

Exercice 1: On note $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur lequel on définit la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

On veut démontrer que cet espace vectoriel muni de cette norme est un espace de Banach. Pour cela, on se donne une suite de Cauchy $(f_n)_n$, et on veut montrer qu'elle converge dans cet espace.

1. Vérifier que pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f définie sur $[a, b]$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers f sur $[a, b]$. Pour cela, on remarquera que

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\|.$$

3. Déduire que f est continue en tout $x_0 \in [a, b]$ puis conclure.

Exercice 2: Soit E l'espace vectoriel des fonctions $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$ s'annulant en 0 et 1. On pose

$$\|y\| = \sup_{x \in [0, 1]} |y(x)| \text{ et } [y] = |y'(0)| + \|y''\|.$$

1. Montrer que $[.]$ est une norme sur E et qu'on a $\|y\| \leq [y]$ pour tout $y \in E$.
2. Montrer que E muni de cette norme est un espace de Banach.

Exercice 3: On munit successivement $\mathbb{R}^2$ des normes classiques:

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|), \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ représentée dans la base canonique par la matrice (a, b) . Montrer que $\|\varphi\|$ vaut successivement: $\max(|a|, |b|)$, $|a| + |b|$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 4: 1. X est un ensemble quelconque et $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ désigne l'espace des applications définies sur X à valeurs réelles et bornées. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (celle du sup). Vérifier rapidement que c'est un espace complet
2. On définit sur l'espace des suites réelles bornées la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_n |u_n|.$$

Justifier que c'est un espace de Banach. (utiliser 1.)

3. F est l'espace des suites à support fini (c'est à dire telles que $\{u(\mathbb{N})\}$ soit un ensemble fini) et on y définit la norme:

$$\|u\|_1 = \sum_{u_n \in u(\mathbb{N})} |u_n|.$$

On considère l'application $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \sum_{u_n \in u(\mathbb{N})} u_n$.

a. Montrer que f est linéaire.

b. Etudier la continuité de f avec respectivement les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$. Dans le (ou les) cas où f est continue, calculer $\|f\|$.

Exercice 5: Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

On considère successivement les normes:

i) $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^m$.

ii) $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Calculer $\|A\|$ dans le premier cas, la majorer dans le second cas.

Exercice 6: Soit A l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ qui à tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre l'application linéaire $A(x, y)$ représentée dans la base canonique par la matrice:

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & -y^2 \end{pmatrix}$$

Soit B l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $B(x, y) = (-y, x)$.

Calculer $C = A \circ B$ et φ définie par: $\varphi(x, y) = A(x, y)[B(x, y)]$. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 7: On munit l'espace $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de la norme

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

1. Vérifier que c'est bien une norme.

2. Montrer que E muni de cette norme n'est pas un espace de Banach. On pourra se placer dans le cas $[a, b] = [0, 1]$ et considérer la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies par $f_n(x) = 0$ si $x \notin]1/2 - 1/(n+2), 1/2 + 1/(n+2)[$ et le graphe suivant. On vérifiera que c'est une suite de Cauchy non convergente dans E .