Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Recueil des examens
Mesures et Intégration

M28 - SMA5 - FSR -

2019-2020

Allal Ghanmi

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

EVALUATION 1 (Durée 1h30)
Théorie des mesures et Intégration

QCM: ☛ *Pour chaque question, il y a une seule bonne réponse, cochez la par X.*
➟**Barème** : réponse juste =+1/2 point ; **réponse fausse = -1/2 point** ; pas de réponse=0 point.
➟**Abréviation** ARNJ: Aucune réponse n'est juste

Question 1: Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. Alors,

- ☐ f est continue
- ☐ $\{x\in X; f(x) > \alpha\} \in \mathscr{M};\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- ☐ $f(A)$ est ouvert; $\forall A \in \mathscr{M}$
- ☐ ARNJ

Question 2: Soient A_n, A et B des parties mesurables d'un espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$. Alors, μ vérifie

- ☐ $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$.
- ☐ $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- ☐ $\mu(B\cup A) = \mu(A)+\mu(B)$ si $B \subset {}^cA$.
- ☐ ARNJ

Question 3: Soit $(X,\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré de mesure σ-finie et $A_n \in \mathscr{M}$ deux à deux disjoints, alors,

- ☐ $\mu\left(\coprod_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ avec $\mu(A_n) < +\infty$
- ☐ $\mu(X) < +\infty$
- ☐ $\exists n_0;\ \mu(A_{n_0}), \mu({}^cA_{n_0}) \in \mathbb{R}^+$
- ☐ ARNJ

Exercice 1 Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X)=1$, et $\mathscr{M} = \left\{A\in\mathscr{A};\quad \mu(A)=0 \quad \text{ou} \quad \mu(A)=1\right\}$.
Montrer que $\mathscr{M}$ est une tribu sur X. **1pt**

Exercice 2 On admettra que la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$, notée $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, est engendrée par $\{]a,+\infty[\ ;\ a\in\mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par $\{]a,+\infty[\ ;\ a\in\mathbb{Q}\}$. **1,5pt**

(2) Soient $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable, $f,g : (X,\mathscr{M}) \to (\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ deux applications mesurables.

(a) Montrer que pour tout $r\in\mathbb{Q}$, on a l'égalité : **1,5pt**

$$\{x\in X\ ;\ f(x)+g(x)>r\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}} \left(\{x\in X\ ;\ f(x)>s\}\cap\{x\in X\ ;\ g(x)>r-s\}\right).$$

(b) En déduire que $f+g$ est mesurable. **1,5pt**

Exercice 3 Soient $(X,\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}$.

(1) On suppose, dans cette question, que pour tout entier n, $A_n \subseteq A_{n+1}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. **1,5pt**

(2) On suppose que $\mu(X) < +\infty$ et que pour tout entier n, $\mu(A_n) = \mu(X)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $\mu\left(X\setminus\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 0$. **1,5pt**

(b) En déduire que $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(X)$. **1,5pt**

(3) Donner un exemple d'un espace mesuré $(X,\mathscr{M},\mu)$ et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ telle que pour tout entier n, $\mu(A_n) = +\infty$ et $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty$. **1pt**

Exercice 4 Soit $(X;\mathscr{A};\mu)$ un espace mesuré fini, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathscr{A}$.

(1) Montrer que **1,5pt**

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\setminus\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n\setminus B_n).$$

(2) Dans cette question, on suppose de plus que $B_n \subset A_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que **1,5pt**

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu(A_n)-\mu(B_n)\right).$$

Exercice 5 Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. On considère $B = \left\{x\in X; f(x)\neq 0\right\}$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note par A_n l'ensemble $A_n = f^{-1}([-n,n])$.

