Département de Mathématiques - Faculté des Sciences
Université Mohammed V de Rabat

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

M28
Théorie de la mesure et de l'intégration

(2017 - 2018)

Allal GHANMI

Table des matières

Chapitre 1

Espaces mesurables

Dans toute la suite X désignera un ensemble non vide. On notera par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de parties de X.

1.1 Clans (Algébres de Boole)

Définition 1.1.1. *Une classe $\mathscr{C}$ de parties de X est appelée clan (ou algèbre de Boole ou tout simplement algèbre) si :*

1. $\emptyset \in \mathscr{C}$.
2. *$\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire dans X : si $A \in \mathscr{C}$, alors $A^{\complement} = X \setminus A \in \mathscr{C}$.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cup B \in \mathscr{C}$.*

Exemples 1.1.2. *Il y a beaucoup d'algèbres sur un ensemble non-vide donné X.*

— *La plus grosse est l'algèbre $\mathcal{P}(X)$.*

— *La plus petite est $\{\emptyset, X\}$.*

— *Soit $A \subset X$. La plus petite algèbre contenant A est la collection constituée de $\emptyset$, A, $A^{\complement}$ et X.*

— *L'intersection de deux algèbres $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur X, définie par*

$$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 := \{A \subset X;\ A \in \mathscr{C}_1 \text{ et } A \in \mathscr{C}_2\},$$

est encore une algèbre sur X. Plus généralement, L'intersection d'une famille quelconque d'algèbres sur X est une algèbre sur X.

Remarque 1.1.3. *Soit $\mathscr{C}$ un clan de parties de X. Les propriétés suivantes sont immédiates :*

1. $X \in \mathscr{C}$.
2. *$\mathscr{C}$ est stable par différence non symétrique : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{C}$.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par différence symétrique : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{C}$.*
4. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion finie : si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{C}$.*
5. *$\mathscr{C}$ est stable par intersection finie : si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{C}$.*

Il y a d'autres systèmes équivalents à l'ensemble des axiomes dans la définition d'une algèbre. On cite par exemple la définition équivalente suivante :

Définition 1.1.4. *$\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est un clan sur X si et seulement si*

1. *$\mathscr{C}$ non-vide.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable différence non symétrique.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion.*

1.2 Tribus (σ-Algébres de Boole)

Définition 1.2.1. *Une collection $\mathscr{C}$ de parties de X, $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$, est dite tribu (ou σ-algèbre ou encore σ-algèbre de Boole) sur X si elle possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathscr{C}$ est non-vide.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion au plus dénombrable.*

Définition 1.2.2. *Le couple $(X; \mathscr{C})$ formé d'un ensemble non vide X et d'une tribu $\mathscr{C}$ sur X est dit espace mesurable. Les éléments de $\mathscr{C}$ sont appelés les parties $\mathscr{C}$-mesurables de X ou simplement mesurables s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la tribu $\mathscr{C}$.*

Exemples 1.2.3. *L'ensemble des tribus sur X est évidemment non vide. Les exemples des algèbres sur X cités précédemment sont aussi des σ-algèbres sur X :*
- *La plus grosse est la tribu $\mathcal{P}(X)$.*
- *La plus petite est $\{\emptyset, X\}$.*
- *Soit $A \subset X$, la plus petite tribu contenant A est $\{\emptyset, A, A^{\complement}, X\}$..*

Remarque 1.2.4. *Toute tribu (σ-algèbre) sur X est un clan (algèbre) sur X. En revanche, il existe des algèbres qui ne sont pas des tribus. Un des contre-exemples est donné par*

$$\mathscr{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \text{ ou } A^{\complement} = X \setminus A\}$$

où X est un ensemble non vide et infini.

Remarque 1.2.5. *Soit $(X; \mathscr{M})$ un espace mesurable. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. *$\mathscr{M}$ contient nécessairement les parties $\emptyset$ et X.*
2. *$\mathscr{M}$ est stable par intersection dénombrable.*
3. *$\mathscr{M}$ est stable par différence non symétrique et par différence symétrique.*

Comme dans le cas des clans, il y a d'autres systèmes équivalents à l'ensemble des axiomes définissant une tribu. Par exemple :

Définition 1.2.6. *$\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X si et seulement si*

1. *$X \in \mathscr{C}$.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable par différence non symétrique.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion au plus dénombrable.*

1.3 Construction des tribus

1.3.1 Constuction 1 : Tribu trace (induite)

Soit $\mathscr{M}$ une tribu de parties de X. Pour toute partie fixée C non vide de X, on définit

$$\mathscr{M}_C := \{A \cap C; \quad A \in \mathscr{M}\}.$$

Alors $\mathscr{M}_C$ est une tribu sur C, appelée tribu induite par $\mathscr{M}$ (ou encore tribu trace de $\mathscr{M}$) sur C.

Attention : Ici, il faut prendre le complémentaire dans C.

1.3.2 Constuction 2 : Tribu image réciproque

Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \longrightarrow Y$ une application donnée. Si $\mathscr{M}_Y$ est une tribu sur Y, alors $f^{-1}(\mathscr{M}_Y) = \left\{f^{-1}(B); B \in \mathscr{M}_Y\right\}$ est une tribu sur X.

Pour la vérification, on utilise les propriétés suivants

$$\complement\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}(\complement A); \quad f^{-1}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

ainsi que $f^{-1}(Y) = X$.

1.3.3 Constuction 3 : Intersection de tribus

La plus part des tribus "intéressantes" sur X sont construites en utilisant le résultat que *toute intersection (dénombrable ou non) de tribus de parties de X est encore une tribu de parties de X.*

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de X. La tribu*

$$\bigcap_{\left\{\substack{\mathscr{M} \text{ tribu sur } X \\ \mathscr{M} \supset \mathcal{F}}\right\}} \mathscr{M} =: \sigma(\mathcal{F})$$

est la plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.2. *$\sigma(\mathcal{F})$ est dite la tribu sur X engendrée par $\mathcal{F}$.*

Proposition 1.3.3. *1) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux collections de parties de X. Alors,*

i) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$, alors $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}')$ (en particulier si $\mathscr{C}'$ est une tribu, on a $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}'$).

ii) On a $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}') \iff \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}')$.

iii) $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}') \iff \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}')$ et $\mathscr{C}' \subset \sigma(\mathscr{C})$.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application et $\mathscr{C}_Y$ une collection de parties de Y, alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}_Y)) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}_Y)).$$

Remarque 1.3.4. *On peut avoir $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}')$ pour deux classes différentes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Par exemple, on a $\sigma(\{A\}) = \sigma(\{A^{\complement}\})$.*

Remarque 1.3.5 (Emboitage des Tribus)**.** *On rencontrera souvent la situation du cas particulier de la proposition précédente : on aura deux tribus $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sur le même ensemble X et on voudra montrer que $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$. Si on sait que $\mathscr{M}$ est engendrée par une collection $\mathscr{C}$ (autrement dit $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{M}$), il suffira alors de prouver que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}'$.*

1.3.4 Constuction 4 : Tribu produit

Soient $(X; \mathscr{M}_X)$ et $(Y; \mathscr{M}_Y)$ deux espaces mesurables.
- La tribu produit de $\mathscr{M}_X$ et $\mathscr{M}_Y$ est la tribu sur le produit cartésien $X \times Y$, noté $\mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y$, engendré par les parties $A \times B$ où $A \in \mathscr{M}_X$ et $B \in \mathscr{M}_Y$.
- Le couple $(X \times Y; \mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y)$ est dit espace mesurable produit des espaces $(X; \mathscr{M}_X)$ et $(Y; \mathscr{M}_Y)$.

Remarque 1.3.6. *Le produit cartésien des deux tribus, $\mathscr{M}_X \times \mathscr{M}_Y$, n'est pas une tribu sur $X \times Y$ (La stabilité par réunion dénombrable tombe en défaut). Mais on a bien*

$$\mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y = \sigma(\mathscr{M}_X \times \mathscr{M}_Y).$$

1.4 Tribu de Borel

La notion de tribu borélienne est liée à la structure topologique de l'ensemble de base.

Définition 1.4.1 (Topologie)**.** *On appelle espace topologique tout couple $(X; \mathscr{O})$ formé d'un ensemble non vide X et d'une famille $\mathscr{O}$ de parties de X possédant les propriétés*

1. *$\mathscr{O}$ contient les parties $\emptyset$ et X.*
2. *$\mathscr{O}$ est stable par intersections finies.*
3. *$\mathscr{O}$ est stable par réunions quelconques.*

Les éléments de $\mathscr{O}$ sont les ouverts de la topologie. Les complémentaires des ouverts sont les fermés de la topologie.

Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$:

La topologie dite usuelle sur $\mathbb{R}$ est donnée par la collection $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ des parties de $\mathbb{R}$ qui sont unions d'intervalles ouverts $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette topologie usuelle, un ensemble $O \subset \mathbb{R}$ est ouvert si

$$\forall x \in O,\ \exists b \in O,\ x \in]a, b[\subset O.$$

Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, on considère

$$\mathcal{I} = \{(\rho, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*;\ ]\rho - r, \rho + r[\subset O\}.$$

Alors $\mathcal{I}$ est dénombrable (elle s'injecte dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) et

$$O = \bigcup_{(\rho,r)\in\mathcal{I}}]\rho - r, \rho + r[.$$

Ainsi tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion au plus denombrable d'intervalles ouverts (on peut même se limiter à des intervalles à extrémités rationnelles).

Tribu de Borel

Définition 1.4.2. *Soit $(X;\mathscr{O})$ un espace topologique. La tribu de parties de X engendrée par la famille $\mathscr{O}$ est appelée tribu de Borel ou encore tribu des boréliens de X.*

Remarque 1.4.3.
- *On note $\mathfrak{B}(X)$ la tribu borélienne de l'espace topologique $(X;\mathscr{O})$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la topologie mise sur X.*
- *Les ouverts et les fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, les réunions dénombrables de fermés sont des éléments de $\mathfrak{B}(X)$, dits des boréliens de X.*

Théorème 1.4.4. *Soit $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, où $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ est la collection de parties de $\mathbb{R}$ qui sont unions d'intervalles ouverts. Alors, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par l'un des classes suivantes*

1. *La collection $\mathscr{J}_1 := \{]a,-\infty[;\ a\in\mathbb{R}\}$.*
2. *La collection $\mathscr{J}_2 := \{]a,-\infty[;\ a\in\mathbb{Q}\}$.*
3. *La collection $\mathscr{J}_3 := \{[a,-\infty[;\ a\in\mathbb{R}\}$.*
4. *La collection $\mathscr{J}_4 := \{[a,-\infty[;\ a\in\mathbb{Q}\}$.*
5. *La collection $\mathscr{J}_5 := \{]a,b[;\ a,b\in\mathbb{R}\}$ des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$.*

Preuve :
- Pour tout $k = 1,2,3,4,5$, on a $\mathscr{J}_k \subset \mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ et donc
$$\sigma(\mathscr{J}_k) \subset \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) =: \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$
- Il est clair que $\mathscr{J}_2 \subset \mathscr{J}_1 \subset \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \supset \mathscr{J}_3 \supset \mathscr{J}_4$. Il en résulte que
$$\sigma(\mathscr{J}_2) \subset \sigma(\mathscr{J}_1) \subset \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) =: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathscr{J}_3) \supset \sigma(\mathscr{J}_4).$$
- La preuve sera achevée en montrant
$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathscr{J}_2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathscr{J}_4)$$
Pour ceci, il suffit alors de vérifier que
$$\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_2) \text{ et } \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_4).$$

Montrons par exemple que $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_2)$: Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus denombrable d'intervalles de la forme $]a,b[$ avec $a<b$ et $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, il suffit alors de montrer que ces derniers sont dans $\sigma(\mathscr{J}_2)$.

- Pour tout $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ avec $a<b$, il existe deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{Q}$ vérifiant
  - (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante avec $a<a_n<b_n<b$
  - $a_n\to a$ et $b_n\to b$

  telles que
$$]a,b[= \bigcup_n]a_n,b_n[$$

— Or on a

$$]a_n, b_n[=]-\infty, b_n[\cap \left(\overbrace{\bigcap_{k\geq 1}]-\infty, a_n + \frac{1}{k}[}^{]-\infty, a_n]} \right)^{\complement} \in \sigma(\mathscr{J}_2).$$

Remarques 1.4.5. — *$\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_4)$ s'établit de manière analogue.*

— *Une démonstration directe de $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_1) = \mathscr{M}_1$ est la suivante*
  — *Par construction, on a $]a, +\infty[\in \mathscr{J}_1 \subset \mathscr{M}_1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
  — *Par intersection dénombrables d'éléments de $\mathscr{M}_1$ et passage au complémentaire, on a aussi*

$$]-\infty, a[= ([a, +\infty[)^{\complement} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, +\infty[\right)^{\complement} \in \mathscr{M}_1.$$

  — *Comme intersection de deux éléments de $\mathscr{M}_1$, on a*

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[\in \mathscr{M}_1; \quad a < b.$$

  On conclut alors $\mathscr{M}_1$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1 \supset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

— *La preuve de $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_5)$, est immédiate du fait que tout ouvert est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés (voir le rappel topologique).*

Chapitre 2

Fonctions mesurables

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *Soit* $(X, \mathscr{M})$ *et* $(X', \mathscr{M}')$ *deux espaces mesurables et* $f : X \longrightarrow X'$ *une fonction. On dit que* f *est* $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$*-mesurable (ou simplement mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté) si*

$$f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M},$$

c'est-à-dire que pour tout $A' \in \mathscr{M}'$ *on a* $f^{-1}(A') \in \mathscr{M}$.

Définition 2.1.2. *Lorsque* $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{M}'$ *sont des tribus boréliennes, toute fonction* $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$*-mesurable* f *de* X *dans* X' *est dite fonction* $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$*-borélienne.*

Remarque 2.1.3. *Soient* $(X, \mathscr{M}_1)$, $(X, \mathscr{M}_2)$, $(X', \mathscr{M}'_1)$ *et* $(X', \mathscr{M}'_2)$ *des espaces mesurables. Si* $f : X \longrightarrow X'$ *est* $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}'_1)$*-mesurable, alors*

1. f *est aussi* $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}'_1)$*-mesurable si* $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$.
2. f *est aussi* $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}'_2)$*-mesurable si* $\mathscr{M}'_1 \supset \mathscr{M}'_2$.
3. f *est aussi* $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}'_2)$*-mesurable si* $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ *et* $\mathscr{M}'_1 \supset \mathscr{M}'_2$.

Exemple 2.1.4. *Soit* X *un ensemble. Toute fonction* f *de* $(X, \mathcal{P}(X))$ *dans un espace mesurable quelconque* $(Y, \mathscr{M})$ *est* $(\mathcal{P}(X), \mathscr{M})$*-mesurable. Rien à prouver puisque pour toute* $B \in \mathscr{M}$, *on a* $f^{-1}(B)$ *est effectivement une partie de* X.

