1) = f(\xi_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a).(\xi_1 - a_1)$$

Etant donné $\varepsilon > 0$ on veut montrer que :

$$\|g(x_1) - g(a_1)\| \leq \varepsilon \|x_1 - a_1\|$$

g est différentiable et on a :

$$g'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

Si $\xi_1 = (1-t)a_1 + tx_1$, $0 \leq t \leq 1$. Alors la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ au point a implique $\exists \eta > 0 / \|x - a\| < \eta$ d'où $\|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\| < \varepsilon$
ainsi, $\|\xi_1 - a_1\| \leq \|x_1 - a_1\| \leq \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|g'(\xi_1)\| \leq \varepsilon$
En appliquant le théorème des accroissement finis (Prop.2.2.1) on obtient :

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'((1-t)x_1 + tx_2)\|.\|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon.\|x_2 - x_1\|$$

On montre d'une manière analogue que :

$$\|f(a_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).(x_2 - a_2)\| = o(\|x_2 - a_2\|)$$

$$\|f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).(x_n - a_n)\| = o(\|x_n - a_n\|)$$

et on obtient le résultat cherché. $\square$

Remarque 2.3.3. Une fonction peut être différentiable en un point sans que les dérivées partielles soient continues en ce point !

Exemple 2.3.4.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
et si $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) - (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})\cos(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues au points $(0,0)$ car si $x > 0$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = 2x\sin(\frac{1}{x\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{x\sqrt{2}})$$

n'a pas de limite au point 0.
Mais f est différentiable au point $(0,0)$ car on a :

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0)|}{\|(x,y)\|} = \sqrt{(x^2+y^2)}|\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})| \leq \|(x,y)\|.$$

2.4 Fonctions strictement différentiables

Définition 2.4.1. $f : U \to F$ est strictement différentiable au point $a \in U$ si on a $f(x) - f(y) = f'(a)(x-y) + \|x-y\|\psi(x,y)$ avec $\|\psi(x,y)\| \to 0$ lorsque $x \to a$ et $y \to a$

Théorème 2.4.2.
Si $f : U \to F$ est différentiable et si f' est continue au point $a \in U$, alors f est strictement différentiable en a.

Démonstration. Considérer $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a).(x-a)$.
On a $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ donc $\lim_{x \to a} \|g'(x)\| = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists r > 0$ tel que $\|x - a\| \leq r \Rightarrow \|g'(x)\| \leq \varepsilon$.
Appliquer le théorème des accroissements finis. $\square$

Chapitre 3

Difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$

3.1 Définition et propriété.

Définition 3.1.1. Soit E et F deux espaces de Banach, U une ouvert de E et V un ouvert de F. On dit que $f : U \to V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f^{-1} : V \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemple 3.1.2. La fonction tan $:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme

Contre exemple 3.1.3. La fonction $x \to x^3$ n'est pas un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit bijective et continûment différentiable. Sa réciproque n'est pas différentiable en 0.

Proposition 3.1.4. *Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme, sa différentielle en tout point de U est un isomorphise de E sur F, f^{-1} est différentiable en tout point y de V est on a :*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$. On a par définition $g \circ f = id_U$ et $f \circ g = id_V$, d'où en appliquant la régle de dérivation des fonctions composées (théorème 1.3.1) on obtient $g'(f(x)) \circ f'(x) = id_E$ et $f'(g(y)) \circ g'(y) = id_F$, pour tout $x \in U$ et $y = f(x)$. D'où le résultat. $\square$

Corollaire 3.1.5. *S'il existe un difféomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de F, alors E et F sont isomorphes. En particulier si l'un est de dimension finie, l'autre l'est aussi et sa dimension est la même.*

3.2 Théorème d'inversion locale

Avant d'énoncer le théorème d'inversion locale nous allons démontrer les deux propositions :

Proposition 3.2.1. *Soit $f : B(a,r) \to E$ ($B(a,r)$ boule ouverte de centre a et de rayon r dans E), une application continue telle que : $\varphi(x) = x - f(x)$ soit contractante ($k-$lipschitzienne avec $k < 1$) et soit $b = f(a)$. Alors il existe un ouvert U contenant a et contenu dans $B(a,r)$, tel que f soit un homéomorphisme de V sur la boule $B(b,(1-k)r)$. De plus f^{-1} est $\dfrac{1}{1-k}-$lipschitzienne.*

Démonstration. Montrons d'abord que $B(b,(1-k)r) \subset f(B(a,r))$.
Pour cela étant donné $y \in B(b,(1-k)r)$ on définit

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_1 = y + \varphi(x_0), \\ \vdots, \\ x_{n+1} = y + \varphi(x_n), \end{cases}$$

