Examen de rattrapage de Calcul Différentiel. (Durée: 3 heures)

Exercice 1: Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$X \mapsto f(X) = \langle X | X \rangle e^{-\langle \alpha | X \rangle} = \|X\|^2 e^{-\langle \alpha | X \rangle}$$

où $\langle . | . \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et α un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^n$.

I. On suppose $n = 2$ et $\alpha = (1, 1)$ et on pose $X = (x, y)$.

1. Donner l'expression de $f(x, y)$ et déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ainsi que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Montrer que f admet deux points critiques et déduire en utilisant les dérivées partielles d'ordre 2 la nature de chacun de ces points.

II. On suppose maintenant $n \geq 3$ et on rappelle que $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est supposé non nul.

1. Justifier que f est de classe C^∞ et calculer $Df(X)(h)$ pour $X, h \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que si $Df(X)(h) = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur X est forcément colinéaire à α .
3. En posant $X = k\alpha$, avec $k \in \mathbb{R}$, montrer que f admet deux points critiques X_1 et X_2 que l'on précisera.
4. Calculer $D^2f(X)(h, h)$ pour $h \in \mathbb{R}^n$, et déduire qu'on a

$$D^2f(X_1)(h, h) = 2\|h\|^2, \text{ et } D^2f(X_2)(h, h) = e^{-\langle \alpha | X_2 \rangle} \left[2\|h\|^2 - \frac{4}{\|\alpha\|^2} (\langle \alpha | h \rangle)^2 \right]$$

5. Préciser, en utilisant les expressions précédentes et en justifiant vos réponses, si chacun des points critiques est un minimum local, un maximum local ou un point de selle.

Exercice 2: Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$\varphi(x, y, z) = (\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z))$ avec

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = e^{2y} + e^{2z} \\ \varphi_2(x, y, z) = e^{2x} - e^{2z} \\ \varphi_3(x, y, z) = x - y \end{cases}$$

1. Calculer le jacobien $\det D\varphi(x, y, z)$ et déduire que φ est un difféomorphisme local au voisinage de tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que tout élément $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $X + Y > 0$ et $Xe^{2Z} - Y > 0$ admet

un unique antécédent $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que l'on explicitera en fonction de X, Y, Z .

3. Dédurre que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que l'on précisera.

4. On considère à présent l'application $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)), \text{ avec}$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z} \\ F_2(x, y, z) = e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y} \\ F_3(x, y, z) = e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x} \end{cases}$$

a. Trouver une fonction $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui vérifie $F = G \circ \varphi$. (Indication: Si on note $G = (G_1, G_2, G_3)$ on aura, en particulier

$$G_1(X, Y, Z) = \frac{X - Y}{2}(e^Z + e^{-Z}).)$$

b. Montrer que $DG(X, Y, Z)$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$.

5. On suppose que l'application trouvée G est injective. Justifier que si F est un difféomorphisme au voisinage d'un point (x, y, z) alors la différentielle $D(G \circ \varphi)(x, y, z)$ est inversible. Dédurre les valeurs de λ pour lesquelles F est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exercice 3:

On considère le système d'équations différentielles $\begin{cases} x' = 1/3[(4t + t^2)x + (-2t + 2t^2)z] \\ y' = 1/3[(2t - t^2)x + 6ty + (2t - t^2)z] \\ z' = 1/3[(-4t + 2t^2)x + (2t + 2t^2)z] \end{cases}$,

avec la condition initiale $(t_0, (x_0, y_0, z_0)) = (0, (1, 1, 1))$.

1. Après avoir reconnu la forme canonique $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, avec $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, préciser s'il s'agit d'une équation linéaire ou non, autonome ou non. Préciser également l'ensemble de définition $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

2. On donne les trois matrices suivantes

$$A(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4t + t^2 & 0 & -2t + t^2 \\ 2t - t^2 & 6t & 2t - t^2 \\ -4t + 2t^2 & 0 & 2t + 2t^2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ et } D(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier qu'on a $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A(t) = PD(t)P^{-1}$.

b. Dédurre la valeur de $e^{\int_0^t A(s)ds}$.

3. Donner la solution maximale du système d'équations différentielles initial vérifiant la donnée de Cauchy $(0, (1, 1, 1))$.

4. Quel est l'intervalle de définition de cette solution maximale? Etait-ce prévisible? Expliquer.