Exemple 2.1.5. *Si* $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{M}'$ *sont deux tribus sur* X, *alors l'application identité* $Id_X : X \longrightarrow X;$ $f(x) = x$, *est* $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$*-mesurable si et seulement si* $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$. *Ceci résulte du fait que pour toute partie* $B \in \mathscr{M}'$, *on a* $f^{-1}(B) = B \in \mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$.

Exemple 2.1.6. *Si* $(X, \mathscr{M})$ *et* $(X', \mathscr{M}')$ *sont deux espaces mesurables. Les applications constantes* $f : X \longrightarrow X'$ *(i.e., il existe* $b \in X'$ *tel que* $f(x) = b$ *pour tout* $x \in X$*) sont des fonctions* $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$*-mesurables. En effet, pour toute* $B \in \mathscr{M}'$, *on a* $f^{-1}(B) = X$ *si* $b \in B$ *et* $f^{-1}(B) = \emptyset$ *si* $b \notin B$. *Dans les deux cas, on a* $f^{-1}(B) \in\subset \mathscr{M}$.

Exemple 2.1.7. *Soit* $(X, \mathscr{M})$ *un espace mesurable et* A *une partie de* X. *La fonction indicatrice* $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *de* A *définie par*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

est $(\mathscr{M}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{M}$. Ceci est du au fait que pour toute $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & si\ 0,1 \notin A, \\ A^c & si\ 0 \in A, 1 \notin A, \\ A & si\ 1 \in A, 0 \notin A; \\ X & si\ 0,1 \in A. \end{cases}$$

Il en resulte alors que χ_A est $(\mathscr{M}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{M}$.

Proposition 2.1.8. *Le composé de fonctions mesurables est encore une fonction mesurable. Autrement dit, la mesurabilité des fonctions est stable par composition.*

Preuve : Soient $(X, \mathscr{M})$, $(X', \mathscr{M}')$ et $(X'', \mathscr{M}'')$ trois espaces mesurables, $f : X \longrightarrow X'$ une fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable et $g : X' \longrightarrow X''$ une fonction $(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')$-mesurable. On a $g^{-1}(\mathscr{M}'') \subset \mathscr{M}'$ et $f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}$. Par suite

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{M}'') = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{M}'')) \subset f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}.$$

Ceci montre que $g \circ f$ est une fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}'')$-mesurable. $\square$

2.2 Un cas spécial

Théorème 2.2.1. *Soient $(X, \mathscr{M})$ et $(X', \mathscr{M}')$ deux espaces mesurables et $\mathscr{C}'$ une collection de parties de X' engendrant $\mathscr{M}'$ (c-à-d. $\sigma(\mathscr{C}') = \mathscr{M}'$). Une application $f : X \longrightarrow X'$ est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{M}$.*

Preuve : Si f est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable, on a $f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}$. Du fait que $\mathscr{C}' \subset \mathscr{M}' = \sigma(\mathscr{C}')$, on déduit $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}$. Réciproquement, supposons que $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{M}$ et considérons

$$\mathscr{M}'' := \{A' \subset X' / f^{-1}(A') \in \mathscr{M}\}.$$

On a bien

$$\mathscr{C}' \subset \mathscr{M}''.$$

La collection $\mathscr{M}''$ est non vide et c'est bien une tribu sur X' (c'est la tribu image directe - voir TD). Comme $\mathscr{M}'$ est la plus petite tribu sur X' contenant $\mathscr{C}'$, on conclut que $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}''$, et donc

$$f^{-1}(\mathscr{M}') \subset f^{-1}(\mathscr{M}'') \subset \mathscr{M}.$$

D'où f est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable. $\square$

Corollaire 2.2.2. *Soientt X et X' deux ensembles non vides, et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux collections de parties de X et X', respectivement. Alors, toute application $f : X \longrightarrow X'$ satisfaisant $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C}$ est $(\sigma(\mathscr{C}), \sigma(\mathscr{C}'))$-mesurable.*

Preuve : Par hypothèse, on a $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$. On applique alors le théorème précédent (Théorème 2.2.1) avec $\mathscr{M}' = \sigma(\mathscr{C}')$ et $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C})$. $\square$

Corollaire 2.2.3. *Soit $(X, \mathscr{T})$ et $(X', \mathscr{T}')$ deux espaces topologiques. Alors, toute fonction $f : X \longrightarrow X'$ continue sur X (c.à d. $f^{-1}(\mathscr{T}') \subset \mathscr{T}$) est borélienne.*

Preuve : II suffit d'appliquer le résultat précédent; puisque par définition on a

$$\mathfrak{B}(X,\mathscr{T})=\sigma(\mathscr{T}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}(X',\mathscr{T}')=\sigma'(\mathscr{T}').$$

□

Remarque 2.2.4. *Le théorème précédent (ainsi que ses corollaires) est fondamental et permet de montrer la mesurabilité d'une application en ne regardant que les images réciproques d'éléments d'une famille engendrant la tribu de l'espace d'arrivé. Par exemple, si l'espace d'arrivé est* $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$*, il suffira de regarder les images réciproques des parties de la forme* $]a,+\infty[$*,* $a\in\mathbb{R}$ *(ou bien* $a\in\mathbb{Q}$*), car la collection de ces éléments engendre* $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$*.*

Remarque 2.2.5. *Une application borélienne* $f : X \longrightarrow X'$ *n'est pas forcément une fonction continue. Le contre-exemple est donné par la fonction indicatrice d'une partie non-vide borné de* $X=\mathbb{R}$*.*

Corollaire 2.2.6. *Soit* X *et* X' *deux ensembles,* $\mathscr{C}'$ *une collection de parties de* X' *et posons* $\mathscr{B}=\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$ *et* $\mathscr{B}'=\sigma(\mathscr{C}')$*. Si* $f : X\longrightarrow X'$ *une fonction* $(\mathscr{B},\mathscr{B}')$*-measurable, alors*

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))=f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')).$$

*Preuve :*Du fait que $\mathscr{C}'\subset\sigma(\mathscr{C}')$, on a $f^{-1}(\mathscr{C}')\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$. Par suite, $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$ est une tribu sur X contenant $f^{-1}(\mathscr{C}')$, et donc

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))=: f^{-1}(\mathscr{B}').$$

Ensuite, en vertu du théorème précédent, f est $(\mathscr{B},\mathscr{B}'=\sigma(\mathscr{C}'))$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}')\subset\mathscr{B}:=\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$. Alors,

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))\subset\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')).$$

□.

Remarque 2.2.7. *Toute application* $f : X\longrightarrow X'$ *est* $(\mathscr{B},\mathscr{B}')$*-measurable, avec* $\mathscr{B}=\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$ *et* $\mathscr{B}'=\sigma(\mathscr{C}')$ *pour toute collection* $\mathscr{C}'\subset\mathcal{P}(X')$*.*

2.3 Fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$

Dorénavant, sauf mention du contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.3.1. *Soit* $(X,\mathscr{M})$ *un espace mesurable. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $f : X\longrightarrow\mathbb{R}$ *est mesurable.*
2. $A_\alpha:=\{x\in X;\quad f(x)>\alpha\}=:\{f>\alpha\}\in\mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*
3. $B_\alpha:=\{x\in X;\quad f(x)<\alpha\}=:\{f<\alpha\}\in\mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*
4. $C_\alpha:=\{x\in X;\quad f(x)\le\alpha\}=:\{f\le\alpha\}\in\mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*
5. $D_\alpha:=\{x\in X;\quad f(x)\ge\alpha\}=:\{f\ge\alpha\}\in\mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*

Preuve : On applique le théorème précédent puisque ces intervalles engendrent $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (voir Chapitre 1). En effet,

— (1) $\Longleftrightarrow$ (2) (resp. (1) $\Longleftrightarrow$ (3)) grâce au fait que $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ de la forme $]\alpha, +\infty[$ (resp. $]-\infty, \alpha[$) ; $\alpha \in \mathbb{R}$.
— (2) $\Longleftrightarrow$ (4) par passage au complémentaire.
— (3) $\Longleftrightarrow$ (5) par passage au complémentaire.
— Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration directe de (2) $\Longleftrightarrow$ (5). En effet, supposons qu'on a (2), alors

$$A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathscr{M}; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \forall n \geq 1.$$

Ensuite, comme $D_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ et $\mathscr{M}$ est une tribu sur X, on déduit que $D_\alpha \in \mathscr{M}$. Réciproquement, en supposant que l'assertion (3) est vraie, on en déduit que

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{M}.$$

□

Proposition 2.3.2. *Soit f une fonction sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors, f est mesurable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont des fonctions mesurables.*

Preuve : Notons tout d'abord que que $\mathfrak{B}(\mathbb{C}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ et que les projections canoniques $P_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x$ et $P_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto y$ sont continues et donc mesurables. Alors, f est mesurable si et seulement si $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^2; F(x) = (\Re(f)(x), \Im(f)(x))$, est mesurable. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a, +\infty[\times]b, +\infty[) &= F^{-1}(]a, +\infty[\times]b, +\infty[) \\ &= \Re(f)^{-1}(]a, +\infty[) \cap \Im(f)^{-1}(]b, +\infty[). \end{aligned}$$

Par suite, si f mesurable, alors $P_x \circ F =: \Re(f)$ et $P_y \circ F =: \Im(f)$ sont mesurables mesurables (comme composé de fonctions mesurables). Réciproquement, si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ mesurables, alors f mesurable (en tenant compte de la deuxième égalité $f^{-1}(]a, +\infty[\times]b, +\infty[) = \Re(f)^{-1}(]a, +\infty[) \cap \Im(f)^{-1}(]b, +\infty[)$). □

Proposition 2.3.3. *Si f et g sont deux fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *cf est mesurable.*
2. *f^2 est mesurable.*
3. *$|f|$ est mesurable.*
4. *$f + g$ est mesurable.*
5. *$f \times g$ est mesurable.*

Preuve :

1. On a $A_\alpha(cf) = A_{\alpha/c}(f) \in \mathscr{M}$ si $c > 0$ et $A_\alpha(cf) = B_{\alpha/c}(f) \in \mathscr{M}$ si $c < 0$. Le cas $c = 0$ est trivial puisque $A_\alpha(0) = \emptyset$ quand $\alpha \geq 0$ et $A_\alpha(0) = X$ quand $\alpha < 0$.
2. On a $A_\alpha(f^2) = X \in \mathscr{M}$ si $\alpha < 0$ et $A_\alpha(f^2) = A_{\sqrt{\alpha}}(f) \cup B_{-\sqrt{\alpha}}(f) \in \mathscr{M}$ si $\alpha \geq 0$.
3. On a $A_\alpha(|f|) = X \in \mathscr{M}$ si $\alpha < 0$ et $A_\alpha(|f|) = A_\alpha(f) \cup B_{-\alpha}(f) \in \mathscr{M}$ si $\alpha \geq 0$.

4. On a $A_\alpha(f+g) = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r$ (réunion dénombrable), avec
$$S_r := A_r(f) \cap A_{\alpha-r}(g) \in \mathscr{M},$$
pour tout $r \in \mathbb{Q}$. L'inclusion $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r \subset A_\alpha(f+g)$ est clair. Pour l'inclusion inverse, $A_\alpha(f+g) \subset \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r$, notons que pour $x \in A_\alpha(f+g)$ on a $f(x) > \alpha - g(x)$. Il existe alors $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) \geq r \geq g(x) - \alpha$ et donc $f(x) \geq r$ et $g(x) \geq \alpha - r$.
5. La mesurabilité de $f \times g$ peut être vu comme conséquence de (1), (2), (4), puisque
$$f \times g = \frac{1}{4}\left([f+g]^2 - [f-g]^2\right).$$

□

Remarque 2.3.4. *L'assertion (2) est un cas particulier du (5). On peut redémontrer (4) et (5) à l'aide de la fonction mesurable $F = X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par*
$$F(x) := (f(x); g(x))$$
et la mesurabilité (continuité) des fonctions $\varphi; \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définient par
$$\varphi(a,b) = a+b \quad et \quad \psi(a,b) = ab,$$
puisque
$$f+g = \varphi \circ F \quad et \quad f \times g = \psi \circ F.$$

Définition 2.3.5. *A toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on associe les fonctions f^+ et f^- définient respectivement sur X par*
$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \qquad et \qquad f^-(x) = -\inf\{f(x), 0\} = \sup\{-f(x), 0\},$$
de sorte que
$$f = f^+ - f^-.$$
f^+ est dite la partie positive de f et f^- la partie négative de f. Ce sont des fonctions positives $f^+, f^- : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Proposition 2.3.6. *La fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si les fonctions f^+ et f^- sont mesurables.*

Preuve : La proposition est une conséquence immédiate des observations suivantes
$$\bullet f = f^+ - f^-,$$
$$\bullet |f| = f^+ + f^-,$$
$$\bullet f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f),$$
$$\bullet f^- = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

□

Dans la suite, on considerera les fonctions définient sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2.4 Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2.4.1. *Les ouverts (standars) de $\overline{\mathbb{R}}$ sont des réunions des intervalles (ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$) de la forme $]a,b[$, $[-\infty,a[$ et $]b,+\infty]$; $a,b \in \mathbb{R}$.*

Définition 2.4.2. *On appelle tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$ la tribu engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Comme pour $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, on peut montrer que

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{]a,+\infty]; a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a,+\infty]; a \in \mathbb{R}\}) = \cdots .$$

Notation 2.4.3. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. On note par $\mathfrak{M}(X,\mathscr{M})$ l'ensemble des fonctions mesurables sur $(X,\mathscr{M})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 2.4.4. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.*
2. *$\{f > \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
3. *$\{f < \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
4. *$\{f \leq \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
5. *$\{f \geq \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Preuve : La démonstration est similaire à celle donnée dans le cas des fonctions f définient sur X et à valeurs dans $\mathbb{R}$. □

Proposition 2.4.5. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $f,g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions mesurables. Alors,*

$$\{f < g\}; \{f \leq g\}; \{f = g\} \in \mathscr{M}.$$

Preuve :

1. On a
$$\{f < g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in X; f < r < g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r\}) \in \mathscr{M}.$$
2. $\{f \leq g\} \in \mathscr{M}$ s'obtient par passage au complémentaire dans $\{g < f\}$, ou bien grâce au fait que
$$\{f \leq g\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ f < g + \frac{1}{n} \right\}.$$
3. $\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} \in \mathscr{M}$.

□

Proposition 2.4.6. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si*

$$\mathcal{A} := \{x \in X; \quad f(x) = +\infty\} \quad et \quad \mathcal{B} := \{x \in X; \quad f(x) = -\infty\}$$

sont des parties mesurables, et la fonction $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & sur\ \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \\ f(x) & sinon \end{cases} = (1 - \chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}})(x) f(x))$$

est mesurable (avec la convention que $0 \times \pm\infty = 0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Preuve :

— Pour l'implication directe, soit $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$. Alors

$$\mathcal{A} := \{f > n; \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \mathscr{M}$$

et

$$\mathcal{B} := \{f < -n; \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < -n\} \in \mathscr{M}.$$

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}(x) = (1 - \chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}})(x) f(x)$.