Pour que cette suite soit bien définie on doit montrer que $x_n \in B(a,r)$ pour tout n.
Par reccurence sur n montrons que :

$$\|x_n - a\| \leq \frac{1-k^n}{1-k}\|y-b\| \qquad \textbf{(1)}$$

• pour $n = 1$, $\|x_n - a\| = \|y + \varphi(a) - a\| = \|y - b\|$.
• Supposons (1) vrai pour n
On a $\|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) \leq k\|x_n - x_{n-1}\|$
d'où $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - a\| \leq k^n\|y - b\| \qquad \textbf{(2)}$
Ainsi $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_n - a\| + \|x_{n+1} - x_n\|$

$$\leq \frac{1-k^n}{1-k}\|y-b\| + k^n\|y-b\|$$

$$\leq \frac{1-k^{n+1}}{1-k}\|y-b\|$$

(x_n) est donc une suite de Cauchy qui converge vers $x \in B(a,r)$ car par passage à la limite on obtient $\|x - a\| \leq \frac{1}{1-k}\|y - b\| < r$.
Nous allons donc démontrer que pour tout y de $B(b,(1-k)r)$, il existe un x

de $B(a,r)$ tel que $y = f(x)$. Montrons que cet x est unique.
Supposons qu'il existe x' de $B(a,r)$ tel que $y = f(x')$.
On a alors $0 = f(x) - f(x') = (x - x') - (\varphi(x) - \varphi(x'))$,
donc $\|f(x) - f(x')\| \geq \|(x - x')\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \geq (1-k)\|x - x'\|$ (3)
On peut maintenant définir l'application g qui à chaque y de $B(b,(1-k)r)$ fait correspondre l'unique x de $B(a,r)$ tel que $y = f(x)$.
De (3) on définit que g est $\frac{1}{1-k}-$lipschitzienne.
Soit $V = f^{-1}(B(b,(1-k)r))$ (ouvert car f est continue), alors
$g : B(b,(1-k)r) \to V$ est bijective et continue. □

Proposition 3.2.2. *Soient E et F des espaces de Banach et U un ouvert de E, et $f : U \to F$, une application continue. Supposons que f est strictement différentiable en $a \in U$ et que $f'(a) \in Isom(E,F)$.*
Alors il existe un voisinage ouvert V' de a et un voisinage W' de $b = f(a)$ tel que f soit ***un homéomorphisme de** V' **sur*** *W'. de plus l'inverse est est strictement différentiable au point b.*

Démonstration. On Considère $g = [f'(a)]^{-1} \circ f : U \to E$.
On a $g'(x) = [f'(a)]^{-1} f'(x)$ et on a $g'(a) = 1_E$.
Donc, $\forall k > 0$, $\exists r > 0$ tel que $\forall x, y \in B(a,r)$

$$\|g(x) - g(y) - (x - y)\| \leq k\|x - y\|$$

On choisit $0 < k < 1$ et on applique la proposition précédente. □

Théorème 3.2.3. (***Le théorème d'iversion locale***)
Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'en $a \in U$ on ait :

$$f'(a) \in Isom(E,F)$$

Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a) = b$ tels que f soit un difféomorphisme de V sur W.

Démonstration. Soit V' le voisinage de a donné par la proposition 3.2.2. On a
• $\forall x \in V'$ $f'(x)$ existe.
• $\exists V \subset V'$ $f'(x) \in Isom(E,F)$ $\forall x \in V$.
Posons $W = f(V)$ ouvert dans W' (car f est homéomorphisme de V' sur W').
De plus $f : V \to W$ est un homéomorphisme. D'où le résultat en appliquant la proposition 3.2.1. □

Corollaire 3.2.4. *Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Pour que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que $f'(x)$ soit un isomorphisme de E sur F, pour tout $x \in U$*

Démonstration. $\Rightarrow$ Découle de la proposition 3.1.2.
$\Leftarrow$ Supposons que $f'(x) \in Iso((E, F)$, pour tout x.
Il suffit de montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.
Le théorème d'inversion locale montre que f est un application ouverte. En effet soit W un ouvert inclus dans U.
Soit $y = f(x) \in f(W)$, il existe un ouvert V_y de y et un ouvert U_x de x tels que $V_y = f(U_x)$. Donc $f^{-1} : V_y \to U_x$ est continue.
L'application $V \to \mathcal{L}(F, E)$
$$y \to f'(f^{-1}(y))^{-1}$$
est continue, comme composée d'applications continues. Donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. □

En dimension finie, on peut énoncer :

Corollaire 3.2.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ injective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne ne s'annule pas sur U.*

3.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 3.3.1.
Soient E, F, G trois espaces de Banach et U un ouvert de $E \times F$, et $f : U \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a, b) \in U$, tel que $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in Isom(F, G)$.
Alors il existe un voisinage V de (a, b) inclus dans U, un voisinage W de a et une application $g : W \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :

$$(x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in W \text{ et } y = g(x)$$

Démonstration. On Considère l'application $f_1 : U \to E \times G$.
Où $f_1(x, y) = (x, f(x, y))$, f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$, $f_1'(a, b)(h, k) = (h, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k)$, et $f_1'(a, b) \in Isom(E \times F, E \times G)$.
On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à f_1 : $\exists V \subset U$ voisinage

de (a,b) et W_1 voisinage de $f_1(a,b) = (a,0)$ tel que f_1 soit un difféomorphisme de V sur W_1.

$$f_1^{-1}(x,z) = (x, G(x,z)) \qquad (x,z) \in W_1$$

on a alors :

$$(x,y) \in V \ et \ f(x,y) = z \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in W_1, \quad G(x,z) = y$$

Prendre $z = 0$ et poser $G(x,0) = g(x)$. $\square$

Chapitre 4

Dérivées d'ordre supérieur-Formule de Taylor

4.1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 4.1.1. f est deux fois différentiable en $a \in U \subset E$ si f' est différentiable en a. On note sa dérivée $f'' \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$.

