UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
& Informatique- Rabat

Année Universitaire 2005/06
Session Automne-hiver
Module de calcul différentiel

Série ♯ 2

Exercice 1:
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1) Soit N_1 la norme $x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Montrer que N_1 est différentiable en un point $a = (a_1, ..., a_n)$ si et seulement si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $a_i \neq 0$.

2) Soit N_∞ la norme $x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto N_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}|x_i|$. Montrer que N_∞ est différentiable en un point $a = (a_1, ..., a_n)$ si et seulement s'il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que, pour tout $i \neq i_0$, $|a_i| < |a_{i_0}|$. Calculer dans ce cas $N'_\infty(a)$.

Exercice 2: Dérivée d'un quotient
Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, a un point de U, f et g deux applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables au point a. On suppose que g ne s'annule pas sur U. On définit une application $q : U \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in U$

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Montrer que q est différentiable au point a et donner sa différentielle $Dq(a)$.

Exercice 3:
Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x \mid y)$ et de la norme associée $\|x\| = (x \mid x)^{1/2}$. Soit u un endomorphisme continu, autoadjoint de E, c'est à dire vérifiant, pour tous x et $y \in E$, $(x \mid u(y)) = (u(x) \mid y)$. Soit $f : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{(x \mid u(x))}{(x \mid x)}.$$

1) Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$, $x \longmapsto (x \mid u(x))$ est différentiable sur E. Calculer sa différentielle.
2)a) Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle Df.
2)b) Montrer qu'un élément non nul a de E vérifie $Df(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 4: Application point fixe

Soient E et F deux espaces de Banach et λ un réel vérifiant $0 < \lambda < 1$. Soit $\phi : E\text{x}F \to F$ une application qui vérifie, pour tout $(x, y, z) \in E\text{x}F\text{x}F$,

$$\|\phi(x, y) - \phi(x, z)\| \leq \lambda \|y - z\|.$$

1) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément de F, noté $f(x)$, tel que $\phi(x, f(x)) = f(x)$.

2) On suppose désormais l'application ϕ différentiable sur $E\text{x}F$ et on note ${\phi_1}'(x, y)$ et ${\phi_2}'(x, y)$ ses différentielles partielles au point $(x, y) \in E\text{x}F$.

a) Soit (a, b) un point de $E\text{x}F$. Montrer que $\|{\phi_2}'(a, b)\| \leq \lambda$. En déduire que l'application $\mathrm{id}_F - {\phi_2}'(a, b)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(F, F)$.

b) On suppose, dans cette question, que l'application f est différentiable au point a. Calculer $f'(a)$.

Exercice 5:

Soit E un espace vectoriel normé, $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : I \to E$ une application. On suppose que f admet en tout point x de I une dérivée à droite ${f_d}'(x)$. Montrer que si l'application $x \longmapsto {f_d}'(x)$ est continue en un point $x_0 \in I$, alors f est différentiable en x_0.(On pourra considérer l'application $g : I \to E$, $g(x) = f(x) - {f_d}'(x_0)(x - x_0)$, et lui appliquer le théorème des accroissements finis).

Exercice 6:

Soit f une fonction à valeurs dans un espace de Banach E, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un intervalle ouvert I. On pose

$$\begin{cases} g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y \\ g(x, x) = f'(x). \end{cases}$$

1) Montrer que g est continue dans $I\text{x}I$, et de classe $\mathcal{C}^1$ dans $I\text{x}I \setminus \bigcup_{x \in U} \{(x, x)\}$.

2) Si $f''(x_0)$ existe pour $x_0 \in I$, montrer que g est différentiable en (x_0, x_0).(Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) - xf'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2} f"(x_0)))$$