(1) Montrer que si $\mu(X)\neq 0$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0})\neq 0$. **1,5pt**

(2) Vérifier que $B\in\mathscr{A}$. **1,5pt**

(3) On suppose que $\mu(B)\neq 0$. Montrer qu'il existe $A\in\mathscr{A}$ et $\varepsilon>0$ vérifiant $\mu(A)\neq 0$ et $|f(x)|\geq\varepsilon$ pour tout $x\in A$. **1,5pt**

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

2014-2015
M28 - SMA 5
Samedi 07/02/2015

RATTRAPAGE - Théorie des mesures et Intégration
(Durée 1h30)

N.B.: *L'étudiant doit répondre aux questions de cours et doit traiter obligatoirement les exercices 1 et 2 ainsi que l'un des exercices 3 où 4.*

Questions de cours: Rappeler avec précision l'ennocé du

(1) Théorème de convergence monotone. **1pt**
(2) Théorème de convergence dominée. **1pt**
(3) Théorème de Fubini. **1pt**

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. **2pt**
(2) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $2y' + xy = 0$. **2pt**
(3) En déduire une expression explicite de f. **2pt**

Exercice 2 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \longrightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A h d\mu.$$

(1) Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$. **2pt**
(2) Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Montrer que $\nu(A) = 0$. **2pt**
(3) Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si fh est μ-intégrable et que dans ce cas on a: **3pt**

$$\int_X f d\nu = \int_X fh d\mu.$$

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que **2pt**

$$\sum_{n\geq 0} \left(\int_X |f_n| d\mu \right) < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n \Big) d\mu.$$

(2) On se place dans le cas $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1], \lambda)$, alors **2pt**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(\int_{[0,1]} t^n f(t) dt \right) = \int_{[0,1]} \ln\left(\frac{1}{1-t} \right) f(t) dt.$$

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) On se donne deux fonctions mesurables f et g de X dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que **2pt**

$$\left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_X g d\mu \right) \geq (\mu(X))^2.$$

(2) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $1/f$ soit intégrable. Montrer que la mesure μ est finie. **2pt**

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

2015-2016
M28 - SMA 5

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

CF - Exceptionnel
Théorie des mesures et Intégration
(Durée 1h30)

Questions de cours: Rappeler avec précision l'ennocé du

(1) Théorème de convergence monotone. **1pt**
(2) Théorème de convergence dominée. **1pt**
(3) Théorème de Fubini. **1pt**

Exercice 1
Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. **2pt**
(2) Montrer que f vérifie l'équation différentielle $2y' + xy = 0$. **2pt**
(3) En déduire une expression explicite de f. **2pt**

Exercice 2 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \longrightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A h d\mu.$$

(1) Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$. **2pt**
(2) Soit $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Montrer que $\nu(A) = 0$. **2pt**
(3) Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si fh est μ-intégrable et que dans ce cas on a: **3pt**

$$\int_X f d\nu = \int_X f h d\mu.$$

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

(1) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que **2pt**

$$\sum_{n\geq 0} \left(\int_X |f_n| d\mu \right) < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \left(\int_X f_n d\mu \right) = \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n \Big) d\mu.$$

(2) On se place dans le cas $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([0,1], \lambda)$, alors **2pt**

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(\int_{[0,1]} t^n f(t) dt \right) = \int_{[0,1]} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) f(t) dt.$$

EVALUATION 1 (Durée 1h30)
Théorie des mesures et Intégration

Questions de cours :

(1) Donner avec précision l'énnoncé des théorèmes suivants :
- (a) Théorème d'approximation d'une fonction mesurable positive. **1/2pt**
- (b) Théorème de la continuité monotone d'une mesure positive. **1/2pt**
- (c) Théorème de prolongement d'une mesure sur une algèbre. **1/2pt**

(2) Donner un exemple de deux mesured σ-finies, mais qui ne sont pas finies. **1/2pt**

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit la trancature f_n de f de niveau $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{si} \quad f(x) > n \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si} \quad f(x) < -n \end{cases}.$$

(1) Tracer les graphes de f_2, f_3 et f_7 dans le même repère pour $f(x) = x^2$ et $X = \mathbb{R}$. **1pt**

(2) Montrer que les f_n sont des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. **1pt**

(3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. **2pt**

Exercice 2 Soit $f : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application borélienne et a un nombre réel fixé. Montrer que les applications g et h définies par $g(x) := f(x+a)$ et $h(x) := f(-x)$ sont des applications boréliennes de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. **2pt**

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $|h| \equiv 1$ et telle que $f = h|f|$. **2pt**

[**Indication :** *On pourra considérer la fonction* $f(x) + \chi_E(x)$ *avec* $E := f^{-1}(\{0\})$.]