Remarque 4.1.2. On a $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \simeq \mathcal{L}(E \times E, F)$
$v \longleftrightarrow w$
$w(x, y) = v(x).y$

Théorème 4.1.3. *Si $f : U \subset E \to F$ est deux fois différentiable en $a \in U$,alors $f''(a)$ est une application bilinéaire et symétrique i.e*

$$(f''(a).h).k = (f''(a).k).h$$

Démonstration. On considère la fonction

$$g_u(v) = f(a + v + u) - f(a + u) - f(a + v) + f(a),$$

on a $g_u(v) = g_v(u)$.
Montrons que $\|g_u(v) - (f''(a).v).u\| = o(\|u\| + \|v\|)^2$
On a

$$\|g_u(v) - (f''(a).v).u\| \leq \overbrace{\|g_u(v) - f'(a + v).u + f'(a).u\|}^{A} + \overbrace{\|f'(a + v).u - f'(a).u - (f''(a).v).u\|}^{B}$$

$$A = \| \overbrace{f(a+v+u) - f(a+u) - f'(a+v).u + f'(a).u}^{F(u)} - \overbrace{[f(a+v) - f(a)]}^{F(0)} \|$$
$$\leq \|u\| \sup_{0\leq t\leq 1} \|F'(tu)\|$$

or $F'(tu) = f'(a+v+tu) - f'(a+tu) - f'(a+v).u + f'(a)$
mais on a :

$$\|f'(a+v+tu) - f'(a) - f^{''}(a).(v+tu)\| = o(\|v+tu\|)$$
$$\|f'(a+tu) - f'(a) - f^{''}(a).tu\| = o(\|tu\|)$$
$$\|f'(a+v) - f'(a) - f^{''}(a).v\| = o(\|v\|)$$

d'où $\|F'(tu)\| = o(\|v+tu\|) + o(\|tu\|) + o(\|v\|) = o(\|v\| + \|u\|)$
Donc $A \leq \|u\| o(\|v\| + \|u\|)$
D'autre part

$$A = \|f'(a+v) - f'(a) - (f^{''}(a).v)\|.\|u\|$$
$$\leq \|u\| o(\|v\| + \|u\|)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} B &\leq \|f'(a+v) - f'(a) - (f''(a).v)\|.\|v\| \\ &\leq \|u\| o(\|v\| + \|u\|) \end{aligned}$$

Finalement

$$\|g_u(v) - (f^{''}(a).v).u\| \leq \|u\| o(\|v\| + \|u\|) = o(\|v\| + \|u\|)^2$$

En échangeant u et v on obtient

$$\|g_v(u) - (f^{''}(a).u).v\| = o(\|u\| + \|v\|)^2$$

d'où

$$\|(f^{''}(a).v).u - (f^{''}(a).v).u\| = o(\|u\| + \|v\|)^2$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que si $\|u\| + \|v\| \leq \eta$ alors

$$\|(f^{''}(a).v).u - (f^{''}(a).v).u\| \leq \varepsilon (\|u\| + \|v\|)^2$$

$\forall u, v$ on peut trouver $\lambda \neq 0$ tel que $\|\lambda u\| + \|\lambda v\| < \eta$ on a alors

$$|\lambda|^2 \|(f^{''}(a).v).u - (f^{''}(a).v).u\| \leq \varepsilon |\lambda|^2 (\|u\| + \|v\|)^2$$
$$\Rightarrow \quad \|(f^{''}(a).v).u - (f^{''}(a).v).u\| = 0 \qquad \forall u, v$$

$\square$

Cas où $E = E_1 \times ... \times E_n$ et $f : U \subset E \to F$ deux fois différentiables

$$f^{''}(a).(k_1, ..., k_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x_i}(a).k_i \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a).k_i).(h_1, ..., h_n) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f'}{\partial x_j}(a).k_i)h_j$$

On note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a)$$

on a alors

$$f^{''}(a).(k_1, ..., k_n).(h_1, ..., h_n) = \sum_{i,j} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).k_i)h_j$$

Théorème 4.1.4. *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $f : U \subset E \to F$ est deux fois dérivables alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ la base canonique.
Appliquer le théorème 4.1.3. □

4.1.1 Dérivées successives

$\mathcal{L}_n(E, F) = \{\varphi : E^n \to F$ multilinéaire et continue$\}$
Par réccurence on définit "f est $n-$fois différentiable en a".
Supposons que cette notion est définie jusqu'à l'ordre $(n - 1)$.
On dit que f est $n-$fois différentiable en a s'il existe un voisinage V de a telle que f soit $(n-1)-$fois différentiable en tout point de V et l'application $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$ de V dans $\mathcal{L}_{n-1}(E, F)$ est différentiable au point a.
On note $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) \in \mathcal{L}_n(E, F)$.

- f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans U si f est $n-$fois différentiable en tout point de U et si $f^{(n)} : U \to \mathcal{L}_n(E, F)$ est continue.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$, $\forall n$.

Théorème 4.1.5. *Si f est n fois différentiable en a alors $f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}_n(E,F)$ est une application multilinéaire symétrique i.e. si $(h_1,...,h_n) \in E^n$ et σ est une permutation quelconque sur $\{1,...,n\}$, on a*

$$f^{(n)}(a)(h_1,...,h_n) = f^{(n)}(a)(h_{\sigma(1)},...,h_{\sigma(n)})$$

Démonstration. Raisonner par récurrence. □

Exemple 4.1.6.