— Si $\alpha \geq 0$, alors

$$\{\widetilde{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} \setminus \mathcal{A} \in \mathscr{M}.$$

— Si $\alpha < 0$, on a

$$\{\widetilde{f} > \alpha\} = \{f > \alpha\} \cup \mathcal{B} \in \mathscr{M}.$$

Donc $\widetilde{f}$ est mesurable.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{f}$ est mesurable et que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{M}$. On distingue deux cas. Si $\alpha \geq 0$, on a

$$\{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} \cup \mathcal{A} \in \mathscr{M}.$$

Si $\alpha < 0$, on a

$$\{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} \setminus \mathcal{B} \in \mathscr{M}.$$

Par suite, f est mesurable. □

Remarque 2.4.7. *Il est évident de voir que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(\mathscr{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors la fonction $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $g(x) := f(x); x \in X$, est $(\mathscr{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable. Puisque dans ce cas on a $A = B = \emptyset \in \mathscr{M}$, avec $A = \{g = +\infty\}$ et $B = \{g = (\infty\}$, et $\hat{g} = (1 - \chi_{A \cup B)} g = f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.*

Remarque 2.4.8 (Exercice)**.** *Comme conséquence de la Proposition 2.4.6, on peut montrer que si $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$, alors*

$$cf, \quad f^2, \quad |f|, \quad f^+, \quad f^- \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M}).$$

Noter que cf est identiquement nulle une fois que $c = 0$ (ceci est du au fait que $0 \times (\pm\infty) = 0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$). Notons de plus que la somme $f + g$ de deux fonctions $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, n'est pas en général bien définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

sur les ensembles

$$E_1 := \{x \in X;\ f(x) = +\infty \text{ et } g(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\})$$

et

$$E_2 := \{x \in X;\ f(x) = -\infty \text{ et } g(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \cap^{-1} (\{+\infty\}).$$

Lorsque les fonctions $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont supposées mesurables, il est clair que E_1 et E_2 sont des parties mesurables.

Définition 2.4.9. *Pour $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions sur X. On définit $f + g$ par*

$$(f + g)(x) :== \begin{cases} 0 & \text{sur } E_1 \cup E_2, \\ f(x) + g(x) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Proposition 2.4.10. *Soient $f, g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$. Alors*

1. *$f + g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.*
2. *$f \times g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.*

Preuve : Une démonstration sera donnée plus tard en utilisant le théorème d'approximation.

2.5 Approximation des fonctions mesurables

Proposition 2.5.1. *Soient $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. Alors,* $\sup(f_n)$ *et* $\inf(f_n)$ *sont des fonctions mesurables.*

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\{\sup(f_n) \leq \alpha\} = \bigcap_n \{f_n \leq \alpha\} \in \mathscr{M}.$$

et

$$\{\inf(f_n) \geq \alpha\} = \bigcap_n \{f_n \geq \alpha\} \in \mathscr{M}.$$

Noter qu'on peut utiliser aussi le fait que

$$\inf(f_n) = -\sup(-f_n).$$

□

Corollaire 2.5.2. *Soient $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. Alors* $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont des fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Preuve : On prend $f_1 = f$ et $f_n = g$ pour $n \geq 2$ et on applique le résultat de la proposition précédente. □

Corollaire 2.5.3. *Si $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. Alors, les fonctions* $\liminf_n f_n$ *et* $\limsup_n f_n$ *sont mesurables.*

Preuve : On a

$$\limsup_n f_n = \lim_{n \to +\infty} (\sup_{k \geq n}(f_k)) = \inf_n(\sup_{k \geq n}(f_k)).$$

et

$$\liminf_n f_n = \lim_{n \to +\infty} (\inf_{k \geq n}(f_k)) = \sup_n(\inf_{k \geq n}(f_k)).$$

□

Corollaire 2.5.4. *Soient $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. On a*

1. $\{x \in X; \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ *existe* $\} \in \mathscr{M}$.
2. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ *existe sur X,* $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n : X \longleftarrow \overline{\mathbb{R}}$, *alors elle est dans* $\mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.

Preuve : On a

$$\{x \in X; \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ existe } \} = \{\liminf_n f_n = \limsup_n f_n\}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \liminf f_n = \limsup f_n.$$

□

La réciproque du corollaire précédent peut se déduire en utilisant le théorème d'approximation des fonctions mesurables positives ci-dessous.

Définition 2.5.5. *On appelle fonction étagée sur X, toute fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *mesurable sur X qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distincts dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.5.6. *Si* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction étagée et* α_i ; $i = 1, 2, \cdots$, *les valeurs distincts de* f, *alors les* $A_i = \{f = \alpha_i\} = \{f \geq \alpha_i\} \cap \{f \leq \alpha_i\}$ *sont des parties mesurables et on a*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

Réciproquement, toute combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions caractéristiques de parties mesurables de X est une fonction étagée.

Théorème 2.5.7. *Soit* $f \in \mathfrak{M}^+(X, \mathscr{M})$, *une fonction mesurable positive sur X. Alors, il existe une suite de fonctions* $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant*

1. *Chaque* φ_n *prend un nombre fini de valeurs réels et donc mesurable* $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. *Croissance :* $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$ *pour tout* $x \in X$.

Remarque 2.5.8. *Ce théorème est une première étape dans la construction de l'intégrale de Lebesgue.*

Preuve : Exercice (voir TD).

Corollaire 2.5.9. *Toute fonction mesurable* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *(qui n'est pas forcémént positive) est limite d'une suite de fonctions étagées sur X.*

Preuve : Il suffit d'écrire f sous la forme

$$f = f^+ - f^-$$

avec $f^+, f^- : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions mesurables positives sur X, et d'appliquer ensuite le théorème précedent. □

Corollaire 2.5.10. *Si* $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonctions mesurables, alors* $f + g$ *et* $f \times g$ *sont aussi des fonctions mesurables.*

Preuve : En vertu du corollaire précédent, soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_m)_m$ deux suites croissantes de fonctions étagées positives sur X telles que

$$f = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n \quad \text{et} \quad g = \lim_{m \to +\infty} \psi_m.$$

Alors,

$$f + g = \lim_{n \to +\infty} (\varphi_n + \psi_n)$$

est mesurable. D'autre part

$$f \times g = \lim_{m \to +\infty} (f \times \psi_m)$$

est mesurable. Ceci résulte du fait que les fonctions

$$f \times \psi_m = \lim_{n \to +\infty} (\varphi_n \times \psi_m) : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

sont mesurables, puisque $\varphi_n \times \psi_m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

Chapitre 3

Mesures positives

Dans ce chapitre, on associe à chaque espace mesurable donné $(X, \mathscr{M})$ des fonctions définient sur $\mathscr{M}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, généralisant en quelque sorte la notion de longeur, surface, ...

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1. *On appelle mesure (positive) sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$, la donnée d'une application $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Positive :* $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}^+$ *pour tout* $A \in \mathscr{M}$.
3. *σ-additive : Pour toute famille dénombrable $\{A_n; \quad n \geq 1\}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{M}$, on a*
$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Définition 3.1.2. *Si $(X, \mathscr{M})$ est un espace mesurable et μ une mesure donnée sur $(X, \mathscr{M})$, on dit que le triplet $(X, \mathscr{M}; \mu)$ est un espace mesuré.*

Définition 3.1.3. *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{M})$ est dite finie si $\mu(X) < +\infty$.*

Remarque 3.1.4. *Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité :*
$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$$
pour toute famille finie $\{A_k;\, k = 0, 1, \cdots, n\}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ deux à deux disjoints.

Exemple 3.1.5 (Mesures triviaux)**.** *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. On définit μ_1 et μ_2 sur $\mathscr{M}$ par*
$$\mu_1(A) = 0$$
pour tout $A \in \mathscr{M}$ et
$$\mu_2(A) := \begin{cases} +\infty, & \text{si } A \in \mathscr{M} \setminus \{\emptyset\}; \\ 0, & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$
Alors μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $(X, \mathscr{M})$.

Exemple 3.1.6 (Mesure de Dirac)**.** *Soit $(X;\mathscr{M})$ un espace mesurable et $p \in X$. On définit sur $\mathscr{M}$ l'application $\delta_p : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par*

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 0 & si \quad A \not\ni p; \\ 1 & si \quad A \ni p \end{cases} =: \chi_A(p)$$

pour tout $A \in \mathscr{M}$. Alors δ_p est une mesure finie de X dans $\mathbb{R}$, dite mesure de Dirac en p (qui charge les points).

Remarque 3.1.7. *Dans la définiton précédente, la condition $\mu(\emptyset) = 0$ peut être remplacée par la condition :*

$$\text{Il existe } A \in \mathscr{M} \text{ tel que } \quad \mu(A) < \infty.$$

En effet, d'une part, on a bien $\mu(A) < +\infty$ pour $A = \emptyset \in \mathscr{M}$. D'autre part, si $\mu(A) < +\infty$ pour certain $A \in \mathscr{M}$, on a bien $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$.

Remarque 3.1.8. *Il est intéressant de remarquer que pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}.$$

Remarque 3.1.9. *Dans la définition précédente, on a étendu à $\overline{\mathbb{R}^+}$ l'addition dans $\mathbb{R}^+$ en posant $x + (+\infty) = +\infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}^+}$. Il faut noter aussi que pour tout $x; y; z \in \overline{\mathbb{R}^+}$, l'équation $x + y = x + z$ n'implique $y = z$ que si x est fini.*

Remarque 3.1.10. *Noter également que la somme de la série est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ et que, bien sûr, $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}^+}$) quand $n \to \infty$. Noter aussi que si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = +\infty$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Définition 3.1.11. *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{M})$ est dite σ-finie si X admet un recouverement dénombrable par des éléments de $\mathscr{M}$ de mesures finies. Plus précisement, s'il existe $(E_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{M}$ telle que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

et

$$\mu(E_n) < +\infty$$

pour tout $n \geq 1$.

Remarque 3.1.12. *Noter bien que dans cette définition, on ne suppose pas que les E_n sont forcément deux à deux disjoints.*

Exemple 3.1.13 (Mesure de comptage ou dénombrement)**.** *On définit sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ l'application :*

$$\mu(A) := \begin{cases} Card(A) & si \quad A \quad \text{est une partie finie}; \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

Alors, il est facile de voir que μ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. De plus, elle est σ-finie du fait que $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} E_n$ avec $E_n = \{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mu(E_n) = Card(\{n\}) = 1 < +\infty$.

Remarque 3.1.14. *Toute mesure finie est σ-finie. L'implication inverse n'est pas vraie. En effet, la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est σ-finie mais n'est pas finie.*

3.2 Propriétès élémentaires des mesures positives

Proposition 3.2.1. *Toute mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ satisfait les propriétés :*

(1) Monotonie : Si $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \subset B$, alors

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

En particulier, si de plus $\mu(A) < +\infty$, alors

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \qquad (A \subset B).$$

(2) Additivité forte : Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$, on a

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(3) σ-sous-additivité : Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{M}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Preuve :

— Comme $A \subset B$, la partie B s'écrit sous la forme $B = A \cup (B \setminus A)$ avec A et $(B \setminus A)$ sont des parties mesurables et disjoints. Alors, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. La positivité de la mesure μ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$.
Maintenant, si de plus $\mu(A)$ est finie, on déduit alors que $\mu(B) - \mu(A) = [\mu(A) + \mu(B \setminus A)] - \mu(A)$, c'est-à-dire $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

— Les parties A et $(B \setminus A)$ sont mesurables et disjoints et on a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Alors, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ et par suite

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \qquad (*)$$

Maintenant, puisque

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

avec $A \cap B$ et $(B \setminus A)$ des parties mesurables et disjoints, on obtient

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A). \qquad (**)$$

En substituant $(**)$ dans le second membre de $(*)$, on arrive à

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

— Pour la σ-sous-additivité, soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}$ et considérons les parties $(B_n)_n$ définient par

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

— Les B_n sont des parties mesurables deux à deux disjoints.
— Les B_n vérifient $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— On a $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$

Il en résulte alors que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

□

Théorème 3.2.2. *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

1. *Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

2. *Si $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ avec $\mu(F_1) < +\infty$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

Preuve : Pour la preuve de (1), on distingue deux cas :

Cas 1 : Il existe n_0 tel que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Alors, d'après la croissance de la mesure μ, on obtient

$$+\infty = \mu(E_{n_0}) < \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$$

et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty.$$

D'autre part, comme la suite des réels $(\mu(E_n))_n$ est croissante et $\mu(E_n) = +\infty$ pour tout $n \geq n_0$, il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(E_n) = +\infty$. Enfin

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Cas 2 : $\mu(E_n)$ est finie pour tout n. Considèrons la famille de parties $(A_n)_n$ définie par : $A_1 = E_1$ et $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Par construction, on a $A_n \in \mathscr{M}$ pour tout $n \geq 1$. On note aussi que les A_n sont deux à deux disjoints. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a $E_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, d'où $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Par suite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\right).$$

Comme $(E_n)_n$ est une suite croissante de parties mesurables de mesures finies, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\mu(A_n) = \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}) \qquad (E_{n-1} \subset E_n).$$

Il en résulte

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{N} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) = \mu(A_1) + (\mu(E_N) - \mu(E_1)) = \mu(E_N).$$

Enfin,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mu(E_N).$$

Pour la preuve de (2), on a par hypothèse $\mu(F_1) < +\infty$, alors $\mu(F_n) < +\infty$ pour tout n, ceci est du à la croissance de la mesure μ et au fait que la suite des parties mesurables F_n est décroissante. Par conséquent, la famille $B_n = F_1 \setminus F_n$ est une suite croissante de parties mesurables de mesures

$$\mu(B_n) = \mu(F_1) - \mu(F_n).$$

En appliquant (1) à $(B_n)_n$, il s'ensuit que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} (\mu(F_1) - \mu(F_n)) = \mu(F_1) - \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

D'autre part, on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n,$$

d'où

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right).$$

On conclut alors que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

□

Remarque 3.2.3. *La condition $\mu(F_1) < +\infty$ est nécessaire. En effet, si on prend l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage et on considère les parties mesurables*

$$A_n := \{n, n+1, \cdots\},$$

on voit que $(A_n)_n$ est décroissante et $\bigcap_n A_n = \emptyset$. D'où $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = 0$. Pourtant $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n.

Corollaire 3.2.4. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une application non-infinie. Alors, μ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ si et seulement si*

1. *Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2. *Pour toute suite $(A_n)_n$ croissante d'éléments de $\mathscr{M}$, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve :

— L'implication directe ($\Longrightarrow$) résulte de la définition de mesure et de (1) du théorème précédent.

— Pour l'implication inverse ($\Longleftarrow$), notons tout d'abord qu'il existe $A \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, puisque l'application est non-infinie. Il en résulte que $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) \leq \mu(A) < +\infty$. Par suite, on a $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = 2\mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$, puisque $\mu(\emptyset)$ est finie. D'autre part, pour toute suite $(B_n)_n \subset \mathscr{M}$, on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\leq n} B_k \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Les parties $A_n := \bigcup\limits_{k\leq n} B_k$ sont mesurables et forme une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}$. Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{k\leq n} B_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k).$$

□

Corollaire 3.2.5. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ non-infinie. Alors, μ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ si et seulement si*

(1) Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) Pour toute suite $(A_n)_n$ décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ pour laquelle il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 3.2.6. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable.*

(1) Si $\mu, \nu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ sont deux mesures sur $(X, \mathscr{M})$ et $a > 0$, alors $\mu + a\nu$ est aussi une mesure sur $(X, \mathscr{M})$.

