UNIVERSITE MOHAMMED V- AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Rabat

Année Universitaire 2008/09
Session de printemps
Module de calcul différentiel
Série ♯ 3

Pour tout entier n, on note $I\!R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable X, à coefficients réels, de degré $\leq n$, muni de la norme $\|P\| = sup_{x\in[0,1]} \mid P(x) \mid$.
Soit $E = I\!R_n[X]$, $F = I\!R_{3n}[X]$ et ϕ $E \to F$ l'application $\phi(P) = P^3$.
1) Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle $D\phi(P)$ en tout point P de E. Vérifier que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.
2) On fait $n = 1$. Donner l'expression de la matrice $D\phi(P)$ dans les bases canoniques de E et de F.

Exercice 2:
L'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1])$ des fonctions numériques définies et continues sur $[0,1]$ est muni de la norme de la convergence uniforme $f \longmapsto \|f\| = sup_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$. Soit $\phi:\ I\!R \to I\!R$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer que l'application $g:\ E \to I\!R$ définie par $g(f) = \int_0^1 \phi(f(x))\,dx$ est différentiable sur E et que sa différentielle au point f est donnée, pour $u \in E$, par
$g'(f)(u) = \int_0^1 \phi'(f(x))u(x)\,dx$.

Exercice 3:
Soient $p, q \in I\!N^*$ et $f\ :\ I\!R^2 \to I\!R$ l'application

$$f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)\ ;\ f(0,0) = 0.$$

Pour quelles valeurs de p et q l'application f est-elle continue sur $I\!R^2$? différentiable sur $I\!R^2$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\!R^2$? différentiable au sens de Gâteaux au point $(0,0)$?

Exercice 4:
Soit $f\ :\ I\!R^2 \to I\!R$ l'application

$$f(x,y) = y^2\, sin\,(\frac{x}{y})\ ,\ \text{si } y \neq 0\ ,\ f(x,0) = 0.$$

Etudier successivement la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f, la différentiabilité de f en tout point de $I\!R^2$.

Exercice 5: Dérivée d'un quotient
Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, a un point de U, f et g deux applications de U dans $I\!R$ différentiables au point a. On suppose que g ne s'annule pas sur U. On définit une application $q : U \to I\!R$ en posant, pour $x \in U$

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Montrer que q est différentiable au point a et donner sa différentielle $Dq(a)$.

Exercice 6:

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x \mid y)$ et de la norme associée $\|x\| = (x \mid x)^{1/2}$. Soit u un endomorphisme continu, autoadjoint de E, c'est à dire vérifiant, pour tous x et $y \in E$, $(x \mid u(y)) = (u(x) \mid y)$. Soit $f : E \setminus \{0\} \to I\!R$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{(x \mid u(x))}{(x \mid x)}.$$

1) Montrer que l'application de E dans $I\!R$, $x \longmapsto (x \mid u(x))$ est différentiable sur E. Calculer sa différentielle.

2)a) Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle Df.

2)b) Montrer qu'un élément non nul a de E vérifie $Df(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 7: Application point fixe

Soient E et F deux espaces de Banach et λ un réel vérifiant $0 < \lambda < 1$. Soit $\phi : E\text{x}F \to F$ une application qui vérifie, pour tout $(x, y, z) \in E\text{x}F\text{x}F$,

$$\|\phi(x, y) - \phi(x, z)\| \leq \lambda \|y - z\|.$$

1) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément de F, noté $f(x)$, tel que $\phi(x, f(x)) = f(x)$. (Utiliser le théorème du point fixe)

2) On suppose désormais l'application ϕ différentiable sur $E\text{x}F$ et on note ${\phi_1}'(x, y)$ et ${\phi_2}'(x, y)$ ses différentielles partielles au point $(x, y) \in E\text{x}F$.

a) Soit (a, b) un point de $E\text{x}F$. Montrer que $\|{\phi_2}'(a, b)\| \leq \lambda$. En déduire que l'application $\mathrm{id}_F - {\phi_2}'(a, b)$ est un élément inversible de $\mathcal{L}(F, F)$.

b) On suppose, dans cette question, que l'application f est différentiable au point a. Calculer $f'(a)$.

Exercice 8:

1. Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable à l'origine.
2. Soit E un espace préhilbertien réel muni de la norme issue du produit scalaire $(\varphi(x) = \|x\| = \sqrt{< x, x >})$. Montrer que cette norme est différentiable en tout $x \neq 0$ et donner sa différentielle $D\varphi(x)$.

Exercice 9: Soient f et g deux fonctions différentiables (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) de $I\!R^2$ dans $I\!R$. On pose: $\varphi(x, y) = f(x, y)$ si $g(x, y) > 0$ et $\varphi(x, y) = f(x, y) + g(x, y)^2$ si $g(x, y) \leq 0$.

La fonction φ est-elle continue? différentiable? $\mathcal{C}^1$?

Exercice 10:

Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[-1, 1]$ à valeurs dans X muni de la norme de la convergence uniforme, et ϕ l'application de E dans X définie par $\phi(f) = f(0)$.

Montrer que ϕ est différentiable et calculer sa différentielle.