- ⋆ La composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ et de classe $\mathcal{C}^n$.
- ⋆ $\varphi : Isom(E,F) \to \mathcal{L}(E,F)$
  $u \to u^{-1}$
  est de classe $\mathcal{C}^\infty$
- ⋆ Soit $f : V \to W$, $V \subset E$, $W \subset F$
  est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme.
  Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

4.2 Formule de Taylor

4.2.1 Rappel sur l'intégration des fonctions réglées :

Intégration des fonctions en escalier

Définition 4.2.1. Soit $f : [a,b] \to E$ (Banach) est **une fonction en escalier** s'il existe une subdivision $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ de $[a,b]$ telle que $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit constante $i = 1,..,n$

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)c_i \qquad \textbf{Intégrale de } f.$$

Intégration des fonctions réglées

Définition 4.2.2. $f : [a,b] \to E$ est **est une fonction réglée** si elle est limite uniforme d'une fonction en escalier $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$

$$I(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$$

$I(f_n)$ est de Cauchy implique qu'elle converge.

Remarque 4.2.3. $f : [a,b] \to E$ continue ($\Rightarrow$ réglée)
Soit $F(t) = \int\limits_a^t f(s)ds$, alors F est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(t) = f(t)$, pour tout t de $]a,b[$.

Propriétées de I

1. I est linéaire.
2. $\|I(f)\| \leq (b-a)\|f\|_0$ où $\|f_0\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 Formule de Taylor : Cas particulier

Soient E, F, et G des espaces de Banach
$\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire et continue.
$u : I \to E$ et $v : I \to F$ des applications définies sur un ouvert I

Lemme 4.3.1. *L'application*

$$\xi : I \to G$$
$$t \to \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \varphi(u^p(t), v^{n-p}(t))$$

a pour dérivée la fonction

$$\xi' : t \to \varphi(u(t), v^{(n+1)}(t)) + (-1)^n \varphi(u^{(n+1)}(t), v(t))$$

Proposition 4.3.2. *Si v est une fonction $(n+1)$ fois différentiable d'une variable réelle t on a :*

$$\frac{d}{dt}[v(t) + (1-t)v'(t) + ... + \frac{(1-t)^n}{n!}v^{(n)}(t)] = \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t)$$

Démonstration. Considérer $\varphi : \mathbb{R} \times F \to G$.
$$(\lambda, z) \to \lambda.z$$

$$u(t) = \frac{1}{n!}(1-t)^n \qquad u^{(n+1)}(t) = 0$$

Appliquer le lemme. $\square$

Corollaire 4.3.3. *Supposons que $U \supset [0,1]$ et que $v^{(n+1)}$ continue, Alors :*

$$[v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - ... - \frac{(1)^n}{n!}v^{(n)}(0)] = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}v^{(n+1)}(t)dt$$

Corollaire 4.3.4. *Supposons que $\|v^{(n+1)}(t)\| \leq M$ pour tout t de $[0,1]$, Alors on a :*

$$\|v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - ... - \frac{(1)^n}{n!}v^{(n)}(0)\| \leq \frac{M}{(n+1)!}$$

Démonstration. Soient $g(t) = -M\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$f(t) = v(t) + (1-t)v'(t) + ... + \frac{(1-t)^n}{n!}v^{(n)}(t)$$

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &\leq \frac{(1-t)^n}{n!}\|v^{(n+1)}(t)\| \\ &\leq M\frac{(1-t)^n}{n!} = g'(t) \end{aligned}$$

Le théorème des accroissement finis implique que $\|f(1) - f(0)\| \leq g(1) - g(0)$ □

4.3.2 Formule de Taylor : Cas général

U ouvert de E et $f : U \to F$
Si $a \in U$ alors $[a, a+h] \subset U$ pour $\|h\|$ suffisamment petit.

Théorème 4.3.5. *(Formule de Taylor avec reste intégrale)*
Soit $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Si $[a, a+h] \subset U$, alors on a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{1}{2}f''(a).(h,h) + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a).(h)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+th).(h)^{n+1}dt$$

Démonstration. Considérer $v(t) = f(a+h)$.
Par récurrence $\to v^{(n)}(h) = f^{(n)}(a+th).(h)^n$ Appliquer le corollaire 4.3.3

$\square$

Théorème 4.3.6. *(Formule de Taylor avec reste de Lagrange)*
Soit $f : U \to F$ $(n+1)$ fois différentiable. Supposons que

$$\|f^{(n+1)}(x)\| \leq M \qquad \forall x \in U.$$

Si $[a, a+h] \subset U$, alors

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a).h - ... - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n\| \leq M \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Appliquer le corollaire 4.3.4

$\square$

Théorème 4.3.7. *Soit $f : U \to F$ $(n-1)$ fois différentiable. Supposons que f est $n-$ fois différentiable en $a \in U$.*
On a alors,

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a).h - ... - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n\| = o(\|h\|^n)$$

Démonstration. Par récurrence.
Pour $n = 1$, la définition de la dérivée.
Supposons que la relation est vraie pour $n-1$.
Posons

$$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h - ... - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).(h)^n$$

alors

$$\varphi'(h) = f'(a+h) - f'(a) - ... - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a).(h)^{n-1}$$

On sait que $\|\varphi'(h)\| = o(\|h\|^{n-1})$, donc
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\|h\| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi'(h)\| \leq \varepsilon \|h\|^{n-1}$.
Le théorème des accroissement finis $\Rightarrow \|\varphi(h) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon \|h\|^n$ pour $\|h\| \leq \eta$
Comme $\varphi(0) = 0$, on obtient le résultat.