(2) Si $(\mu_n)_n$ est suite croissante de mesures sur $(X, \mathscr{M})$, alors l'application définie par $\mu(A) := \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A)$ est aussi une mesure sur $(X, \mathscr{M})$.

(3) Si $(\mu_n)_n$ est suite de mesures sur $(X, \mathscr{M})$, alors l'application $\mu(A) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu_n(A)$ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$.

Preuve :

— (1) est immédiate.

— (3) est une conséquence de (1) et (2) appliquée à la suite

$$\nu_n = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

— Pour la preuve de (2), on a applique le corollaire :

— Soient $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\mu(A \cup B) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim_{n\to+\infty} (\mu_n(A) + \mu_n(B)) = \mu(A) + \mu(B).$$

— Soit $(A_k)_k \subset \mathscr{M}$ une suite croissante. Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) := \lim_{n\to+\infty}\left(\mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) \overset{\text{Théorème 3.2.2}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{k\to+\infty} \mu_n(A_k)\right).$$

Par la croissance de μ_n, on a $\mu_n(A_k) \leq \mu(A_k)$ et donc

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

D'autre part, on a

$$\mu(A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A_k) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k)\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k)\right).$$

□

3.3 Notions (μ-négligeable et μ-presque partout)

Définition 3.3.1 (Partie négligeable)**.** *Soient $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré et $A \subset X$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \in \mathscr{M}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*

Définition 3.3.2 (Mesure complète)**.** *Soit $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est complète (ou que $(X; \mathscr{M}; \mu)$ est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à $\mathscr{M}$.*

Définition 3.3.3. *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée μ presque partout sur X, et note P μ-p.p, s'il existe une partie mesurable N de mesure nulle telle que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \neq N$.*

Chapitre 4

Mesure de Lebesgue

Il s'agit de prouver l'existence d'une mesure sur la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ de sorte que la mesure d'un intervalle soit égale à sa longeur.

4.1 Un théorème de prolongement

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre sur un ensemble non vide X (i.e. contenant X, et stable par complémetation et réunion finie).

— Les éléments de l'algèbre $\mathscr{A}$ sont dits ensembles élémentaires de $(X, \mathscr{A})$.

— Une fonction élémentaire sur $(X, \mathscr{A})$ est toute combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles élémentaires de $(X, \mathscr{A})$.

— Une mesure sur $\mathscr{A}$ est la donnée d'une application $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

pour toute collection $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$.

— Une mesure μ sur $\mathscr{A}$ est dite σ-finie, s'il existe $(E_n)_n \subset \mathscr{A}$ telle que

$$X = \bigcup_n E_n \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \text{ pour tout } n.$$

Théorème 4.1.1 (Théorème de prolongement de Caratheodory)**.** *Toute mesure σ-finie sur une algèbre $\mathscr{A}$ se prolonge de manière unique en une mesure σ-finie sur $\sigma(\mathscr{A})$, la tribu engendrée par $\mathscr{A}$.*

Preuve : A admettre.

4.2 Mesure de Borel (Lebesgue) sur $\mathbb{R}$

On désigne par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et on note

$$\mathcal{U}(\mathbb{R}) = \left\{ \bigcup_{n=1}^{N} I_n, I_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Alors, $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ et on a $\sigma(\mathcal{U}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Considérons l'application $\lambda : \mathcal{U}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ par

$$\lambda(\bigcup_n I_n) = \sum_n l(I_n),$$

où

$$l(I_n) = |I_n| \quad (longeur\ de\ I_n) = \begin{cases} +\infty; & \text{si } I_n \text{ n'est pas borné,} \\ b_n - a_n; & \text{si } I_n = (a_n, b_n) \text{ est borné.} \end{cases}$$

Alors, λ est une mesure sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ (voir TD). De plus λ est σ-finie sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$, puisque

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}]-n, n[\text{ avec } \mu(]-n, n[) = 2n < +\infty.$$

En appliquant le théorème de prolongement, il existe $\widetilde{\lambda} : \sigma(\mathcal{U}(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ tel que $\widetilde{\lambda}$ est σ-finie et $\widetilde{\lambda}(I) = \lambda(I) = |I_n|$ pour tout $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Définition 4.2.1. *$\widetilde{\lambda}$ qu'on note encore λ est dite mesure de Borel sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

4.3 Mesure de Lebesgue

Définition 4.3.1 (Ensembles négligeables)**.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $F \subset X$ est dite μ-négligeable, s'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $F \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On note l'ensemble des parties μ-négligeables par $\mathcal{N}_\mu$.*

Proposition 4.3.2. *$\mathcal{N}_\mu$ est stable par union au plus dénombrable.*

Preuve : Soit $(F_n)_n \subset \mathcal{N}_\mu$. Alors pour tout n, il existe $A_n \in \mathcal{M}$ tel que $F_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) = 0$. Par suite, on a

$$\bigcup_n F_n \subset \bigcup_n A_n \quad \text{avec} \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = 0,$$

puisque

$$\mu\left(\bigcup_n F_n\right) \leq \sum_n \mu(F_n) = 0.$$

□

Définition 4.3.3 (Tribu complète)**.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La tribu $\mathcal{M}$ est dite complète pour la mesure μ si toute μ-négligeable est mesurable, i.e., $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{M}$.*

Remarques 4.3.4.

1. *L'adjonction de $\mathcal{N}_\mu$ à $\mathcal{M}$ élargit la tribu $\mathcal{M}$. $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu$ est stable par toute réunion dénombrable.*
2. *L'application $\widetilde{\mu}$ définie sur $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu$ par $\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ est σ-additive.*
3. *$\widetilde{\mu}$ est une mesure sur l'algèbre engendrée par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_\mu$ et elle est σ-finie si μ l'est.*

En appliquant le théorème de prolongement, on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.3.5. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure σ-finie. Alors, il existe une et une seule mesure sur la tribu engendrée par $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu)$ prolongeant $\widetilde{\mu}$ et donc μ.*

Définition 4.3.6. $\mathcal{M}^* = \sigma(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu)$ *est dite tribu complète et $\widetilde{\mu}$ est dite la mesure complètée de μ.*

Remarque 4.3.7. $\mathcal{M}^*$ *est complète pour $\widetilde{\mu}$ par construction.*

Définition 4.3.8. *Le prolongement de la mesure de Borel λ sur $\mathbb{R}$ à la tribu compléte de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est dite mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et elle est notée encore λ.*

Proposition 4.3.9. *On a les propriétés suivantes :*

1. *λ est invariant par translation.*
2. *Si μ est une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ invariante par translation et si $\mu(I) < +\infty$ pour tout $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ borné, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu = \alpha\lambda$.*

Preuve : Notons que

$$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(]\alpha, \beta[) \Longleftrightarrow a + B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

De plus l'application $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $\mu(B) = \lambda(a + B)$ est une mesure σ-finie sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ avec $\mu_{|\mathcal{U}(\mathbb{R})} = \lambda_{|\mathcal{U}(\mathbb{R})}$ où $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ est l'algèbre engendré par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. L'unicité dans le théorème de prolongement montre que $\mu = \lambda$ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\lambda(B) = \mu(B) = \lambda(a + B)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Soit $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(B + a) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$. Par suite, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned}
\mu((0,\beta)) &= \mu\left(\bigsqcup_{disjoint, k=0}^{n-1} \left[\frac{k\beta}{n}, \frac{(k+1)\beta}{n}\right[\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\frac{k\beta}{n} + \left[0, \frac{\beta}{n}\right[\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(\left[0, \frac{\beta}{n}\right[\right) \\
&= n\,\mu\left(\left[0, \frac{\beta}{n}\right[\right).
\end{aligned}$$

Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, si on prend $\beta = 1$ on a

$$\mu((0,1)) = n\,\mu\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

qui est fini, puisque $\mu(I) < +\infty$ pour tout intervalle borné $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$. Pour $\beta = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, on a

$$\mu((0,\beta)) \quad = n\,\mu\left(\left(0, \tfrac{p}{qn}\right)\right).$$

En prenant $n = p$, on obtient

$$\mu((0,\beta)) \;= p\,\mu\left(\left(0,\tfrac{1}{q}\right)\right) = \tfrac{p}{q}\mu((0,1)) = \beta\mu((0,1)).$$

Enfin, pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$ on a

$$\mu((a,b)) = \mu((0,b-a)+a) = \mu((0,b-a)) = (b-a)\mu((0,1)) = c(b-a) = c\lambda((a,b))$$

avec $c = \mu(0,1) \in \mathbb{R}^+$. Ce resultat reste vraie sur l'algèbre $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ engendrée par les intervalles (a,b), $a,b \in \mathbb{Q}$. Pour conclure, il suffit de noter que la mesure μ est σ-finie sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ et que $\sigma(\mathcal{U}(\mathbb{R})) = \sigma((a,b); a,b \in \mathbb{Q}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. $\square$

4.4 Esquisse de la preuve du théorème de prolongement de Caratheodory

Unicité : Soient $\widetilde{\mu_1}$, $\widetilde{\mu_2}$ deux mesures sur $\sigma(\mathscr{A})$ telles que $\widetilde{\mu_1}_{|\mathscr{A}} = \widetilde{\mu_2}_{|\mathscr{A}}$ et montrons que $\widetilde{\mu_1} = \widetilde{\mu_2}$ sur $\sigma(\mathscr{A})$. Ceci est équivalent à

$$\sigma(\mathscr{A}) \subset \{A \in \sigma(\mathscr{A});\, \widetilde{\mu_1}(A) = \widetilde{\mu_2}(A)\} = \mathscr{A}^{\sim}.$$

Il est clair que $\mathscr{A} \subset \widetilde{\mathscr{A}}$ puisque $\widetilde{\mu_1}(A) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \widetilde{\mu_2}(A)$ pour toute $A \in \mathscr{A}$. De plus $\widetilde{\mathscr{A}}$ est une tribu (à vérifier).

Existence : On se sert de l'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par

$$\mu^*(A) = \inf_{\left\{\substack{(A_n)_n \subset \mathscr{A} \\ \cup_n A_n \supset A}\right\}} \left\{\sum_n \mu(A_n)\right\}.$$

Alors, μ^* vérifie

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. μ^* est monotone : Si $A, B \subset X$ avec $A \subset B$, alors tout recouvrement de B par des parties dans $\mathscr{A}$ est aussi un recouvrement de A.
3. μ^* est σ-sous additive : Soit $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)$ et montrons que

$$\mu^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Par la propriété caractéristique de l'inf : pour tout n fixé et tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $((A^n_k)_k \subset \mathscr{A}$ telle que

$$A_n \subset \bigcup_k A^n_k$$

et

$$\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_k \mu(A^n_k).$$

D'autre part

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \left(\bigcup_k A^n_k\right); \quad A^n_k \in \mathscr{A}.$$

Alors, par la définition de μ^*, on a

$$\begin{aligned}\mu^*(\cup_n A_n) &\leq \sum_{n,k} \mu(A_k^n) \\ &\leq \sum_{n,k} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &\leq \left(\sum_n \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Définition 4.4.1. *Toute application $\phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant 1), 2) et 3) est dite mesure extérieure.*

Suite de la preuve du théorème : L'application μ^* vérifie aussi ${\mu^*}_{|\mathscr{A}} = \mu$ (i.e., μ^* prolonge μ). En effet, pour $A \in \mathscr{A}$, on a

$$\mu^*(A) = \inf_{\left\{\substack{(A_n)_n \subset \mathscr{A} \\ \cup_n A_n \supset A}\right\}} \left\{\sum_n \mu(A_n)\right\} \leq \sum_n \mu(A_n),$$

pour toute $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$; $A \subset \cup_n A_n$, et en particulier pour $(A_n)_n$ telle que $A_0 = A$ et $A_n = \emptyset$; $n \geq= 1$. Alors,

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Soient $A \in \mathscr{A}$ et $(A_n)_n \subset \mathscr{A}$ avec $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$. Alors,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\left(\bigcup_n (A \cap A_n)\right) && (\text{ car } A = \bigcup_n (A \cap A_n)) \\ &\leq \sum_n \mu(A \cap A_n) && (\ \mu \text{ est } \sigma\text{-sous-additive sur } \mathscr{A} \text{ et } A \cap A_n \in \mathscr{A}; \forall n) \\ &\leq \sum_n \mu(A_n) && (\text{ par monotonie de de la mesure } \mu).\end{aligned}$$

Alors

$$\mu(A) \leq \inf_{\left\{\substack{(A_n)_n \subset \mathscr{A} \\ \cup_n A_n \supset A}\right\}} \left\{\sum_n \mu(A_n)\right\} = \mu^*(A).$$

Question : Peut-on construire une tribu $\mathcal{M}$ sur X vérifiant

$$\mathscr{A} \subset \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathcal{M}$$

et sur laquelle μ^* est une mesure ?

Tribu de parties μ^*-mesurables :

Définition 4.4.2. *Une partie $A \subset X$ est dite μ^*-mesurable si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Exercice : Soit $\mathscr{M} = \{A \subset X; A \text{ est } \mu^*\text{-mesurable}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{A} \subset \mathcal{M}$.
3. Montrer que μ^* est σ-additive sur $\mathcal{M}$.

□

Chapitre 5

Construction de l'intégrale au sens de Lebesgue

Il s'agit de définir l'analogue de l'intégrale classique dans le context d'un espace mesuré de mesure positive $(X, \mathcal{M}, \mu)$. On traitra le cas spécial de $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Plus précisement, on se propose de définir une application linéaire sur l'espace vectoriel $\mathfrak{M}^+(X)$ des fonctions mesurables positives sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, $\displaystyle\int : \mathfrak{M}^+(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ ; \int(f) = \int f d\mu = \int_X f(x) d\mu$, de sorte que pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{M}$, on a

$$\int(\chi_A) = \int \chi_A d\mu = \mu(A)$$

où χ_A désigne la fonction indécatrice de A.

A la base de la construction le théorème d'approximation des fonctions mesurables positives par des suites croissantes de fonctions étagées positives.

5.1 Intégrale des fonctions étagées positives

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure positive. On note par $\mathcal{E}^+$ l'espace des fonctions éagées positives. Une fonction $\varphi \in \mathcal{E}^+$ si et seulement s'il existe des réels positifs α_i et des parties mesurables $A_i \in \mathcal{M}$; $i = 0, 1, .., N$, tels que $\varphi = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$. Soit encore $\varphi \in \mathcal{E}^+$ si et seulement s'il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et $A_i \in \mathcal{M}$; $i = 0, 1, .., N$, avec $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N} A_i = X$ et tels que $\displaystyle\varphi = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$. Ceci est aussi équivalent à l'existence $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et $A_i \in \mathcal{M}$; $i = 0, 1, .., N$, deux à deux disjoints avec $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N} A_i = X$ et $\varphi = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$. La première équivalentce est du au fait que $A_0 = \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right)^c$ et $\alpha_0 = 0$. Pour la deuxième notons que si $(G_k)_k \subset \mathcal{M}$ est une partition quelconque de X, $A_i = \bigcup_{k=1}^{M} A_i \cap G_k$ les $(A_i \cap G_k) \subset \mathcal{M}$ deux a deux disjoints tels que $\chi_{A_i} = \sum_{k=1}^{M} \chi_{A_i \cap G_k}$.

