Université Mohamed V **Anneé universitaire 2010-2011**
Faculté des sciences de Rabat **SMA6**
Département de mathématiques

Série 4

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les deux applications
$$f(u) = (u-1)^2(u+1), \text{ et } \varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz.$$

1. Soit $u \geq 0$. Montrer que $f'(u) = 0$ si et seulement si $u = 1$.
2. Montrer que φ est une forme quadratique définie positive. En déduire les points de $\mathbb{R}^3$ où φ s'annule.
3. Soit $F = f \circ \varphi$. Montrer qu'un élément $a \in \mathbb{R}^3$ est un point critique de F (i.e $F'(a) = 0$) si et seulement si $a = (0,0,0)$ ou $\varphi(a) = 1$.
4. Déterminer la matrice hessienne de F en $a = (0,0,0)$, c-à-d la matrice de l'application bilinéaire symétrique $F''(a)$. En déduire la nature de ce point critique.
5. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^3$, $F(a) \geq 0$. En déduire que pour tout point critique non nul de F est un point où F admet un minimum absolu.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $(x,y) \to (x|y)$, la fonction
$$f(x) = (a|x)e^{-\|x\|^2},$$
où $a \in \mathbb{R}^n$ est fixé non nul.

Déterminer $Df(x)(h)$, pour $h \in \mathbb{R}^n$, puis montrer que f possède deux points critiques.
Calculer $D^2f(x)(h,k)$ pour $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et déterminer la nature des deux points critiques de f. (On montrera que $-D^2f(x)$ est coercive.)

Exercice 3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas. On considère l'équation différentielle
$$\frac{dy(t)}{dt} = \sin(\|y(t)\|)f(t). \qquad (E)$$

1. Soit (t_0, α) un point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Monrer qu'il existe une unique solution maximale y de (E) telle que $y(t_0) = \alpha$.

2.a. Trouver les solutions constantes de l'équation (E).

2.b. Soitφ une solution maximale de (E). En utilisant $2.a.$, montrer que $\|\varphi\|$ est une fonction bornée et en déduire que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $M > 0$ un nombre réel. On suppose que, pour tout réel t, on a $\|f(t)\| \leq M$.
Soit α un point de $\mathbb{R}^n$ et φ la solution maximale de (E) qui vérifie $\varphi(0) = \alpha$. Montrer que
$$\|\varphi(t)\| \geq \|\alpha\|e^{-M|t|}.$$

Exercice 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ une application continue.
On considère l'équation différentielle linéaire dans $\mathbb{R}^3$:

$$X'(t) = A(t)X(t). \qquad (*)$$

Soient X_1, X_2, X_3 trois solutions de $(*)$. On rappelle qu'elles sont définies sur I. Pour tout $t \in I$, soit $U(t)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ z_1(t) & z_2(t) & z_3(t) \end{pmatrix}$$

1. Etablir que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   i) les solutions X_1, X_2, X_3 sont linéairement dépendantes,
   ii) il existe $t_0 \in I$ tel que $U(t_0)$ ne soit pas inversible,
   iii) pour tout $t \in I$, $U(t)$ n'est pas inversible.
2. On suppose maintenant que X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendantes. Montrer que , pour tous t_0 et $t \in I$, la résolvante de l'équation $(*)$ est $R(t, t_0) = U(t) \circ (U(t_0))^{-1}$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la solution maximale φ de $(*)$ telle que $\varphi(t_0) = v$.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $M > 0$ un réel. Soit $\varphi :]a, b[\to E$ une application lipschitzienne de rapport M. Montrer que si b est fini, φ peut se prolonger par continuité en ce point.
2. Soit $f : \mathbb{R} \times E \to E$ une application continue. On suppose que f est bornée et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. On pose $M = \sup\limits_{(t,x) \in \mathbb{R} \times E} \|f(t, x)\|$.
   a. Montrer que toute solution de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ est lipschitzienne de rapport M sur son intervalle de définition.
   b. En déduire que les solutions maximales de cette équation sont définies sur $\mathbb{R}$.