$\square$

Remarque 4.3.8. $g : h \to (h, ..., h)$

$\xi : (h_1, ..., h_n) \to f^{(n)}(a).(h_1, ..., h_n)$

où g est linéaire et ξ est multilinéaire et symétrique

$(\xi \circ g)(h) = f^{(n)}(a).(h)^n$

$$\begin{aligned}(\xi \circ g)'(h).k &= \xi'(g(h))[g'(h).k] \\ &= \xi'(g(h))(k, ..., k) = nf^{(n)}(a).(\underbrace{h, ..., h}_{(n-1)\text{ fois}}, k)\end{aligned}$$

Chapitre 5

Maxima et Minima Relatifs

Dans ce chapitre on considère exclusivement des fonctions à **valeurs réelles**, et on s'intéresse à leurs **exrema**, c'est-à-dire à leurs **minima** et **maxima**. On parlera en fait seulement de minima pour simplifier :les maxima d'une fonction f peuvent en effet être vu comme les minima de $-f$.

5.1 Extrema libres.

Définition 5.1.1. Si f est une fonction définie sur une partie D d'un espace de Banach E et à valeurs réelles, un point $a \in D$ est un **mininum local** de f s'il existe un voisinage V_a de a ouvert dans D, tel que

$$f(x) \geq f(a) \quad \textit{pour tout } x \in V_a.$$

On dira que a est un **minimum global** de f si

$$f(x) \geq f(a) \quad \textit{pour tout } x \in D.$$

un minimum est dit **strict** si l'inégalité est stricte, c'est-à-dire $f(x) > f(a)$, pour tout $x \neq a$.

L'objectif ici est de dégager des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour avoir un minimum local selon le degré de différentiabilité de f.

Commençons par rappeler ce que l'on sait dans le cas $E = \mathbb{R}$.

Proposition 5.1.2. *Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $a \in I$. Si a est un minimum local de*

g alors $g'(a) = 0$. Si de plus g est deux fois dérivable en a, alors $g''(a) \geq 0$. Inversement si $b \in I$ est tel que $g'(b) = 0$ et $g''(b) > 0$ alors b est un minimum local de g.

Démonstration. Par définition de la dérivabilité,

$$g(t) - g(a) - (t-a)g'(a) = \varepsilon(t)(t-a)$$

avec $\lim_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$. Si $g'(a) \neq 0$, supposons par exemple $g'(a) > 0$, alors : il existe $\eta > 0$ tel que si $|t-a| \leq \eta$, alors $|\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}g'(a)$, d'où

$$g(t) - g(a) = (g'(a) + \varepsilon(t))(t-a) \leq \frac{1}{2}g'(a)(t-a) < 0$$

pour $a - \eta \leq t < a$. Donc a ne peut pas être un minimum local.

Si g est deux fois dérivable, supposons que a est un minimum local de g. Alors $g'(a) = 0$ d'après ce qui précède. Supposons $g''(a) < 0$. Comme, d'après la formule de Taylor-Young

$$g(t) - g(a) - \frac{1}{2}(t-a)^2 g''(a) = \varepsilon(t)(t-a)^2$$

avec $\lim_{t \to a} \varepsilon(t) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|t-a| \leq \eta$, $|\varepsilon(t)| \leq -\frac{1}{4}g''(a)$, d'où

$$g(t) - g(a) = (\frac{1}{2}g''(a) + \varepsilon(t))(t-a)^2 \leq \frac{1}{4}g''(a)(t-a)^2 < 0$$

pour $|t-a| \leq \eta, \;\; t \neq a$. Donc a ne peut pas être un minimum local.

Enfin, si $g'(b) = 0$ et $g''(b) > 0$ alors

$$g(t) - g(b) - \frac{1}{2}(t-b)^2 g''(b) = \varepsilon(t)(t-b)^2$$

avec $\lim_{t \to b} \varepsilon(t) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|t-b| \leq \eta$, $|\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{4}g''(b)$, d'où

$$g(t) - g(b) = (\frac{1}{2}g''(b) - \varepsilon(t))(t-b)^2 \geq \frac{1}{4}g''(b)(t-b)^2 > 0$$

pour $|t-b| \leq \eta$. □

Remarque 5.1.3.
Attention, les conditions $g'(a) = 0$ et $g''(a) \geq 0$ ne sont évidemment pas suffisantes (ex : $g(t) = t^3$ en $t = 0$) et la condition $g''(b) > 0$ n'est pas nécessaire (ex : $g(t) = t^4$ en $t = 0$) !

Les conditions de la proposition 5.1.2 s'étendent aux fonctions définies sur un ouvert d'espace de Banach.

Théorème 5.1.4. *Soit f une fonction définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeurs réelles, différentiable en $a \in U$. Si a est un minimum local de f alors $Df(a) = 0$. Si de plus f est deux fois différentiable en a, alors $D^2 f(a)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$. Inversement si $b \in U$ est tel que $Df(b) = 0$ et il existe $C > 0$ avec $D^2 f(b)(h,h) \geq C\|h\|^2$ pour tout $h \in E$ alors b est un minimum locale de f.*

Démonstration. Les conditions nécessaires sont immédiates de la proposition 5.1.2.

En effet, si a est un minimum local de f alors, quel que soit $h \in E$, 0 est un minimum local de la fonction d'une variable réelle

$$g : t \mapsto g(t) := f(a + th).$$

Or $g'(0) = Df(a)(h)$ et $g''(0) = D^2 f(a)(h,h)$.

