Université Mohamed V **Anneé universitaire 2010-2011**
Faculté des sciences de Rabat **SMA6**
Département de mathématiques

Série 3

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications dérivables sur $[0,1]$
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, à dérivée continue sur $[0,1]$ et telles que $f(0) = 0$. On note pour tout $f \in E$, $\|f\|_E = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $F = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$. On note pour tout $g \in F$, $\|g\|_E = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

On admettera que $(E, \|\|_E)$ et $(F, \|\|_F)$ sont deux espaces de Banach.

1. Montrer que :
$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & F \\ E & \mapsto & \varphi(f) = f^{'2} \end{array}$$
est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer, pour tout $f, h \in E$, $D\varphi(f)(h)$.
2. Soit $\varphi : E \to F$ l'application définie par $\varphi(f) = f^{'2} + f$. Montrer que φ est une application $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $D\varphi(f)(h)$, pour tout $f, h \in E$.
3. Soit $\Omega = \{f \in E; f'(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,1]\}$. Montrer que Ω est un ouvert de E.
4. Montrer que quel que soit $f \in \Omega, D\varphi(f) : E \to F$ est bijective.
En déduire que $D\varphi(f) \in Isom(E,F)$.
5. Soit $f_0 \in \Omega$ et $g_0 = \varphi(f_0) = f_0^{'2} + f_0$. Montrer grâce au théorème d'inversion local, qu'existent Ω_{g_0} un voisinage ouvert de g_0 dans F et Ω_{f_0} un voisinage ouvert de f_0 dans E, tel que pour tout $g \in \Omega_{g_0}$ l'équation dfférentielle $\mathcal{E}_g : f^{'2} + f = g$ admet une solution unique dans $f \in \Omega_{f_0}$.

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $(x,y) \to (x|y)$, et de la norme associée. Soit $a \in \Omega$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.

1. On pose, pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$,
$$g(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2.$$
Montrer que la différentielle seconde $g^{''}_{xy}(x,y)$ existe et la déterminer.
2. On suppose désormais que, pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$, $\|f'(x)(h)\| = \|h\|$. Montrer que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ (Utiliser TAF).
3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que la restriction de f à ce voisinage soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_a sur $f(U_a)$. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert $V_a \subset U_a$ tel que, pour tout x et $y \in V_a$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

4. Etablir que, pour tout x et $y \in V_a$ et h et $k \in \mathbb{R}^n$,

$$(f'(x)(h)|f'(y)(k)) = (h|k).$$

Exercice 3. Soit E un espace de Banach. On définit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : L(E) & \to & L(E) \\ u & \to & \dfrac{1}{2}(u \circ u) \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $L(E)$ et déterminer df_u, $u \in L(E)$.

2. Soit $u_0 \in L(E)$ tel que $\|u_0 - id\| \leq 1$.

a) Montrer que : $\|df(u_0).h - h\| \leq \|u_0 - id\|\|h\|$, pour tout $h \in L(E)$. En déduire que $df(u_0)$ est inversible.

b) Montrer qu'il existe un voisinage V de u_0 tel que $f_{|V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$ et $\psi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \sin(f(0))$ et $\psi(f) = \cos(f(0))$.

1. Montrer que ϕ et ψ sont de classe $\mathbb{C}^\infty$.
2. Déterminer $D(\phi(f).h)$ pour f, $h \in E$.
3. Calculer $D^2(\phi(f).(h, k))$ pour f, h, $k \in E$.

Exercice 5. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$f(x, y, z) = z^2 + e^{z+x-y^2} + \sin(x - y + z) = 0 \qquad (*)$$

1. Montrer que z peut s'écrire sous la forme $z = \varphi(x, y)$, où φ est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ définie sur un voisinage $V(0, 0) \subset \mathbb{R}^3$ et telle que $\varphi(0, 0) = 0$.
2. À partir de l'équation $(*)$, déduire
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) \ \ et \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0).$$
3. Calculer
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0, 0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0, 0) \ et \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0, 0).$$