Remarque 5.1.1. *On a $\mathcal{E}^+ \subset \mathfrak{M}^+(X)$, où $\mathfrak{M}^+(X)$ désigne l'espace des fonctions mesurables positives sur X.*

Le résultat suivant est un premier pas dans la construction de l'intégral au sens de Lebesgue.

Lemme 5.1.2. *Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $A_i \in \mathcal{M}$ deux à deux disjoints et $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+$. Alors, la quantité $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i)$ est independante de la décomposition choisie de φ.*

Preuve. Soient $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{B_j}$ deux décomposition de φ, avec $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$, $A_i, B_j \in \mathcal{M}$ et $X = \bigcup_{i=1}^{N} A_i = \bigcup_{j=1}^{M} B_j$. Les parties A_i (resp B_j) sont supposées deux à deux disjoints. Alors $A_i = \bigcup_{j=1}^{M} A_i \cap B_j$, avec les $A_i \cap B_j \in \mathcal{M}$ et sont deux à deux disjoints. Il en résulte alors que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{\bigcup_{j=1}^{M} A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{M} \chi_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}.$$

De même, en utilisant le fait que $B_j = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \cap B_j$, on obtient

$$\varphi = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{A_i \cap B_j}.$$

P ar conséquent, pour tout $(i,j) \in \{1,2,....,N\} \times \{1,2,....,M\}$ tel que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, on a $\alpha_i = \beta_j$. En effet, pour $x \in A_i \cap B_j \neq \emptyset$, on a

$$\varphi(x) = \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}(x) = \beta_j \chi_{A_i \cap B_j}(x).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(\bigcup_{j=1}^{M} A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(B_j)$$

□

Définition 5.1.3. *Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}^+$ avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et les $A_i \in \mathcal{M}$ sont deux à deux disjoints. On définit :*

$$\int \varphi = \int \varphi d\mu = \int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

Remarque 5.1.4. *On a bien*

$$\int \chi_X d\mu = \int 1 d\mu = \mu(X).$$

On a aussi $\int 0 d\mu = 0$ *puisque* $\int 0 d\mu = \int \chi_\emptyset = \mu(\emptyset) = 0$. *Ceci peut être reprouvé en tenant compte de la convention* $0 \times +\infty = 0$. *En effet*

$$\int 0 d\mu = \int 0 \chi_X d\mu = 0\mu(X) = \begin{cases} 0 \times +\infty, & si\ \mu(X) = +\infty \\ 0 \times \alpha, & si\ \mu(X) = \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{cases} = 0$$

Proposition 5.1.5. *Soit* $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

1. *On a* $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{E}^+$ *et*

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi)\, d\mu = \alpha \int \varphi d\mu + \beta \int \psi d\mu.$$

2. *Si* $\varphi \leq \psi$, *alors*

$$\int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu.$$

Preuve. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$ et $\psi = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{B_j}$ avec $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$, et $(A_i)_{i=1}^N$ et $(B_j)_{j=1}^M$ sont des partitions de X. Alors

$$\int \alpha\varphi d\mu = \int \left(\alpha \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}\right) d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha\alpha_i \chi_{A_i} \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \mu(A_i) = \alpha \int f d\mu.$$

On a aussi

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{M} \beta_i \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{A_i \cap B_j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \left(\alpha_i + \beta_j\right) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Ceci prouve que $\varphi + \psi \in \mathcal{E}^+$. De plus, on a

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \left(\alpha_i + \beta_j\right) \mu\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{M} \mu\left(A_i \cap B_j\right)\right) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{N} \mu\left(A_i \cap B_j\right)\right).$$

Comme $A_i = \bigcup_{j=1}^M A_i \cap B_j$, $Bj = \bigcup_{i=1}^N A_i \cap B_j$ où les $A_i \cap B_j$ sont deux à deux disjoints dans $\mathscr{M}$ et μ est une mesure, on obtient

$$\int (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(B_j) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu,$$

Supposons maintenant que $\varphi \geq \psi$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{E}^+$. Alors, $\varphi - \psi \in \mathcal{E}^+$ et $\int (\varphi - \varphi)\, d\mu \geq 0 \quad (\in \overline{\mathcal{R}}^+)$. D'autre part, on a $\varphi = (\varphi - \psi) + \psi$ avec $\varphi \in \mathcal{E}^+$, $(\varphi - \psi) \in \mathcal{E}^+$ et $\psi \in \mathcal{E}^+$. D'où

$$\underbrace{\int \varphi d\mu}_{\in \overline{\mathbb{R}}^+} = \underbrace{\int (\varphi - \psi)\, d\mu}_{\in \overline{\mathbb{R}}^+} + \underbrace{\int \psi d\mu}_{\in \overline{\mathbb{R}}^+}$$

et donc
$$\int \varphi d\mu \geq \int \psi d\mu.$$
□

Un autre preuve : En écrivant φ et ψ sous les formes
$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{B_j},$$
avec $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^+$, $(A_i), (B_j) \subset \mathcal{M}$ des partitions de X, on obtient aussi
$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \beta_j \chi_{A_i \cap B_j},$$
Ainsi $\alpha_i \geq \beta_j$ dés que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, car $\varpi \geq \psi$, $\mu \geq 0$ et $\alpha_i, \beta_j \geq 0$. Il en résulte
$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \geq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \geq \int \psi d\mu$$

Remarque 5.1.6. *En tenant compte de la linéarité de $\int$ sur $\mathcal{E}^+$, on déduit que :*
$$\int \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \right) d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i),$$
pour tout $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et $A_i \in \mathcal{M}$. Les A_i ne sont pas forcément deux à deux disjoints.

Proposition 5.1.7. *Soit $\varphi \in \mathcal{E}^+$. Alors, l'application*
$$\mu_\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}; \quad A \longrightarrow \mu_\varphi(A) = \int_A \chi_A \varphi d\mu =: \int_A \varphi d\mu,$$
est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. En particulier, on a
$$\int_{\bigcup_n A_n} \varphi = \sum_n \int_{A_n} \varphi$$
dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{E}^+$ et toute suite $(A_n)_n$ de parties mesurables deux à deux disjoints.

Preuve. Pour toute $\varphi \in \mathcal{E}^+$, on peut érire $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i}$, pour certains $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et $A_i \in \mathcal{M}$ deux à deux disjoints. Alors, on a
$$\varphi \chi_A = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \right) \chi_A = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i} \chi_A = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{A_i \cap A}.$$
D'où
$$\int \varphi \chi_A d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu \left(A_i \cap A \right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_{A_i}(A)$$

où on a posé $\mu_{A_i}(A) := \mu(A_i \cap A)$. Les μ_{A_i} sont des mesures sur $(X, \mathcal{M})$ (des mesures traces) et $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\mu_\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_{A_i}$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ (somme finie de mesures). Enfin, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}^+$ et toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties mesurables deux à deux disjoints, on a

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \varphi =: \mu_\varphi \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\varphi (A_n) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi.$$

□

Lemme fondamentale 5.1.8. *Soit (φ_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ et $\psi \in \mathcal{E}^+$ tels que $\lim_n \varphi_n \geq \psi$ sur X. Alors, $\lim_n \int \varphi_n d\mu \geq \int \psi$.*

Preuve. Comme (φ_n) est une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$, alors la suite $\left(\int \varphi_n d\mu \right)_n$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ et par suite $\lim_n \int \varphi_n d\mu$ existe dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Le résultat du lemme est trivial lorsque $\psi \leq \varphi_n$ à partir d'un certain rang. Ceci n'est pas vrai en général si on a seulement $\lim_n \varphi_n \geq g$ sur X. On peut prendre comme contre-exemple $\varphi_n = 1 - \dfrac{1}{n} \ngeq 1 = g, \forall n$. On a $\lim_n f_n \geq 1$. Mais, il se peut que $\varphi_n \geq \alpha g$, $0 \leq \alpha < 1$ sur des régions de X et pas tout X. On considère alors les ensembles

$$A_n^\alpha = \Big\{ x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\psi(x) \Big\}$$

pour tout entier n et tout nombre réel $0 < \alpha < 1$ fixé. Alors, $A_n^\alpha \in \mathscr{M}$ puisque $A_n^\alpha = (\varphi_n - \alpha\psi)^{-1}([0, +\infty[)$ et $\varphi_n - \alpha\psi$ est une fonction mesurable. La suite construite $(A_n^\alpha)_n$ est clairement croissante, ceci du au fait que la suite des fonction $(\varphi_n)_n$ est croissante. De plus, on a $\bigcup_n A_n^\alpha = X$. En effet, pour tout $x \in X$, il existe n_x tel que pour tout $n \geq n_x$, on a

$$\varphi_n(x) \geq \psi(x) - \varepsilon_x \geq \alpha\psi(x)$$

pour un ε_x bien choisie $\varepsilon_x = \left(\dfrac{\alpha+1}{2} \right) \psi(x)$. En définissant la suite $(\psi_n)_n$ par $\psi_n = \alpha\psi\chi_{A_n^\alpha}$, on voit que $\alpha\psi\chi_{A_n^\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \alpha\beta_i \chi_{A_n^\alpha \cap B_i}$ et $\psi = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \chi_{B_i}$ et donc $\left(\alpha\psi\chi_{A_n^\alpha}\right)_n \subset \mathcal{E}^+$. De la croissance de $(A_n^\alpha)_n$, on voit que $\left(\alpha\psi\chi_{A_n^\alpha}\right)_n$ est croissante. De plus $\lim_n \left(\alpha\psi\chi_{A_n^\alpha}\right)_n = \alpha\psi$. On a aussi $\alpha g \chi_{A_n^\alpha} \leq f_n$ sur X. En effet, sur A_n^α , on a $\alpha g \chi_{A_n^\alpha}|_{A_n} = \alpha g \leq \varphi_n$ (par définition de A_n^α), et sur $X \backslash A_n^\alpha$ on a $\alpha g \chi_{A_n^\alpha}|_{X\backslash A_n^\alpha} = 0 \leq \varphi_n$. Il en résulte alors par monotonie sur $\mathcal{E}^+$ de $\int$ que

$$\int \alpha\psi\chi_{A_n^\alpha} d\mu \leq \int \varphi_n d\mu$$

or

$$\int \alpha\psi\chi_{A_n^\alpha} d\mu = \alpha \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu(A_n^\alpha \cap B_j)$$

tel que $\psi = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \chi_{B_j}$, par passage à la limite sur n, on voit que

$$\alpha \sum_{j=1}^{N} \beta_j \lim_n \mu(A_n^\alpha \cap B_j) \le \lim_n \int \varphi_n d\mu$$

comme $\left(A_n^\alpha \cap B_j\right)_n$ est une suite croissante dans $\mathscr{M}$, on déduit par la continuité croissante de la mésure μ que

$$\lim_n \mu(A_n^\alpha \cap B_j) = \mu\left(\bigcup_n A_n^\alpha \cap B_j\right) = \mu(B_j)$$

car $\bigcup_n A_n^\alpha = X$. D'où

$$\alpha \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu(B_j) \le \lim_n \int \varphi_n d\mu.$$

Enfin

$$\alpha \int \psi d\mu \le \lim_n \int \varphi_n d\mu$$

en faisant tendre α vers 1, on obtient

$$\int \psi d\mu \le \lim_n \int \varphi_n d\mu.$$

□

5.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

On désigne par $\mathfrak{M}^+(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives d'un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $\mu \ge 0$.

Lemme 5.2.1. *Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ sont deux suites dans $\mathcal{E}^+$, croissantes et convergentes vers $f \in \mathfrak{M}^+$. Alors*

$$I = \int \varphi_n d\mu = \int \psi_n d\mu.$$

Autrement dit, la quantité I ne dépond pas de la suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ convergent vers $f \in \mathfrak{M}^+$.

Preuve. Pour tout p fixé, on a $\psi_p \le \lim_n \psi_n = f = \lim_n \varphi_n$, puisque ψ_n est une suite croissante et $\lim_n \varphi_n = f = \lim_n \psi_n$. Comme de plus $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}^+$ est croissante, on peut appliquer le lemme fondamentale. On déduit que

$$\int \psi_p d\mu \le \lim_n \int \varphi_n d\mu$$

dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Par passage à la limite $p \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_p \int \psi_p d\mu \le \lim_n \int \varphi_n d\mu.$$

En changeant les rôles de φ_n et ψ_p, on obtient

$$\lim_p \int \varphi_p d\mu \leq \lim_n \int \psi_n d\mu,$$

d'où enfin

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int \psi_n d\mu$$

□

Définition 5.2.2. *(Intégrale de Lebesgue sur $\mathfrak{M}^+$) Soient $f \in \mathfrak{M}^+(X)$ et $(\varphi_n)_n$ une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ tels que $f = \lim_n \varphi_n$ sur X. On définit*

$$\int f d\mu = \lim_n \int \varphi_n d\mu \quad \in \quad \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Remarque 5.2.3.

1. *Si $f \in \mathfrak{M}^+(X)$, il existe toujours une suite croissante $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{E}^+$ telle que $f = \lim_n \varphi_n$, d'après le théoreme d'approximations des fonctions mesurables positives.*
2. *$\int f d\mu$ est bien définit d'après le lemme précédent.*

On a la caractérisation suivante.