Exercice 4 : Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite symétrique si $-x \in A$ pour tout $x \in A$. On note par $\mathscr{S}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. **1pt**

(2) Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(\mathscr{S}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$-mesurable si, et seulement si f est une fonction paire. **1pt**

(3) Trouver la plus petite tribu $\mathscr{M}$ sur $\mathbb{R}$ rendant l'application $x \longmapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(\mathscr{M}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. **2pt**

Exercice 5 Soit f une fonction mesurable positive sur un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ et considérons l'ensemble $\mathfrak{F}_f := \left\{\psi \in \mathscr{E}^+ ; \psi \leq f\right\}$.

(1) Soit φ_n une suite croissante dans $\mathscr{E}^+$ convergeant vers f. Montrer que **3pt**

$$\sup_{\psi\in\mathfrak{F}_{\varphi_n}} \int \psi \, d\mu \leq \sup_{\psi\in\mathfrak{F}_f} \int \psi \, d\mu.$$

(2) Montrer que **3pt**

$$\int f \, d\mu = \sup_{\psi\in\mathfrak{F}_f} \int \psi \, d\mu.$$

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

2015-2016
M28 - SMA 5
Lundi 28/12/2015

Contrôle final (Durée 1h30)
Théorie des mesures et Intégration

La correction tiendra compte de la présentation et de la précision des réponses.

Questions de cours : Donner avec précision l'énnoncé du :

(1) Théorème de la continuité monotone d'une mesure positive. **1pt**

(2) Théorème de la convergence Monotone. **1pt**

(3) Théorème de la convergence Dominée. **1pt**

Exercice 1 Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit la trancature f_n de f de niveau $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{si} \quad f(x) > n \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \le n \\ -n & \text{si} \quad f(x) < -n \end{cases}.$$

(1) Tracer les graphes de f_1, f_3 et f_5 dans le même repère pour $f(x) = e^x$ et $X = \mathbb{R}$. **1pt**

(2) Vérifier que **1pt**

$$f_n(x) = n\chi_{\{f(x)>n\}} + f(x)\chi_{\{|f(x)|\le n\}} - n\chi_{\{f(x)<-n\}},$$

en déduire que les f_n sont des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. **1pt**

(3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ sur X. **1pt**

Exercice 2 Pour toute fonction mesurable positive f sur un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$, on considére l'ensemble $\mathfrak{F}_f := \left\{\psi \in \mathscr{E}^+ ; \psi \le f\right\}$.

(1) Montrer que pour toute suite croissante $(\varphi_n)_n$ dans $\mathscr{E}^+$ convergeant vers f, on a $\mathfrak{F}_{\varphi_n} \subset \mathfrak{F}_f$. En déduire que **2pt**

$$\int f d\mu \le \sup_{\psi\in\mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

(2) Montrer que **2pt**

$$\int f d\mu \ge \sup_{\psi\in\mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

(3) Conclure. **1pt**

Exercice 3 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(t))e^{-tx}}{t} dt; \quad t \in]0, +\infty[.$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. **2pt**

(2) Calculer explicitement sa dérivée. **2pt**

(3) Calculer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$. **2pt**

(4) En déduire la valeur de $f(x)$. **2pt**

Théorie des mesures et Intégration
Rattrapage (Durée 1h30)

La correction tiendra compte de la précision des réponses.

Un point est reservé à la présentation de la copie.