Pour les conditions suffisantes, on applique la formule de Taylor-Young à f. On a en effet

$$f(b+h) - f(b) - \frac{1}{2} D^2 f(b)(h,h) = \varepsilon(h)\|h\|^2$$

avec $\lim\limits_{h \to b} \varepsilon(h) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|h\| \leq \eta$, $|\varepsilon(h)| \leq \frac{C}{4}$, d'où

$$f(b+h) - f(b) \geq \frac{C}{4}\|h\|^2 \geq 0$$

pour $\|h\| \leq \eta$. □

Remarque 5.1.5.

En dimension finie, l'existence de $C > 0$ tel que $D^2 f(b)(h,h) \geq C\|h\|^2$ pour tout vecteur $h \in E$ équivaut à $D^2 f(b)(h,h) \geq 0$ quel que soit $h \neq 0_E$. Il suffit en effet de remarquer que la fonction continue $h \mapsto D^2 f(b)(h,h)$ atteint son minimum sur la sphère unité (qui est compacte si E est de dimmension finie). Par bilinéarité de $D^2 f(b)$ on en déduit l'inégalité voulue avec $C := \min\limits_{\|h\|=1} D^2 f(b)(h,h)$. De plus, pour avoir $D^2 f(b)(h,h) > 0$ quel que soit $h \neq 0_E$, il faut et il suffit que la matrice hessienne de f en b, c'est-à-dire la matrice symétrique réelle de coéfficients $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(b)$ ait des valeurs propres toutes strictement positives. on sait en effet que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$: une démonstration de cette propriété utilise précisément la notion d'extremum lié...

5.2 Extrema liés.

Définition 5.2.1. Si f et $g_1, ..., g_p$ sont des fonctions définies sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeurs réelles, un point $a \in U$ tel que $g_1(a) = 0, ..., g_p(a) = 0$ est un **minimum local** de f **sous les contraintes** $g_1, ..., g_p$ s'il existe un voisinage ouvert V_a de a tel que

$$f(x) \geq f(a), \quad \textit{pour tout } x \in V_a \textit{ tel que } g_1(x) = 0, ..., g_p(x) = 0$$

On va obtenir ici une condition nécessaire pour qu'un point soit un minimum local sous contraites lorsque les fonctions f et $g_1, ..., g_p$ sont continûment différentiables.

On dira que les contraintes $g_1, ..., g_p$ sont **indépendantes** au point $a \in U$ si la famille de formes linéaires continue $\{(Dg_1(a)), ..., (Dg_p(a))\}$ est libre.

Théorème 5.2.2.
Soient f et $g_1, ..., g_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U d'espace de Banach E et à valeurs réelles. Soit $a \in U$ tel que $g_1(a) = 0, ..., g_p(a) = 0$ et les contraintes $g_1, ..., g_p$ sont indépendantes au point a. Si a est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, ..., g_p$ alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tel que

$$Df(a) = \lambda_1(Dg_1(a)) + ... + \lambda_p(Dg_p(a))$$

*Dans cette énoncé les nombres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont appelés des **multiplicateurs de Lagrange**.*

Démonstration. Grâce au théorème des fonctions implicites, on va se ramener au cas d'un minimum libre. on peut supposer sans perte de généralité $a = 0$. (Il suffit de considérer la fonction $x \mapsto f(x - a)$ au lieu de f.) Notons pour simplifier $\psi_i := (Dg_i(0))$ pour tout $i \in \{1, ..., p\}$. Soit

$$G = (Vect(\psi_1, ..., \psi_p))^{\perp} = \{h \in E;\ \psi_i(h) = 0,\ i \in \{1, ..., p\}\}.$$

Puisque la famille $(\psi_1, ..., \psi_p)$ est libre, il existe une famille de p vecteurs $(h_1, ..., h_p) \in E$ indépendantes tels que $\psi_i(h_j) = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker, valant 1 si $i = j$ et 0 sinon). Alors le sous espace $F = Vect(h_1, ..., h_p)$ est tel que $G \oplus F = E$, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(z, y) \in G \times F$ tel que $x := z + y$. On a donc un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : G \times F &\to E \\ (z, y) &\mapsto x = z + y. \end{aligned}$$

(La continuité de la réciproque découle de la formule explicite : $y = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(x)h_j$).
Considérons alors la fonction

$$\begin{array}{l} G \times F \to \mathbb{R}^p \\ (z, y) \mapsto (g_1(z + y), ..., g_p(z + y)). \end{array}$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (comme fonction composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et sa différentielle partielle par rapport à y au point $(0,0)$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^p$, par hypothèse sur les fonctions g_i : en effet, dans la base $(h_1, ..., h_n)$ de F et la base canonique de $\mathbb{R}^p$, sa matrice jacobienne est la matrice de coefficient $\psi_i(h_j) = \delta_i^j$, c'est-à-dire la matrice identité !

Donc le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe un voisinage V_0 de 0 dans U (image par $\mathcal{J}$ d'un voisinage de $(0,0)$ dans $G \times F$), et une application φ définie sur un voisinage W_0 de 0 dans G tels que

$$g_1(x) = 0, ..., g_p(x) = 0; \quad x \in V_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = z + \varphi(z)$$

Par conséquent, 0 est un minimum local de f sous les contraintes $g_1, ..., g_p$ si et seulement si 0 est un minimum local de la fonction $g : z \mapsto g(z) := f(z + \varphi(z))$. Une condition nécessaire est donc $Dg(0) = 0$, c'est-à-dire

$$Df(0)(k + D\varphi(0)(k)) = 0 \ \ \textit{pour tout } k \in G.$$

Or par construction de φ on a précisément $D\varphi(0)(k) = 0$ pour tout $k \in G$. En effet, comme φ est à valeurs dans l'espace vectoriel $F = Vect(h_1, ..., h_p)$, il suffit de montrer que $\psi_i(D\varphi(0)(k)) = 0$ quel que soit $i \in \{1, ..., p\}$: ceci se déduit par différentiation de la fonction

$$z \mapsto g_i(z + \varphi(z)),$$

qui est identiquement nulle, en utilisant le fait que $(Dg_i)(0)(k) = \psi_i(k) = 0$ pour tout $k \in G$ (par définition de G !).