Proposition 5.2.4. *Si $f \in \mathfrak{M}^+(X)$, on a :*

$$\int f d\mu = \sup_{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq f} \int \psi d\mu.$$

Preuve. Soit $\psi \in \mathcal{E}^+$ telle que $\psi \leq f$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$;. Donc d'apres le lemme fondamentale

$$\int \psi d\mu \leq \lim_n \int \varphi_n d\mu =: \int f d\mu.$$

D'où

$$\sup_{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq f} \int \psi d\mu \leq \int f d\mu.$$

Pour l'inégalité inverse, on a $\left\{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq \varphi_n\right\} \subset \left\{\psi \in \mathcal{E}^+; \psi \leq f\right\}$ et par suite

$$\sup_{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq \varphi_n} \int \psi d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathcal{E}^+; \psi \leq f} \int \psi d\mu.$$

D'autre part, pour tout $\psi \leq \varphi_n$, avec $\psi \in \mathcal{E}^+$, on a

$$\int g d\mu \leq \int \varphi_n d\mu$$

et donc $\sup\limits_{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq \varphi_n} \int \psi d\mu$ est atteint en φ_n car $f_n \in \mathcal{E}^+$ et $\int$ est monotone sur $\mathcal{E}^+$. Il en résulte que d'ou

$$\int f_n d\mu \leq \sup_{g \in \mathcal{E}^+ g \leq f} \int g d\mu, \quad ceci \quad \forall \quad n$$

par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\int f d\mu := \lim_n \int \varphi_n d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq f} \int \psi d\mu$$

□

Proposition 5.2.5. *Pour tout $f, g \in \mathfrak{M}^+$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Si de plus $f \leq g$, alors

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Preuve. En considérant des suites croissantes $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ dans $\mathcal{E}^+$ telles que $f = \lim_n \varphi_n$ et $g = \lim_n \psi_n$, pour $f, g \in \mathfrak{M}^+$, on voit que la suite $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)_n$ est croissante dans $\mathcal{E}^+$ et converge vers $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{M}^+$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Donc

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \lim_n \int \underbrace{(\alpha f_n + \beta g_n)}_{\in \mathcal{E}^+} d\mu = \alpha \lim_n \int f_n d\mu + \beta \lim_n \int g_n d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Maintenant, comme $\varphi_p \leq f \leq g = \lim_n \psi_n$ et $(\psi_n)_n$ est croissante dans $\mathcal{E}^+$, on peut appliquer le lemme fondamentale pour obtenir

$$\int \varphi_p d\mu \leq \lim_n \int \psi_n d\mu = \int g d\mu.$$

Et donc

$$\int f d\mu = \lim_n \int \varphi_p d\mu \leq \int g d\mu.$$

□

Remarque 5.2.6. *Pour montrer la croissance de l'integral sur $\mathfrak{M}^+$, on a du appliquer la caractérisation (Proposition 5.2.4)*

$$\int f d\mu = \sup_{\psi \in \mathcal{E}^+ \psi \leq g} \int \psi d\mu.$$

En effet, comme $f \leq g$, on a $\{\psi \in \mathcal{E}^+;\ \varphi \leq f\} \subset \{\psi \in \mathcal{E}^+;\ \varphi \leq g\}$.

Remarque 5.2.7. *Soit $A \in \mathcal{M}$ de mesure nulle et considérons l'application $I_A : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par*

$$I_A(x) = \infty \chi_A = \begin{cases} \infty, & si\ x \in A; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

En tenant compte de la convention $0 \times \infty = 0$, alors $I_A \in \mathfrak{M}^+$ et $I_A = \lim_n n\chi_A$ avec $(n\chi_A)_n$ est une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$. Par suite

$$\int I_A d\mu = \lim_n \int n\chi_A = \lim_n n \int \chi_A = \lim_n n\mu(A) = 0$$

Lemme 5.2.8. *Pour toute $f \in \mathfrak{M}^+$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$, on a l'inégalité (de Markov)*

$$\mu\left(\{f \geq t\}\right) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

Preuve. La partie $\{f \geq t\}$ est mesurable pour tout $t > 0$ et donc $\mu\left(\{f \geq t\}\right) = \int \chi_{\{f \geq t\}} d\mu$. Or comme $f \geq 0$ et $f \geq t$ sur $\{f \geq t\}$, on déduit que $f \geq t\chi_{\{f \geq t\}}$, et donc

$$\int f d\mu \geq t \int \chi_{\{f \geq t\}} d\mu = t\mu\left(\{f \geq t\}\right).$$

□

Définition 5.2.9. *On dit que f est définie μ-p.p. si elle est définie en dehors d'une partie mesurable de mesure nulle ; i.e., s'il existe $A \in \mathcal{M}$ avec $\mu(A) = 0$ est tel que f est définie sur $X \setminus A$.*

Définition 5.2.10. *Une fonction f définie μ-p.p. sur X est dite μ-mesurable s'il existe $g \in \mathfrak{M}$ tel que $f \equiv g$ p.p.. Plus exactement, si*
— *il existe $A \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $f : X \setminus A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*
— *il existe $B \in \mathscr{M}$, $B^c \subset A^c$, $\mu(B) = 0$ tel que $f \equiv g$ sur B^c pour certaine $g \in \mathfrak{M}$*

Proposition 5.2.11.

1. *Pour tout $f \in \mathfrak{M}^+(X)$ et $A \in \mathcal{M}$, on a $f\chi_A \in \mathfrak{M}^+(X)$. Si de plus $\mu(A) = 0$, alors $\int_A f d\mu := \int f\chi_A d\mu = 0$.*
2. *Si $A \subset B$ avec $A, B \in \mathcal{M}$, alors pour toute $f \in \mathfrak{M}^+(X)$ on a $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.*
3. *Si $f, g \in \mathfrak{M}^+(X)$ avec $f \equiv g$ μ-p.p., alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.*
4. *Si $f \in \mathfrak{M}^+(X)$ avec $f \equiv 0$ μ-p.p., alors $\int f d\mu = 0$.*

Preuve.

1. Pour $f \in \mathfrak{M}^+(X)$ il existe $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}^+$ croissante tel que $f = \lim_n \varphi_n$. Par suite $(\varphi_n\chi_A)_n \subset \mathcal{E}^+$ croissante pour tout $A \in \mathcal{M}$, et on a $\lim_n \varphi_n\chi_A = f\chi_A$. Ceci montre que $f\chi_A$ est mesurable. De plus, on a
$$\int_A f d\mu = \lim_n \int_A \varphi_n\chi_A d\mu = \lim_n \sum_{i=1}^{N_n} \alpha_i^n \mu\left(A_i^n \cap A\right) = 0$$
puisque $0 \leq \mu\left(A_i^n \cap A\right) \leq \mu(A) = 0$.
2. Si $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$, alors $f\chi_A \leq f\chi_B$ et donc $\int f\chi_A d\mu \leq \int f\chi_B d\mu$ par monotonie de $\int$ sur $\mathfrak{M}^+$. D'ou $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
3. Soit $f \equiv g$ - μ-p.p., où g est une fonction mesurable positive. Il existe alors $N \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $f \equiv g$ sur $X \setminus N \in \mathscr{M}$. D'où $f\chi_{X\setminus N} = g\chi_{X\setminus N}$ d'autre part $f = f\chi_N + f\chi_{X\setminus N}$ et donc
$$\int f d\mu = \underbrace{\int f\chi_N d\mu}_{=0} + \int f\chi_{X\setminus N} d\mu = \underbrace{\int g\chi_N d\mu}_{=0} + \int g\chi_{X\setminus N} d\mu = \int g d\mu.$$
4. Immediat de 3°.

□

Remarque 5.2.12. *Le résultat dans 3, de la proposition précédente permet d'étendre la notion d'intégrale au classe des fonctions μ-mesurables plus large que les fonctions mesurables positives. En effet, si $f \equiv g_1$ μ-p.p. et $f \equiv g_2$, on a $g_1 \equiv g_2$ μ-p.p. et donc $\int g_1 d\mu = \int g_2 d\mu$. Par suite la quantité $\int f d\mu$ est bien définie, puisque $\int g d\mu$ ne dépend pas de $g \in \mathfrak{M}^+$ d'après 3 de la proposition précédente.*

Définition 5.2.13. *On définit l'intégral d'une fonction μ-mesurable positive f par*

$$\int f d\mu = \int g d\mu$$

où $g \in \mathfrak{M}^+$ tel que $f \equiv g$ μ-p.p..

Proposition 5.2.14. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, pour tout $f \in \mathfrak{M}^+$, on a $\int f = 0$ si, et seulement si $f = 0$ μ-p.p. De plus si $f, g \in \mathfrak{M}^+$, telles que $f \leq g$ μ-p.p., on a $\int f \leq \int g$.*

Preuve : $f \in \mathfrak{M}^+$. Alors $\int f = 0 = \int_{f=0} f + \int_{f \neq 0} f$ si et seulement si $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Pour l'implication inverse on suppose que $f = 0$ *p.p.*. La suite de fonctions étagées positives $(n\chi_{\{f\neq 0\}})_n$ croissante convergente vers f. Donc

$$\int f = \lim_n \int n\chi_{\{f\neq 0\}} = 0.$$

Pour l'implication directe, on écrit

$$\{f \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_n \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Par suite

$$0 \leq \mu(\{f \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_n \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} \right) \leq \sum_n \mu\left(\left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} \right) \leq \sum_n n \int f = 0.$$

Soient maintenant $f, g \in \mathfrak{M}^+$ telles que $f \leq g$ *p.p.*. Alors, il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $f \leq g$ sur N^c. Alors $f\chi_{N^c} \leq g\chi_{N^c}$ sur X. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathfrak{M}^+$, on obtient $\int f\chi_{N^c} \leq \int g\chi_{N^c}$. D'où $\int f \leq \int g$. □

Chapitre 6

Théorème de la convergence monotone et lemme de Fatou

6.1 Théorème de la convergence monotone

Théorème 6.1.1 (de convergence monotone (TCM)). *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante dans* $\mathfrak{M}^+$. *Alors* $\lim_n f_n \in \mathfrak{M}^+$ *et*

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n.$$

Preuve : On a bien $\lim_n f_n \in \mathfrak{M}^+$ (voir chapitre 2), puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}^+$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $f_n \leq f$ et par suite $\int f_n \leq \int f$, pour tout n (par la monotonie de $\int$ sur $\mathfrak{M}^+$). Alors

$$\lim_n \int f_n \leq \int f.$$

Il reste à montrer que

$$\int f \leq \lim_n \int f_n$$

ce qui est équivalent à montrer que

$$\sup_{\{\varphi\in\mathcal{E}^+;\varphi\leq f\}} \int \varphi \leq \lim_n \int f_n,$$

par la caracterisation de $\int$ sur $\mathfrak{M}^+$ (Proposition 5.2.4). Soit $0 < \alpha < 1$ et $\varphi \in \mathcal{E}^+$ tel que $\varphi \leq f$. Alors $\alpha\varphi < \varphi$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha\varphi < \varphi - \varepsilon < \varphi$ (il suffit de predre $\varepsilon = (1-\varepsilon)/2$. Comme $\varphi = \lim_n f_n$, il existe η_ε tel que $\varphi - \varepsilon < f_n < \varphi + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Donc $f_n > \varphi - \varepsilon > \alpha\varphi$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. On considère, les ensembles

$$A_n^\alpha := \{f_n \geq \alpha\varphi\} \neq \emptyset.$$

Alors $(A_n^\alpha)_n$ est une suite croissante dans $\mathscr{M}$ puisque $f_n - \alpha\varphi$ sont mesurables et f_n est croissante. De plus que $\cup_n A_n^\alpha = X$ (par absurde). On a aussi $f_n \geq f_n\chi_{A_n^\alpha}$ et donc

$$\int f_n \geq \int f_n\chi_{A_n^\alpha} = \int_{A_n^\alpha} f_n \geq \int_{A_n^\alpha} \alpha\varphi = \alpha\mu_\varphi(A_n^\alpha).$$

En utilisant la continuité monotone de la mesure μ_φ, on obtient

$$\lim_n \int f_n \geq \alpha \mu_\varphi(\cup_n A_n^\alpha) = \alpha \mu_\varphi(X) = \alpha \int \varphi,$$

et donc $\lim_n \int f_n \geq \int \varphi$ en faisant tendre α vers 1. $\square$

Définition 6.1.2 (Convergence μ-p.p.). *Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{M}^+$ est dite convergente vers f μ-presque partout (μ-p.p.), s'il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in X \setminus N$.*

Proposition 6.1.3 (Variante du TCM). *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathfrak{M}^+$ croissante qui converge vers g μ-p.p. Alors g est μ-mesurable positive et on a*

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n = \int g.$$

Preuve : Notons tout d'abord que $g = \lim_n f_n =: f \in \mathfrak{M}^+$. Comme $(f_n)_n$ converge vers g μ-p.p., on voit que g est une fonction μ-mesurable positive. On déduit aussi que la suite $(f_n\chi_{N^c})_n$ est croissante et converge vers g sur X pour certain $N \in \mathscr{M}$ et $\mu(N) = 0$. De plus $g\chi_{N^c} \in \mathfrak{M}^+$. En appliquant ensuite le théoràme de convergence monotone dans $\mathfrak{M}^+$ et en tenant compte des faits que $f_n\chi_{N^c} = f_n$ μ-p.p. et $g\chi_{N^c} = g$ μ-p.p., on obtient

$$\int f = \int \lim_n f_n = \lim_n \int f_n = \lim_n \int f_n\chi_{N^c} = \int g\chi_{N^c} = \int g.$$

$\square$

Corollaire 6.1.4 (Séries de fonctions à termes positifs ou nuls). *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathfrak{M}^+$. Alors, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int f_n = \int \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

avec $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}^+$; $x \in X$.

Corollaire 6.1.5 (Séries double numériques à termes positifs ou nuls). *Soit $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^+$. Alors, on a*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}.$$

6.2 Lemme de Fatou

Lemme 6.2.1 (Lemme de Fatou). *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathfrak{M}^+$ (C.N.). Alors*

$$\int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n = \lim_n \left(\inf_{p\geq n} \int f_p \right).$$

Preuve : En appliquant le théorème de convergence monotone à la suite croissante $\left(\inf_{p\geq n} f_p\right)_n$ dans $\mathfrak{M}^+$, on obtient

$$\int \liminf_n f_n = \int \lim_n \left(\inf_{p\geq n} f_p \right) = \lim_n \int \inf_{p\geq n} f_p.$$

D'autre part, on a $\inf_{p \geq n} f_p \leq f_q$ pour tout $q \geq n$. Donc

$$\int \inf_{p \geq n} f_p \leq \int f_q$$

pour tout $q \geq n$. Par suite

$$\int \inf_{p \geq n} f_p \leq \inf_{q \geq n} \int f_q.$$

Enfin

$$\int \liminf_n f_n = \lim_n \int \inf_{p \geq n} f_p \leq \lim_n \left(\inf_{q \geq n} \int f_q \right) = \liminf_n \int f_n.$$

□

Corollaire 6.2.2. *;p Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathfrak{M}^+$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f. S'il existe une constante C telle que $\int f_n \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est μ-mesurable positive et on a $\int f \leq C$.*

Preuve : Il est clair que f est bien une fonction μ-mesurable positive, puisque $f = \lim_n f_n$ μ-p.p. et $\lim_n f_n \in \mathfrak{M}^+$. Alors, on a bien . D'autre part, par la définition de l'intégrale d'une fonction μ-mesurable positive et le lemme de Fatou, on a

$$\int f = \int \lim_n f_n \leq \liminf_n \int f_n \leq C.$$

□

Chapitre 7

Espace $\mathcal{L}^1$ et théorème de convergence dominée

7.1 Intégration des fonctions mesurables : fonctions intégrables

En partant de l'observation fondamentale que chaque fonction mesurable $f \in \mathfrak{M}$; $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, peut s'écrire en termes des fonctions mesurables positives, à savoir f^+, f^-, on peut définir l'intégrale pour une classe de fonctions mesurables non nécessairement positives. Il s'agit de l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions dites intégrables.