Exercice 1 Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f d'un espace mesuré $(X; \mathscr{M}; \mu)$. Montrer que s'il existe n_0 tel que $\int_X f_{n_0} d\mu < +\infty$, alors **3pt**

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. **2pt**

(2) Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre 1. **2pt**

(3) Donner l'expression explicite de f sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$. **1pt**

Exercice 3

(1) Montrer que pour tout $a > 0$, on a **1pt**

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_0^a + \int_0^a \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx.$$

En déduire que l'intégrale dénéralisé **1pt**

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

est convergent.

(2) On considère la fonction

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x;t) dx \quad \text{avec} \quad f(x;t) = e^{-xt} \frac{\sin(x)}{x} \chi_{\mathbb{R}^{+*}}(x).$$

(i) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x;t)$ est Lebesgue intégrable, pour tout $t > 0$. **1pt**

(ii) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. **1pt**

(iii) Calculer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$. **1pt**

(iv) Montrer que la fonction $F(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. **1pt**

(v) Calculer F'. **1pt**

(vi) En déduire que $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$. **1pt**

(3) En écrivant $\int_{k\pi}^{+\infty} = \sum_{n\geq k} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}$, pour un entier non nul k, montrer que **1pt**

$$\left|\int_{k\pi}^{+\infty} f(x;t) dx\right| \leq \frac{2}{k\pi}; \quad t > 0.$$

(4) Montrer que **1pt**

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^{k\pi} f(x;t) dx = \int_0^{k\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

(5) En déduire que $I = \pi/2$. **1pt**

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2016-2017
M28 - SMA 5
Lundi 16/11/2016

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

Théorie de Mesure et Intégration
C.C. - Durée 1h30

La correction tiendra compte de la précision des réponses.

Questions de cours

6pts

(1) Donner un exemple d'une algèbre (clan) qui n'est pas une σ-algèbre.

(2) Donner la définition d'une mesure σ-finie sur une algèbre.

(3) Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Donner les conditions sur A et B pour que

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(4) Citer au moins trois propriétés intéressantes de la mesure de Lebesgue λ.

(5) Donner la définition d'un ensemble négligeable dans un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

(6) Donner l'énnoncé exacte du théorème de la convergence monotone.

Exercice 1

3pts

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ si et seulement si μ vérifie les conditions

(i) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(ii) Pour toute suite $(A_n)_n$ décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$ pour laquelle il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Exercice 2

4pts

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \longrightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu.$$

(1) Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(2) Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Montrer que $\nu(A) = 0$.

Exercice 3

7pts

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite de parties $\mathcal{M}$-mesurables de X. Pour tout entier $m \geq 1$ on considère l'ensemble B_m des points de X qui appartiennent à au moins m des ensembles A_n.

(1) Donner une définition ensembliste des B_m.

(2) Montrer que les B_m sont des parties $\mathcal{M}$-mesurables de X.

(3) Montrer que pour tout $m \geq 1$, on a

$$\mu(B_m) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2016-2017
M28 - SMA 5
Lundi 28/12/2016

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

Contrôle final (Durée 1h30)
Théorie de mesures et Intégration

La correction tiendra compte de la présentation et de la précision des réponses.

Exercice 1 : **6pts**

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite de parties $\mathcal{M}$-mesurables de X. Pour tout entier $m \geq 1$, on considère l'ensemble B_m des points de X qui appartiennent à au moins m des ensembles A_n ainsi que la fonction

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}.$$

(1) Déterminer B_1.

(2) Montrer que pour tout entier m on a $B_m = \{x \in X; f(x) \geq m\}$. En déduire que $(B_m)_m$ est une suite décroissante de parties $\mathcal{M}$-mesurables de X.

(3) Montrer que pour tout $m \geq 1$, on a

$$\mu(B_m) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Exercice 2 : **6pts**

(1) Donner avec précision l'énnoncé du théorème de la convergence monotone.

(2) Donner une démonstration de ce théorème.