On a donc montré que $Df(0)(k) = 0$ pour $k \in G$. Autrement dit, en notant pour simplifier $\psi = Df(0)$, on a

$$(Vect(\psi_1, ..., \psi_p))^\perp \subset (Vect(\psi))^\perp$$

On en déduit, grâce au lemme algébrique classique rappelé ci-après :

$$Vect(\psi) \subset Vect(\psi_1, ..., \psi_p),$$

c'est-à-dire que ψ est effectivement une combinaison linéaire des ψ_i. $\square$

Lemme 5.2.3. *Soient $\psi, \psi_1, ..., \psi_p$, des formes linéaires sur un espace vectoriel E. Si*

$$\bigcap_{i=1}^{p} Ker\psi_i \subset Ker\psi,$$

alors ψ est une combinaison linéaire des ψ_i.

La démonstration est laissée en exercice.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des problèmes d'extremum essentiellement sur des ouverts : les conditions nécessaires d'extremum local (dans la proposition 5.1.2 et les théorème 5.1.4 et 5.2.2) sont fausses lorsque U n'est pas un ouvert. Nous allons maintenant considèrer des problèmes d'extremum sur des sous ensemble convexes de E (la convexité étant une propriété géométrique et non topologique).

5.3 Convexité et minima.

Définition 5.3.1. Un sous ensemble C d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E est dit **convexe** si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\theta \in [0,1]$, $\theta x + (1-\theta)y \in C$. Une fonction f définie sur un **convexe** C et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dit convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\theta \in [0,1]$,

$$f(\theta x + (1-\theta)y \in C) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y).$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $x \neq y$ et $\theta \in]0,1[$.

Théorème 5.3.2. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U d'un $\mathbb{R}-$espace de Banach E et soit C un sous ensemble convexe de U. Alors $f_{|C}$ est convexe si et seulement si, pour tout $x, y \in C$,*

$$f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x).$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq y$. En supposant en outre que f est deux fois différentiable, $f_{|C}$ est convexe si et seulement si, pour tout $x, y \in C$,

$$D^2f(x)(y-x, y-x) \geq 0.$$

Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour $x \neq y$.

Démonstration. Supposons f convexe. Soient $x, y \in C$ et $\theta \in]0,1[$. On a

$$\frac{f(x+\theta(y-x)) - f(x)}{\theta} \leq f(y) - f(x),$$

d'où

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x),$$

en faisant tendre θ vers 0. Si f est strictement convexe, on a une inégalité stricte pour $x \neq y$ et $\theta \in]0,1[$, mais elle devient large dans le passage à la limite. Pour démontrer qu'effectivement

$$Df(x)(y-x) < f(y) - f(x),$$

on observe que pour tout $\omega > 0$,

$$x + \theta(y-x) = \frac{\omega - \theta}{\omega} x + \frac{\omega}{\omega}(x + \omega(y-x)),$$

d'où, pour $0 < \theta < \omega < 1$,

$$\frac{f(x+\theta(y-x)) - f(x)}{\theta} < \frac{f(x+\omega(y-x)) - f(x)}{\omega} < f(y) - f(x).$$

On obtient l'inégalité stricte souhaitée en gardant ω fixé et en faisant tendre θ vers 0. réxiproquement, si on a

$$f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x),$$

quels que soient x et $y \in C$, on obtient l'inégalité de convexité en prenant la combinaison convexe des inégalités

$$f(x) \geq f(x+\theta(y-x)) - \theta Df(x+\theta(y-x))(y-x),$$

$$f(y) \geq f(x+\theta(y-x)) + (1-\theta) Df(x+\theta(y-x))(y-x).$$

Pour la caractérisation de la convexité en terme de différentielles secondes, on peut considérer, à x fixé, la fonction

$$g : y \mapsto f(y) - Df(x)(y).$$

La différence avec f étant une fonction affine, g est convexe si et seulement si f l'est, et $D^2 f(x) = D^2 g(x)$. Or, si f est convexe, la première partie montre que x est un minimum (globale) de $g_{|C}$. En appliquant à

$$\theta \in [0,1] \mapsto g(x + \theta(y-x)),$$

la formule de Taylor-Young exactement comme la démonstration de la proposition 5.1.2, on en déduit que nécessairement

$$D^2 f(x)(y-x, y-x) \geq 0.$$

Inversement, supposons que l'on ait cette inégalité quels que soient x et y dans C. Alors d'après le théorème des accroissements finis appliquée entre 0 et 1 à la fonction

$$\begin{aligned} [0,1] &\to \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto f(x+\theta(y-x)) - (1-\theta)Df(x+\theta(y-x))(y-x), \end{aligned}$$

il existe $\theta \in]0,1[$, tel que

$$f(y) - f(x) - Df(x)(y-x) = (1-\theta)D^2_{x+\theta(y-x))}f(y-x, y-x)$$

$$= \frac{1}{1-\theta}D^2_{x+\theta(y-x))}f(y-(x+\theta(y-x)), y-(x+\theta(y-x))) \geq 0.$$

Donc f est convexe d'après la première partie. □

Théorème 5.3.3. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U d'un $\mathbb{R}-$espace Banach E et soit C un sous convexe de U.*

i *si $f_{|C}$ est convexe et admet un minimum local dans C, c'est un minimum global ;*

ii *si $f_{|C}$ est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict ;*

iii *si f est différentiable, une condition nécessaire pour qu'un point $a \in C$ soit un minimum de $f_{|C}$ est*

$$Df(a)(y-a) \geq 0,$$

pour tout $y \in C$. Si de plus $f_{|C}$ est convexe, cette condition est également suffisante.