Définition 7.1.1 (Intégrabilité au sens de Lebesgue)**.** *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathfrak{M}$. f est dite intégrable (ou sommable) au sens de Lebesgue si $\int f^+$ et $\int f^-$ sont finies. Dans ce cas, on définit*

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

Proposition 7.1.2. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathfrak{M}$. f est intégrable si, et seulement si f est absolument intégrable, i.e., $|f|$ est intégrable. De plus, on a*

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| \,.$$

Preuve : Si f est intégrable, alors $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < +\infty$ par la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathfrak{M}^+$. Réciproquement, on déduit du fait $\int f^\pm \leq \int |f|$, que les fonctions f^+ et f^- sont intégrables désque $|f|$ est intégrable. De plus

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \left| \int f^+ \right| + \left| \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f| \,.$$

□

Corollaire 7.1.3. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathfrak{M}$, une fonction mesurable dominée par une fonction intégrable g au sens que $|f| \leq |g|$. Alors f est intégrable.*

Proposition 7.1.4. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f = g - h$ avec g et h sont intégrables positives, alors f est intégrable si, et seulement si f^+ intégrable (ou encore si, et seulement si f^- intégrable). De plus, si f est intégrable, on a*

$$\int f = \int g - \int h.$$

Preuve : On écrit $f = f^+ - f^- = g - h$ et donc $f^+ + h = g + f^-$. Par linéarité de $\int$ sur $\mathfrak{M}^+$, on a $\int f^+ + \int h = \int g + \int f^-$. Comme g et h sont intégrables, alors $\int f^+ + \int h - \int g = \int f^-$, $\int f^- + \int g - \int h = \int f^+$, et $\int g - \int h$ est finie. Donc

$$f \text{ intégrable} \Longleftrightarrow f^+ \text{ intégrable} \Longleftrightarrow f^- \text{ intégrable},$$

et on obtient l'égalité souhaitée lorsque f est supposée intégrable. □

Définition 7.1.5. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On dit que $f \in \mathfrak{M}$ est intégrable sur E si $\int_E f^+$ et $\int_E f^-$ sont finies. Dans ce cas, on définit l'intégrale de $f \in \mathfrak{M}$ sur E par*

$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Remarque 7.1.6. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable.*

— *Si on pose $\mu_f(E) := \int_E f$, pour tout $E \in \mathcal{M}$, on re-écrira la définition précédente sous la forme $\mu_f(E) = \mu_f^+(E) - \mu_f^-(E)$ où μ_f^+ et μ_f^- sont les mesures positives associées à f^+ et f^-.*

— *Si $(E_n)_n$ est une partition de$E \in \mathcal{M}$ de parties $E_n \in \mathcal{M}$, on a*

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f.$$

7.2 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Définition 7.2.1 (Espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables)**.** *On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'espace des fonctions intégrables sur $(X, \mathcal{M}, \mu)$;*

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^1 = \left\{ f \in \mathfrak{M};\ \int |f| < +\infty \right\}.$$

Proposition 7.2.2. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors :*

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $f \longmapsto \int f$, de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire.*
3. *Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leq g$; alors $\int f \leq \int g$.*

Preuve :

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, puisque $(-f)^+ = -(f)^-$, on a

$$\alpha f = (\alpha f)^+ - (\alpha f)^- \begin{cases} 0 & si \quad \alpha = 0 \\ \alpha f^+ - \alpha f^- & si \quad \alpha > 0 \\ (-\alpha f^-) - (-\alpha f^+) & si \quad \alpha < 0 \end{cases} \tag{7.2.1}$$

et donc $\alpha f \in \mathcal{L}^1$ par la Proposition 7.1.4. Maintenant si $f, g \in \mathcal{L}^1$, on a $|f|, |g| \in \mathcal{L}^1$ et donc $|f| + |g| \in \mathcal{L}^1$. Ainsi, par le Corrolaire 7.1.3,

$$|f + g| \leq |f| + |g| \in \mathcal{L}^1.$$

Par suite $|f + g| \in \mathcal{L}^1$, soit encore $f + g \in \mathcal{L}^1$. Ceci prouve que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. En intégrant (7.2.1), on obtient $\int \alpha f = \alpha \int f$. Pour montrer $\int f + g = \int f + \int g$, on écrit $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ avec $f + g \in \mathcal{L}^1$, et on applique le résultat de la Proposition 7.1.4. Donc, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathfrak{M}^+$, on trouve

$$\int f + g = \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g.$$

On conclut alors que l'application $f \longmapsto \int f$, de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire.

3. L'inégalité $f \leq g$ peut s'écrire aussi sous la forme $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, soit encore $f^+ + g^- \leq f^- + g^+$. Par monotonie et linéarité positive de l'intégrale sur $\mathfrak{M}^+$, on obtient $\int f^+ + \int g^- \leq \int f^- + \int g^+$. Enfin, comme $f, g \in \mathcal{L}^1$, on déduit que

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \leq \int g^+ - \int g^- = \int g.$$

Remarque 7.2.3 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$). *L'application $f \longmapsto \int |f| =: \|f\|_1$, de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}^+$, définie une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$. Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'implique que $f = 0$ p.p. (Voir l'assertion 3 de la Proposition 5.2.11).*

Proposition 7.2.4. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

1. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\int |f| = 0$ si, et seulement si $f = 0$ p.p..*
2. *Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$, c-à-d $|f|$ est finie p.p..*
3. *Pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1$, telles que $f = g$ p.p., on a $\int f = \int g$.*

Preuve :

1. La première assertion est une conséquence immédiate de l'assertion 3 dans la Proposition 5.2.11. En effet, si $f \in \mathcal{L}^1$, on a $\int |f| = 0 \iff |f| = 0$ μ-p.p., implique $f = 0$ μ-p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $\{|f| = +\infty\} = \bigcap_n \{|f| \geq n\}$, et donc

$$\mu\left(\{|f| = +\infty\}\right) = \mu\left(\bigcap_n \{|f| \geq n\}\right) \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f|,$$

et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le resultat s'obtient par passage à la limite $n \to +\infty$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1$. On a

$$\left| \int f - \int g \right| = \left| \int (f - g) \right| \leq \int |f - g| = 0$$

d'après 1., puisque $f = g$ *p.p.* est équivalente à $f - g = 0$ *p.p.*.

Corollaire 7.2.5. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}^1$. On a*

$$\left(\int_E f = \int_E g; \text{ pour tout } E \in \mathcal{M}\right) \iff \int |f - g| = 0 \iff f = g \; \mu - p.p..$$

7.3 L'espace L^1

L'égalité presque partout définie pour tout $f, g \in \mathcal{L}^1$ par

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g \ \mu - p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1$. On définit alors L^1 comme étant l'espace quotient

$$L^1 := \mathcal{L}^1 \big/ \mathcal{R}.$$

Cet espase posséde une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, dont la norme est donnée par

$$\|F\|_1 = \left\|\overline{f}\right\|_1 = \|f\|_1 = \int |f|$$

pour tout $F \in L^1$, où $f \in F$ avec $f \in \mathcal{L}^1$.

7.4 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On donne ici une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Théorème 7.4.1 (TCD). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^1$ convergente vers f ($f \in \mathfrak{M}$). Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée p.p. par une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ positive, i.e., $|f_n| \leq g$ p.p. et pour tout n, alors*
— $f \in \mathcal{L}^1$
— $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \longrightarrow 0$, *quand n tends vers $+\infty$*
— $\lim\limits_n \int f_n = \int f$.

Preuve : Du fait que $f_n \longrightarrow f$ *p.p.* et que $|f_n| \leq g$ *p.p.*, il existe $N, N_n \in \mathcal{M}$ telles que $\mu(N) = \mu(N_n) = 0$ et $f_n \longrightarrow f$ sur N^c et $|f_n| \leq g$ sur N_n^c, pour tout n. Soit $D = N \cup (\cup_n N_n)$. Il est clair que
— $\mu(D) = 0$ (par σ-sous additivité) et que
— les fonctions mesurables $f_n\chi_{D^c}$, $f\chi_{D^c}$ et $g\chi_{D^c}$ vérifient
  — $f_n\chi_{D^c} = f_n$ *p.p.* (avec $f_n\chi_{D^c} \in \mathcal{L}^1$),
  — $f\chi_{D^c} = f$ *p.p.* (avec $f\chi_{D^c} \in \mathfrak{M}$)
  — $g\chi_{D^c} = g$ *p.p.* (avec $g\chi_{D^c} \in \mathcal{L}^1$),
  — $|f_n\chi_{D^c}| \leq g\chi_{D^c}$ et
  — $f_n\chi_{D^c} \longrightarrow f\chi_{D^c}$ sur X.

Il en résulte alors que

$$\int |f| = \int |f\chi_{D^c}| = \int \lim_n |f_n\chi_{D^c}| \leq \int g\chi_{D^c} = \int g < +\infty.$$

Donc $f \in \mathcal{L}^1$. En appliquant ensuite le lemme de Fatou à la suite de fonctions

$$h_n := 2g - |f_n\chi_{D^c} - f\chi_{D^c}| \in \mathfrak{M}^+,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int 2g = \int \lim_n h_n = \int \liminf_n h_n &\leq \liminf_n \int (2g - |f_n\chi_{D^c} - f\chi_{D^c}|) \\ &\leq \lim_n \left(\inf_{p\geq n} \int (2g - |f_n\chi_{D^c} - f\chi_{D^c}|) \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\inf_{p\geq n}\int(2g-|f_n\chi_{D^c}-f\chi_{D^c}|)=\int 2g+\inf_{p\geq n}\int(-|f_n\chi_{N'}-f\chi_{D^c}|)$$
$$=\int 2g-\sup_{p\geq n}\int(|f_n\chi_{N'}-f\chi_{D^c}|);$$

alors

$$\int 2G\leq\int 2g-\limsup_n\int(|f_n\chi_{D^c}-f\chi_{D^c}|).$$

Puisque $\int 2g$ est finie, on déduit que

$$0\leq\lim_n\int(|f_n\chi_{D^c}-f\chi_{D^c}|)\leq\limsup_n\int(|f_n\chi_{D^c}-f\chi_{D^c}|)\leq 0.$$

Par suite $\int(|f_n-f|)\longrightarrow 0$, quand $n\to+\infty$, puisque $f_n\chi_{D^c}-f\chi_{D^c}=f_n-f$ μ-p.p.. Enfin, comme $\left|\int f_n-\int f\right|\leq\int(|f_n-f|)$, on conclut que $\int f_n\longrightarrow\int f$. □

7.5 Applications du TCD : intégrales dépendant d'un paramétre

Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et $f:X\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, une application définie sur $X\times\mathbb{R}$ de sorte que pour tout $t\in\mathbb{R}$ fixé, l'application partielle $f_t=f(\cdot;t):X\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f_t(x):=f(x;t)$ soit intégrable, i.e., $f_t\in\mathcal{L}^1$. On définit $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par

$$F(t)=\int f_t=\int f(x;t)d\mu(x).$$

7.5.1 Continuité sous le signe d'intégration

Théorème 7.5.1 (Continuité sous signe $\int$)**.** *Soit $f:X\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, une application telle que $f_t=f(\cdot;t)\in\mathcal{L}^1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Si de plus*

1. *l'application $t\longmapsto f(x;t)$ est continue en t_0, pour tout $x\in X$,*
2. *il existe $g\in\mathcal{L}^1$ positive telle que $|f_t|\leq g$, pour tout t au voisinage de t_0 et tout $x\in X$,*

alors F ; $F(t)=\int f_t=\int f(x;t)d\mu(x)$, est continue en t_0.

Preuve : On considère la suite de fonctions intégrables

$$f_n=f_{t_n}=f(\cdot;t_n),$$

avec $t_n\to t_0$. On a $f_n(x)\longrightarrow f(x;t_0)=f_{t_0}(x)$ sur X et $|f_n(x)|\leq g$, pour n assez grand avec $g\in\mathcal{L}^1$. D'après le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_n F(t_n):=\lim_n\int f_{t_n}=\lim_n\int f_n=\int\lim_n f_n=\int f_{t_0}=F(t_0).$$

□

7.5.2 Dérivabilité sous le signe d'intégration

Théorème 7.5.2 (Dérivabilité sous signe $\int$). *Soit $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une application telle que $f_t = f(\cdot;t) \in \mathcal{L}^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si de plus*

1. *l'application $t \longmapsto f(x;t)$ est dérivable au voisinage de t_0, pour tout $x \in X$ fixé,*
2. *il existe $g \in \mathcal{L}^1$ positive telle que $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g$, pour tout t au voisinage de t_0 et tout $x \in X$,*

alors F ; $F(t) = \int f_t = \int f(x;t)d\mu(x)$, est dérivable en t_0 et on a

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot;t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x;t_0)d\mu(x).$$

Preuve : On considère la suite de fonctions intégrables

$$h_n(x) = \frac{f(x;t_n) - f(x;t_0)}{t_n - t_0}; \quad x \in X,$$

où $t_n \to t_0$. On a (d'après le théorème des accroissements finis)

$$|h_n(x)| = \left|\frac{f(x;t_n) - f(x;t_0)}{t_n - t_0}\right| \leq \sup_{t \in V(t_0)} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)\right| \leq g(x).$$

Donc $h_n \in\in \mathcal{L}^1$, $|h_n(x)| \leq g$, pour n assez grand, avec $g \in \mathcal{L}^1$, et $h_n \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot;t_0)$ sur X. On peut appliquer alors le théorème de convergence dominée. On obtient

$$\lim_n \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} := \lim_n \int h_n = \int \lim_n h_n = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot;t_0).$$

□

Chapitre 8

Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p ; $p \geq 1$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $p \geq 1$.

— Pour tout $f \in \mathfrak{M}$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

— On définit l'espace $\mathcal{L}^p$ par

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \mathcal{L}^p = \left\{ f \in \mathfrak{M};\ \int |f|^p < +\infty \right\}.$$

— Pour $f, g \in \mathcal{L}^p$, on définit

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f = g\ p.p..$$

C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$.

— On définit l'espace L^p par

$$L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{R}.$$

De sorte que pour $F \in L^p$, on a

$$\int F = \int f$$

pour toute $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $f \in F$.

— Si $f \in \mathcal{L}^p$, $F \in L^p$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F.

On peut introduire plusieurs notions de convergence dans L^p cohérentes (indépendentes des représentants choisis pour les éléments de L^p).

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $(F_n)_n \subset L^p$ et $F \in L^p$. Soient $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p$ et $f \in \mathcal{L}^p$, avec $f_n \in F_n$ et $f \in F$.

— Convergence *p.p.* : On dit que $(F_n)_n$ converge *p.p.* vers F si $(f_n)_n$ converge *p.p.* vers f.

— Convergence dans L^p : On dit que $(F_n)_n$ converge dans L^p vers $F \in L^p$ si $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{L}^p$:

$$\|F_n - F\|_p = \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow +\infty$.