(3) Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-p.p. vers une fonction f. On suppose que $\int_X f_1 d\mu < +\infty$. En appliquant le théorème de la convergence monotone, montrer que

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Exercice 3 : **8pts**

Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(x))e^{-xt}}{x} dx$$

(1) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(3) Calculer explicitement sa dérivée.

(4) Calculer la limite de $f(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $f(t)$.

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2016-2017
M28 - SMA 5
Mercredi 01/02/2017

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

RATTRAPAGE - Mesures et Intégration
(Durée 1h30)

La correction tiendra compte de la précision des réponses.

Dans toute la suite λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1:

(1) Donner l'énoncé exact du lemme de Fatou.

(2) Soit $(\psi_n)_n$ une suite de fonctions positives, convergente vers ψ sur $\mathbb{R}$. On suppose que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}}\psi d\lambda < +\infty.$$
Montrer que, pour toute partie mesurable A on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A}\psi_n d\lambda = \int_{A}\psi d\lambda.$$
[Indication: *Utiliser le lemme de Fatou et remarquer que* $\mathbb{R} = A\bigsqcup(\mathbb{R}\setminus A)$.]

Exercice 2: Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ de mesure finie et $(\psi_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur A à valeurs réelles. Supposons que $(\psi_n)_n$ est uniformément convergente sur A.

(1) Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout $x \in A$, on a
$$|\psi_n(x) - \psi_{n_0}(x)| \leq 1.$$

(2) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{A}\psi_n d\lambda = \int_{A}\lim_{n\to+\infty}\psi_n d\lambda.$$

Exercice 3: Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$u(t;x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)d\lambda(y).$$

(1) Montrer que u est continue sur $[0,T[\times\mathbb{R}$, pour tout $T > 0$.

(2) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,T[\times\mathbb{R}$, pour tout $T > 0$.

(3) Montrer que u vérifie l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
sur $]0,T[\times\mathbb{R}$.

(4) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{t\longmapsto 0^+} u(t;x) = f(x).$$

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2017-2018
M28 - SMA 5
Mardi 02/01/2018

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

Contrôle final (Durée 1h30)
Théorie de la mesure et de l'intégration

Exercice 1 : **6pts**

Soient a, b, α et β des nombres réels avec $a > 0$ et notons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2+bt} \sin([\alpha t + \beta]x) d\lambda(t).$$

(1) Dire pourquoi le calcul de l'intégrale $F(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ se ramène à celui de l'intégrale de Riemann impropre.

(2) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Donner une condition suffisante sur les nombres réels a, b, α, β pour que F soit solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\alpha}{2a} x y = 0$.

(4) En déduire l'expression explicite de F sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2+bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

Exercice 2 : **4pts**

Montrer que, pour tous a et b deux réels dans $]0, +\infty[$, on a

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : **10pts**

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que la fonction partielle $t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, pour tout $x \in X$ fixé, et que $[f(x, t)| \leq g(x)$ pour tout $(x, t) \in X \times [a, b]$ où $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{M}, \mu)$.

(1) On considère la fonction $h : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, t) = \int_a^t f(x, s) ds.$$

(a) Montrer que la fonction $x \longmapsto h(x, t)$ est mesurable sur X pour tout $t \in [a, b]$ fixé.

(b) Montrer que $x \longmapsto h(x, t)$ est intégrable sur X pour tout $t \in [a, b]$ fixé.

(2) Pour tout $t \in [a, b]$, on associe

$$H(t) := \int_X h(x, t) d\mu.$$

(a) Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

(b) Calculer $H'(t)$, pour $t \in [a, b]$, en fonction de $\int_X f(x, t) d\mu$.

(3) En déduire que

$$\int_a^b \left(\int_X f(x, t) d\mu \right) dt = \int_X \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) d\mu.$$

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

2017-2018
M28 - SMA 5
Vendredi 19/01/2018

Théorie de la mesure et de l'intégration
RATTRAPAGE - (Durée 1h30)

N.B.: *La correction tiendra compte de la présentation et de la précision des réponses.*

Questions de cours: Rappeler avec précision l'ennocé du **2pts**

(1) Lemme fondamental.
(2) Lemme de Fatou.
(3) Théorème de convergence dominée.
(4) Inégalité de Hölder.