Démonstration. **i** supposons $f_{|C}$ convexe et admettant un minimum local en $a \in C$, et soit $x \in C$. Pour tout $\theta \in]0,1[$,

$$f(a+\theta(x-a)) - f(a) \leq \theta(f(x) - f(a)),$$

et le membre à gauche est positif ou nul pour $\theta > 0$ assez petit. Par conséquent $f(a) \geq 0$.

ii si $f_{|C}$ est strictement convexe, on obtient comme ci-dessus l'inégalité stricte $f(x) - f(a) > 0$ pour $x \neq a$. Un minimum stricte est toujours unique.

iii supposons f différentiable et admettant un minimum en $a \in C$. Soit $x \in C$: il existe une fonction $\varepsilon : \theta \mapsto \varepsilon(\theta)$ tendant vers 0 en 0, telle que

$$f(a + \theta(x - a)) - f(a) = \theta Df(a)(x - a) + \theta\varepsilon(\theta).$$

Si on avait $Df(a)(x - a) < 0$, on aurait $f(a + \theta(x - a)) < f(a)$ pour $\theta > 0$ assez petit.
Inversement, si $f_{|C}$ convexe et si on a l'inégalité

$$Df(a)(x - a) \geq 0,$$

pour $y \in C$, alors d'après la première partie du théorème 5.3.2, a est un minimum de f.

$\square$

Un exemple important de problème de minimisation sur un ensemble convexe est fourni par ce que l'on appelle des contraintes-inégalités

$$g_1(a) \leq 0, ..., g_p(a) \leq 0,$$

où les fonctions g_j sont convexes. Un exemple important de fonction convexe à minimiser est celui des fonction quadratiques, c'est à dire de la forme

$$x \mapsto f(x) = \phi(x, x) + l(x),$$

où ϕ est une forme bilinéaire continue positive et l est une forme linéaire continue.

5.4 Introduction au calcul des variations.

Considérons l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ muni de la norme définie par

$$\|u\| := \max(\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty), \quad \|u\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} \|u(t)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'ensemble

$$C := \{u \in E; \quad u(0) = a, \quad u(1) = b\},$$

(évidemment convexe) et une fonction de la forme

$$A : u \in E \mapsto \int_0^1 L(u(t), u'(t))dt,$$

où $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. On montre sans peine que A est différentiable sur E. D'après le théorème 5.3.3, si f admet un minimum u sur C, alors

$$Df(u)(h) \geq 0,$$

pour tout $h \in C - u$, c'est-à-dire pour tout $h \in E$ tel que $h(0) = h(1) = 0$. Par suite, l'inégalité est en fait une égalité : une condition nécessaire pour que u soit un minimum de f sur C est par conséquent

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i}(u(t), u'(t))h_i(t)dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial p_i}(u(t), u'(t))h_i^{'}(t)dt = 0,$$

quel que soit $h \in E$ tel que $h(0) = h(1) = 0$. (On a noté q_i et p_i les composantes des arguments de L.) En intégrant par parties le deuxième morceau, on peut réécrire l'égalité ci-dessus sous la forme

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n (\frac{\partial L}{\partial q_i}(u(t), u'(t)) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p_i}(u(t), u'(t))))h_i(t)dt = 0.$$

Pour qu'elle soit satisfaite quelle que soit la fonction h, il faut et il suffit, d'après ce que l'on appelle parfois *le lemme fondamental du calcul intégral*, que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \frac{\partial L}{\partial q_i}(u(t), u'(t)) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p_i}(u(t), u'(t))) = 0,$$

c'est-à-dire que u soit solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial p_i}(u(t), u'(t)) = \frac{\partial L}{\partial q_i}(u(t), u'(t)).$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonction L. Si L est convexe, alors A aussi (par linéarité de l'intégrale), et par conséquent si $u \in C$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange, c'est un minimum de A. Lorsque L n'est pas convexe, l'équation d'Euler-Lagrange est loin d'être suffisante pour minimiser A.

Bibliographie

[1] *Calcul Différentiel,* A.Avez, Masson.

[2] *Calcul différentiel*, B.ELMABSOUT. Exercice Masson.

[3] *Analyse,* Jean MAWHIN DE Boeckand Larcier (Calcul différentiel et intégral concepts technique.

[4] *Calcul Différentiel,* G.CHRISTOL, Ellipses.

[5] *Calcul Différentiel,* H.CARTAN, Dunod.

[6] *Exercices de Calcul différentiel,* F.RIDEAU, Hermann.

[7] *Cours de Calcul Différentiel,* H.CARTAN et J.Kouneicher, Broché.

[8] *Calcul différentiel et Equations Différentielles cours et exercices corrigés,* Syline Benzoni gavage, Dunod.