Remarque 8.0.1. *La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^p.*

Théorème 8.0.2 (TCD). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}^p$ qui converge p.p. vers une fonction f ($f \in \mathfrak{M}$). Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée p.p. par une fonction positive $g \in \mathcal{L}^p$, i.e., $|f_n| \leq g$ p.p. et pour tout n, alors*
- $f \in \mathcal{L}^p$
- $\|f_n - f\|_p = \int |f_n - f| \longrightarrow 0$, *quand n tends vers $+\infty$*

Preuve : On peut se ramener à travailler dans $\mathcal{L}^1$, puisque $g \in \mathcal{L}^p$ si et seulement si $|g|^p \in \mathcal{L}^1$, et

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p g^p \quad p.p..$$

□

Lemme 8.0.3. *On a*
- *Inégalité de Young : Pour tous $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

- *Inégalité de Hölder : Soient $f, g \in \mathfrak{M}$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a*

$$\int |fg| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \left(\int |g|^q\right)^{1/q}$$

soit encore

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q .$$

- *Inégalité de Minkowski : Soient $f, g \in \mathfrak{M}$ et $p \geq 1$. Alors on a*

$$\left(\int (|f| + |g|)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

soit encore

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Remarque 8.0.4. *Comme conséquences immédiates du lemme précédente, on constate que*
- *Le cas particulier de $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Cauchy-Bunyakovski-Schwartz.*
- *D'après l'inégalité de Minkowski, on voit que si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in \mathcal{L}^p$.*
- *D'après l'inégalité de Minkowski, on voit que si $f, g \in \mathcal{L}^p$, alors $f + g \in \mathcal{L}^p$.*

Preuve :
- L'inégalité de Young est une conséquence immédiate de la convexité de la fonction exponentielle :

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y; \quad \forall t \in [0,1]; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

  En effet, on prend $x = p\ln(a)$, $x = p\ln(a)$ pour $a, b > 0$, et $t = \frac{1}{p}$, on obtient le résultat.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

  Le cas ou $ab = 0$; $a, b \geq 0$ est trivial.

— L'inégalité de Hölder est trivial dans les cas suivants : $\|f\|_p = +\infty$; $\|g\|_q = +\infty$; $\|f\|_p = 0$; $\|g\|_q = 0$. On peut supposer alors que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et que $\|f\|_p \neq 0$; $\|g\|_q \neq 0$. Dans ce cas l'inégalité de Hölder devient équivalent à

$$\int \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right) \leq 1.$$

D'après l'inégalité de Young, on a

$$\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q,$$

et donc

$$\int \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right) \leq \frac{1}{p}\int \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\int \left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

— Inégalité de Minkowski : On a déjà obtenu le resultat pour $p = 1$. Supposons que $p > 1$ et soient $f, g \in \mathfrak{M}$. On a

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\int |f|(|f+g|^{p-1}) \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p}\left(\int (|f+g|^{p-1})^q\right)^{1/q} = \|f\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}$$

et

$$\int |g||f+g|^{p-1} \leq \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\left(\int (|f+g|^{p-1})^q\right)^{1/q} = \|g\|_p \left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}$$

où $q = \frac{p}{p-1}$. Enfin, on obtient

$$\int |f+g|^p \leq \left(\|f\|_p \|g\|_p\right)\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}.$$

Soit encore

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Proposition 8.0.5. *$\mathcal{L}^p$ et L^p ; $p \geq 1$, sont des espaces vectoriels.*

Remarque 8.0.6. *L'application $f \longmapsto \|f\|_p$, pour $f \in \mathcal{L}^p$, définie une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$. Par contre l'application $F \longmapsto \|F\|_p$, pour $F \in L^p$, est une norme sur L^p, avec $\|F\|_p := \|f\|_p$ pour certaine $f \in F$ telle que $f \in \mathcal{L}^p$.*

Définition 8.0.7. *Une suite $(F_n)_n \subset L^p$ est dite de Cauchy dans L^p si $\|F_n - F_m\| \longrightarrow 0$ quand $m, n \longrightarrow +\infty$.*

Proposition 8.0.8. *Toute suite convergente dans L^p est de Cauchy dans L^p.*

Théorème 8.0.9 (Riesz–Fisher-Théorème de completion)**.** *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $(L^p; \|\cdot\|_p)$; $p \geq 1$, est un espace vectoriel normé complet (un espace de Banach), c'est-à-dire toute suite de Cauchy dans L^p est convergente dans L^p.*

Chapitre 9

Tribus produit, Mesures produit et théorème de Fubini

9.1 Tribu Produit

Définition 9.1.1. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ la tribu sur $X\times Y$ engendrée par $\mathcal{A}\times\mathcal{B}=\{A\times B; A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}$. On l'a note $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.*

Exemple 9.1.2. *Pour $X=Y=\mathbb{R}$, tous les deux muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve : Exercice. □

Remarque 9.1.3. *La preuve s'adapte facilement au cas de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 9.1.4. *Soit $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Soit $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Alors pour tous $x\in X$ et $y\in Y$, on a*

$$E_x=\{y\in Y;\,(x,y)\in E\}\in\mathcal{B}$$

et

$$E^y=\{x\in X;\,(x,y)\in E\}\in\mathcal{A}.$$

Preuve : On montre que

$$\Omega=\{E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B};\,E_x\in\mathcal{B},\,E^y\in\mathcal{A}\text{ pour tout }x\in X,y\in Y\}$$

est une tribu sur $X\times Y$ telle que $\Omega\supset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, et donc $\Omega=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

On utilise principalement les faits suivants :

— Pour tout $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$, on a

$$(A\times B)_x=\left\{\begin{array}{ll} B & si\, x\in A\\ \emptyset & si\, x\notin A\end{array}\right.\quad\text{et}\quad (A\times B)^y=\left\{\begin{array}{ll} A & si\, y\in B\\ \emptyset & si\, y\notin B\end{array}\right..$$

— Pour toute $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, on a

$$(E^c)_x=(E_x)^c\quad\text{et}\quad (E^c)^y=(E^y)^c.$$

— Pour toute $(E_n)_n \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a

$$\left(\bigcup_n E_n\right)_x = \bigcup_n (E_n)_x \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_n E_n\right)^y = \bigcup_n (E_n)^y.$$

□

9.2 Fonctions mesurables sur la tribu produit

Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. On définit les applications partielles f_x et f^y pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, par

$$\begin{array}{rl} f_x : Y & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto f_x(y) := f(x,y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} f^y : X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f^y(x) := f(x,y) \end{array}.$$

Proposition 9.2.1. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. Si f est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable, alors f_x et f^y sont mesurables, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$.*

Preuve : On utilise principalement les faits que :

$$f_x^{-1}(D) = \left(f^{-1}(D)\right)_x \quad \text{et} \quad (f^y)^{-1}(D) = \left(f^{-1}(D)\right)^y.$$

□

Remarque 9.2.2. *La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par contre on a le résultat suivant qui donne la réciproque dans un cas particulier.*

Proposition 9.2.3. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. Soient f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable sur X et g une fonction $\mathcal{B}$-mesurable sur Y. Alors, la fonction $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable sur $X \times Y$.*

Preuve : La preuve peut se faire en 3 étapes :

1. Pour $f = \chi_A$ et $g = \chi_B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$: On a

$$f(x)g(y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B} \in \mathfrak{M}(X \times Y; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

2. En explicitant le produit $f(x)g(y)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions étagées sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, on établit le résultat pour cette classe de fonctions.
3. On étend le résultat obtenu pour $\mathcal{E}$ à la classe $\mathfrak{M}$ sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ par le théorème d'approximation.

□

9.3 Mesure produit

Théorème 9.3.1 (A admettre)**.** *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés de mesures (positives) σ-finies, et $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Alors*

1. *Les applications $x \longmapsto \nu(E_x)$ sur X et $y \longmapsto \mu(E^y)$ sur Y sont mesurables.*
2. *On a*
$$\int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y).$$

Proposition 9.3.2. *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*

1. *L'application*
$$E \longmapsto \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y)$$
est une mesure sur la tribu produit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. On la note $\mu\otimes\nu$ et on l'appelle mesure produit des mesures (σ-finies) μ et ν.
2. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a*
$$\mu\otimes\nu(A\times B) = \mu(A)\times\nu(B).$$
3. *$\mu\otimes\nu$ est σ-finie.*

Preuve :

1. Soit $(E_n)_n \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Alors
$$\begin{aligned}\mu\otimes\nu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int_Y \mu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)^y\right) d\nu(y)\\ &= \int_Y \mu\left(\bigcup_n (E_n^y)\right) d\nu(y)\\ &= \int_Y \sum_n \mu\left(E_n^y\right) d\nu(y) \quad (\mu \text{ mesure})\\ &= \sum_n \int_Y \mu\left(E_n^y\right) d\nu(y) \quad (\text{TCM})\\ &= \sum_n \mu\otimes\nu(E_n).\end{aligned}$$
2. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a
$$\begin{aligned}\mu\otimes\nu\,(A\times B) &= \int_Y \mu\left((A\times B)^y\right) d\nu(y)\\ &= \int_B \mu\left((A\times B)^y\right) d\nu(y) + \int_{Y\setminus B} \mu\left((A\times B)^y\right) d\nu(y)\\ &= \int_B \mu(A)d\nu(y) + \int_{Y\setminus B} \mu(\emptyset)d\nu(y)\\ &= \mu(A)\int_B d\nu(y)\\ &= \mu(A)\nu(B).\end{aligned}$$
3. Comme les mesures μ et ν sont σ-finies, il existe une partition $(A_m)_m$ de X constituée de parties $\mathcal{A}$-mesurables deux à deux disjoints et une partition $(B_n)_n$ de Y formée de parties $\mathcal{A}$-mesurables deux à deux disjoints telles que $\mu(A_m) < +\infty$ et $\nu(B_n) < +\infty$ pour tout m, n. Alors les $A_m \times B_n$ sont des parties $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ sur $X\times Y$. On a
$$\mu\otimes\nu\,(A_m\times B_n) = \mu(A_m)\nu(B_n) < +\infty.$$

De plus les $A_m \times B_n$ forment une partition de $X \times Y$. En effet

$$\bigcup_{m,n}(A_m \times B_n) = \left(\bigcup_n A_m\right) \times \left(\bigcup_n B_n\right) = X \times Y.$$

On conclut alors que $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

□

Remarque 9.3.3. *La mesure produit $\mu \otimes \nu$ n'est pas forcément complète si μ et ν sont complètes. En effet, considérons $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $B \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{B}$, en supposant que $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)$. On a bien $A \times B \subset A \times Y$ avec $A \times Y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $\mu \otimes \nu(A \times Y) = \mu(A) \times \nu(Y) = 0$. Pourtant, $A \times B \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, car sinon*

$$(A \times B)_x = \left\{ \begin{array}{ll} B & si\, x \in A \\ \emptyset & si\, x \notin A \end{array} \right. \in \mathcal{B}$$

pour tout $x \in X$. Absurde.

Remarque 9.3.4. *$\mu \otimes \nu$ est l'unique mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $\nu(B) < +\infty$.*

9.4 Théorèmes de Fubini

Théorème 9.4.1 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $(X; \mathcal{A}; \mu)$ et $(Y; \mathcal{B}; \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable positive. Alors, les applications*

$$F_*(f) : x \longmapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y) =: F_x(f)$$

sur X et

$$F^*(f) : y \longmapsto \int f^y(x) \mu(x) =: F^y(f)$$

sur Y sont mesurables positives, et on a

$$\int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Preuve : La preuve peut se faire en 3 étapes :

1. Pour $f = \chi_E$ avec $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$: Pour $x \in X$ fixé, on a $\chi_E(x,y) = 1$ si, et seulment si $(x,y) \in E$, i.e., $y \in \{y \in Y, (x,y) \in E\} =: E_x$. Il en résulte alors que

$$\int_Y \chi_E(x,y) d\nu(y) = \int_{E_x} d\nu(y) = \nu(E_x).$$

Or, d'après le théorème admis, la fonction $x \longmapsto \nu(E_x)$ est mesurable pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ fixé. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} \chi_E(x,y) d(\mu \otimes \nu) &= d(\mu \otimes \nu)(E) \\ &= \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \quad \text{(ou encore } = \int_X \nu(E_x) d\mu(x)) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y) \quad \text{(d'après } (*)) \end{aligned}$$

2. On prolonge ensuite le résultat par linéarité à la classe $\mathcal{E}^+$ des fonctions étagées positives sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.
3. On prolonge le résultat obtenu pour $\mathcal{E}^+$ par le TCM à la classe $\mathfrak{M}^+$ sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

$\square$

Corollaire 9.4.2. *Soient $(X; \mathcal{A}; \mu)$ et $(Y; \mathcal{B}; \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable. Alors*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}; \mu \otimes \nu) \Longleftrightarrow \int \left(\int |f| d\mu \right) d\nu < +\infty \Longleftrightarrow \int \left(\int |f| d\nu \right) d\mu < +\infty. \qquad (\bigstar)$$

Preuve : Le corollaire découle immédiatement du théorème de Fubini-Tonelli. $\square$

Théorème 9.4.3 (Fubini). *Soient $(X; \mathcal{A}; \mu)$ et $(Y; \mathcal{B}; \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}; \mu \otimes \nu)$. Alors, on a*

1. *$f_x \in \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{B}; \nu)$ μ-p.p. et $f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}\ \mu)$ ν-p.p..*
2. *$F_*(f) : x \longmapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y) = F_x(f)$ est μ-p.p. définie et $F^*(f) : y \longmapsto \int f^y(x)\mu(x) = F^y(f)$ est ν-p.p. définie.*
3. *$\int f = \int_X F_x(f) d\mu(x) = \int_Y F^y(f) d\nu(y)$, soit encore*

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Preuve : Comme $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}; \mu \otimes \nu)$, alors f est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable. On écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique le théorème de Fubini-Tonelli à f^+ et f^-. $\square$

Corollaire 9.4.4. *Soient $(X; \mathcal{A}; \mu)$ et $(Y; \mathcal{B}; \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable telle que*

$$\int \left(\int |f| d\mu \right) d\nu < +\infty$$

ou

$$\int \left(\int |f| d\nu \right) d\mu < +\infty.$$

Alors

$$\int \left(\int f d\mu \right) d\nu = \int \left(\int |f| d\nu \right) d\mu.$$

Preuve : Le corollaire découle immédiatement du théorème de Fubini et de l'équivalence $(\bigstar)$. $\square$

Exercice : On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0;\ x \leq y < 2x \\ -\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0;\ 2x \leq y < 3x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy.$$

9.5 Changement de variables

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V est la donnée d'une application $\psi : U \longrightarrow V$ bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et telle que ψ^{-1} soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Une caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes est donnée par la proposition suivante

Proposition 9.5.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$ si, et seulement si ψ vérifie les asserestions suivantes :*

1. *ψ bijective de U sur $V = \psi(U)$.*
2. *ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
3. *Le déterminant la matrice jacobienne $J(\psi)$ de ψ est non nulle sur U ; $J(\psi) \neq 0$.*

Théorème 9.5.2 (Changement de variables)**.** *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. Pour toute fonction borélienne positive (resp. $f \in \mathcal{L}^1$), on a $(f \circ \psi)|\det(J(\psi)(u)|\chi_U$ est borélienne positive (resp. $f \in \mathcal{L}^1$). De plus, on a*

$$\int_V f(v)d\lambda(v) = \int_U f(\psi(u))|\det(J(\psi)(u))|d\lambda(u),$$

soit aussi

$$\int_U f(\psi(u))d\lambda(u) = \int_V f(v)|\det(J^{-1}(\psi)(u))|d\lambda(v).$$