UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques & Informatique- Rabat

Année Universitaire 2005/06
Session Automne-hiver

<u>Examen du module calcul différentiel.</u> Durée: 3 heures

<u>Exercice 1:</u> (8 points)
$E = C([0,1])$ désigne l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme, c'est à dire

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

On note B la boule ouverte de E de centre 0 (la fonction nulle) et de rayon 1, c'est à dire

$$B = \{f \in E,\ \|f\| < 1\}.$$

Soit $\phi : E \to E$ l'application

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f^2(t)dt, \quad f \in E, \quad x \in [0,1].$$

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer $\phi'(f)$.(On pourra partir de $\phi(f+h)-\phi(f)$). Montrer que, pour tout $f \in E$,

$$\|\phi'(f)\| \leq 2\|f\|.$$

2. On note I l'application identique de E et on pose $\psi = I + (1/2)\phi$. Montrer que pour tout $(f,g) \in E\text{x}E$, on a

$$\|\psi(f) - \psi(g)\| \geq (1 - \frac{1}{2}(\|f\| + \|g\|))\|f - g\|.$$

En déduire que la restriction de ψ à B est injective.
3. Montrer que la restriction de ψ à B est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de B sur $\psi(B)$.

<u>Exercice 2:</u> (12 points)
1. On note Ω l'ouvert formé des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x-y)y+1 > 0$. Décrire rapidement Ω en dessinant sa frontière.
2. Soit $(a,b) \in \Omega$. On considère l'équation différentielle (dans laquelle x désigne la variable indépendante, et $x \longmapsto y(x)$ la fonction inconnue),

$$y'(x) = \sqrt{(x - y(x))y(x) + 1} - 1.$$

2.a. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (*) qui vérifie $\varphi(a) = b$. On note $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.

2.b. Trouver, lorsque $b = 0$, la fonction φ et l'intervalle I.
2.c. On suppose $b > 0$. Montrer que, pour tout $x \in I$, on a $\varphi(x) > 0$.(On pourra faire un raisonnement par l'absurde)
2.d. Trouver la solution ψ de l'équation différentielle (*) telle que $\psi(-a) = -b$, et préciser son intervalle de définition par rapport à celui de φ.

Dans les questions 3. et 4., on n'hésitera pas à faire des dessins traduisant le cas étudié.

3. On suppose $0 < b < a$.
3.a. On veut montrer qu'il existe un point t_0 de l'intervalle $]\alpha, a[$ tel que $\varphi(t_0) = t_0$. Pour cela, supposons que

$$\forall t \in]\alpha, a[, \ \varphi(t) < t.$$

En utilisant 2.c., montrer que $\alpha \geq 0$ puis que $\lim_{x \to \alpha} \varphi(x)$ existe et est finie. Déduire une contradiction.
3.b. Vérifier que si t est une solution quelconque de $\varphi(t) = t$, alors $\varphi'(t) = 0$.

On veut monter que l'équation $\varphi(t) = t$ a une unique solution . Par l'absurde, on suppose l'existence de plusieurs solutions et on note t_0 la solution la plus proche de a. Par conséquent, $\varphi(t) > t$ si $t < t_0$ avec t proche de t_0, et on suppose l'existence d'une autre solution t_1 avec $t_1 < t_0$. On considère l'ensemble

$$A = \{\tau \in [t_1, t_0[, \ \varphi(\tau) = \tau\}.$$

Montrer que A est non vide majoré et que sa borne supérieure γ vérifie $\varphi(\gamma) = \gamma$ et $\varphi(t) > t$ pour tout $t \in]\gamma, t_0[$. Déduire que forcément $\varphi'(\gamma) \geq 1$ puis signaler une contradiction.
3.c. En remarquant que la fonction φ est décroissante sur $]\alpha, t_0[$, montrer que l'hypothèse $\alpha = -\infty$ est impossible.
4. On suppose que $a < b$ et $0 < b$.
4.a. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un point t de l'intervalle $]a, \beta[$ tel que $\varphi(t) = t$. Pour cela, on suppose que $\varphi(t) > t$ sur $]a, \beta[$. En remarquant que φ est décroissante sur $]a, \beta[$, montrer que β est forcément fini, puis que $\lim_{x \to \beta}$ existe et est finie. Déduire une contradiction et conclure.
4.b. En raisonnant comme dans 3.b., montrer que l'équation $\varphi(t) = t$ a une unique solution t_0 dans $]a, \beta[$.
4.c. En remarquant que φ est croissante sur $]a, \beta[$, montrer que l'hypothèse $\beta < +\infty$ est impossible. Déduire que $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$.