UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques & Informatique

Année Universitaire 2007/08
Session Automne-hiver
SM-SMI Semestre 5

Examen du module calcul différentiel. Durée: 3 heures.

Exercice 1:
On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$f(x,y,z) = z^2 + e^{z+x-y^2} + sin(x-y+z) = 0. \qquad (*)$$

1. Montrer que z peut sécrire sous la forme $z = \varphi(x,y)$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un voisinage $V(0,0) \subset \mathbb{R}^2$ et telle que $\varphi(0,0) = 0$.
2. A partir de l'équation $(*)$, déduire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0).$$

3. Calculer

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0,0),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Exercice 2: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. On admet (et c'est une conséquence) que toute fonction vérifiant ces hypothèses admet un minimum absolu qu'elle atteint en un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$
1. Montrer que f admet un point critique.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{g(x)}{|x|} = +\infty.$$

On veut démontrer que g' est surjective.
2a. Soit $p \in \mathbb{R}$ quelconque. On considère l'application h définie par $h(x) = g(x) - px$. Montrer que h vérifie les hypothèses de la première question.
2b. Conclure que g' est surjective.
3. On souhaite généraliser les résultats de la question 2. à $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable. Soit donc $D\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = +\infty$$

et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.
3a. Calculer $DF(x)$.
3b. Justifier qu'il existe une constante A positive telle que $|\psi(x)| \leq A\|x\|$ pour tout

$x \in I\!R^n$ puis déduire que $\lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$.
3c. Conclure qu'il existe $x_0 \in I\!R^n$ tel que $D\varphi(x_0) = \psi$.

<u>Exercice 3:</u>
On considère l'espace E défini par $E = \{f : [0,1] \to I\!R \text{ avec } f \text{ de classe } \mathcal{C}^1\}$.
On munit E de la norme $\|f\|_E = \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$ avec $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
Soit l'application $S : E \to I\!R$ définie par

$$f \longmapsto S(f) = \int_0^1 (f'(t))^2 \, dt.$$

1. Montrer que l'on a pour tout $f \in E$, $S(f+h) = S(f) + L(h) + o(\|h\|_E)$, où $L(h) = 2\int_0^1 f'(t)h'(t) \, dt$.
2. En déduire que S est différentiable et calculer $\|dS(f)\|$.(Indication: On pourra d'abord majorer $\|dS(f)(h)\|$.)
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que S deux fois différentiable et calculer $d^2S(f)(h,k)$ pour $(h,k) \in E^2$.

<u>Exercice 4:</u>
Soit $(a,b) \in I\!R^2$. On considère l'équation différentielle (dans laquelle t désigne la variable indépendante, et $t \longmapsto y(t)$ la fonction inconnue),

$$y''(t) = (t - y(t))y'(t), \; y(0) = a, \; y'(0) = b. \qquad (*)$$

1. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique $X'(t) = F(t, X(t))$. Préciser l'ensemble de définition $\Omega \subset I\!R^3$ de F et justifier que $\mathrm{Fr}(\Omega) = \emptyset$.
2. Montrer que $\forall (a,b) \in I\!R^2$, il existe une unique solution maximale y vérifiant $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.
3. Vérifier que $y(t) = a$, $\forall t \in I\!R$, est l'unique solution maximale de l'équation différentielle $(*)$ lorsque $b = 0$.
4. On suppose qu'on a $b > 0$. On a donc $y'(0) > 0$. On note $]c, d[$ l'intervalle de définition de la solution maximale y.
Montrer que $y'(t) > 0$ pour $0 < t < d$. (On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente.)