Série 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.

- i- Etudier la continuité de f en $(0, 0)$.
- ii- Calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$, et en un point $(x, y) \neq (0, 0)$. Sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?
- iii- Etudier l'existence des dérivées directionnelles de f en (a, b) , suivant le vecteur $\vec{h} = (h, k)$. si elle existe, l'application $\vec{h} \rightarrow D_{\vec{h}}f(a, b)$ est-elle linéaire ?
- iv Mêmes questions avec $f(x, y) = \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}$, si $x \neq 0$, et $f(0, y) = 0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{|y|(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + y^2)^2 + y^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

- i- Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
- ii- Montrer que toutes les dérivées directionnelles de f en $(0, 0)$ sont nulles.
- iii- Montrer cependant que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
- iv- Retrouvez géométriquement que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$, en montrant qu'il existe une courbe tracée sur le graphe de f dans $\mathbb{R}^3$ qui ne s'aplatit pas à l'origine sur le plan $xOy \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit E et F deux espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), Ω un ouvert de E , $a \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow F$ et $g : \Omega \rightarrow F$ deux applications différentiables en a .

1. Une application linéaire de E dans F est-elle différentiable ? Si c'est le cas quelle est sa différentielle ?
Etudier la différentiabilité de l'application

$$\varphi : (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty}) \ni f \rightarrow \int_{[0, 1]} f(t)dt \in \mathbb{K}$$

2. Montrer que $f + g$ est différentiable en a et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.f$ est différentiable.
4. Conclusion ?

Exercice 4. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $v(x) = \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ la norme de E . Montrer que $v : E \setminus \{0_E\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D^2v(x)$ pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$. À l'aide du théorème de la moyenne, démontrer la seconde inégalité triangulaire.

Exercice 5. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|$ et soit $f : E \times E \ni (x, y, z) \mapsto E$ définie par $f(x, y) = (\sin(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D^2f(x, y)$.

Exercice 6. Calculer la différentielle seconde de $f(x, y) = 1 + x(y^2 + 2)$.

Exercice 7. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E , U un ouvert de F et $f : \Omega \rightarrow U$ et $g : U \rightarrow G$ deux applications deux fois différentiables.

- i- Soit $B : \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; G)$ définie par $B(V, U) = V \circ U$. Montrer que B est $\mathcal{C}^\infty$.
- ii- Exprimer $D(g \circ f)$ en fonction de B, Df et f .
- iii- Calculer $D^2(g \circ f)(x)$ et retrouver l'expression de $(g \circ f)''(x)$, lorsque $E = F = G = \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E , et $f : \Omega \rightarrow F$ une application admettant en un point $a \in U$ une différentielle d'ordre 2. Soit $\vec{h} \in E$.

- i- Montrer que $D_{\vec{h}}f : \Omega \ni x \mapsto D_{\vec{h}}f(x) \in F$ est différentiable en a .
- ii- Calculer $D(D_{\vec{h}}f(a))$.
- iii- En déduire $D^2L(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $L : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est n -linéaire continue. En déduire également $D^2f(a)$, lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en a .
- iv- Retrouver la différentielle seconde de l'application de l'exercice 6.