Exercice 1: **5pts**

Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \longrightarrow [0, +\infty]$ une application mesurable. Pour tout $A \in \mathscr{M}$, on pose

$$\nu(A) = \int_A h d\mu.$$

(1) Montrer que ν est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$.
(2) Soit $A \in \mathscr{M}$ tel que $\mu(A) = 0$. Montrer que $\nu(A) = 0$.
(3) Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si fh est μ-intégrable et que dans ce cas on a:

$$\int_X f d\nu = \int_X f h d\mu.$$

Exercice 2: **4pts**

Soient a, b et c des réels dans $]0, +\infty[$ et notons par λ la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$. On pose

$$I(a,b,c) = \int_{]0,+\infty[} \frac{te^{-at}}{(1-e^{-bt})(1-e^{-ct})} d\lambda(t).$$

Dire pourquoi le calcul de l'intégrale $I(a,b,c)$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ se ramène à celui de l'intégrale de Riemann impropre et montrer que

$$I(a,b,c) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bm+cn)^2}.$$

Exercice 3: Soit $a > 0$. Montrer que la fonction **5pts**

$$f_a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(tx) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner son expression explicite.

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. **4pts**

(1) On se donne deux fonctions mesurables f et g de X dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_X f d\mu\right)\left(\int_X g d\mu\right) \geq (\mu(X))^2.$$

(2) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $1/f$ soit intégrable. Montrer que la mesure μ est finie.

Théorie de la mesure et de l'intégration
Contrôle final - (Durée 1h30)

N.B.: *La correction tiendra compte de la présentation et de la précision des réponses.*

Questions de cours: **3pts**

Rappeler avec précision l'énoncé de chacun des théorèmes suivants

(1) Théorème d'approximation des fonctions mesurables positives.
(2) Lemme fondamental.
(3) Théorème de convergence monotone.
(4) Lemme de Fatou.
(5) Théorème de convergence dominée.
(6) Inégalité de Hölder.

Exercice 1: **3pts**

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$.

(1) Dire pourquoi $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ sont des tribus sur X.
(2) Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 2: **3pts**

Soient $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Soit $C > 0$ et supposons que $\int_X f_n d\mu \leq C$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $\int_X f d\mu \leq C$.

Exercice 3: **3pts**

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \chi_{]0,+\infty[}(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2},$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4! **8pts**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} e^{-tx} \chi_{]0,+\infty[}(x) dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha} e^{-tx} \chi_{]0,+\infty[}(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) On prend $\alpha = 2$.
  (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
  (b) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer f''.
  (c) Calculer les limites en $+\infty$ de f et f'.
  (d) En déduire l'expression explicite de f sachant que

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(x) e^{-tx} dx = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2(4+t^2)}$$

et

$$\int_1^t \ln(4+x^2) dx = \ln(4+t^2) - \ln(5) - 2t + 2\arctan(\frac{t}{2}) - 2\arctan(\frac{1}{2}).$$

Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

M28 - SMA5 - FSR - Pr. A. Ghanmi

2018-2019
M28 - SMA 5
Vendredi 09/01/2019

Théorie de la mesure et de l'intégration
Rattrapage - (Durée 1h30)

N.B.: *La correction tiendra compte de la présentation et de la précision des réponses.*

Questions de cours: **3pts**

Rappeler avec précision l'énoncé de chacun des théorèmes suivants

(1) Théorème d'approximation des fonctions mesurables positives.
(2) Lemme fondamental.
(3) Théorème de convergence monotone.
(4) Lemme de Fatou.
(5) Théorème de convergence dominée.
(6) Inégalité de Hölder.

Exercice 1: **3pts**

Soit $(X;\mathscr{M};\mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive, $f\in\mathfrak{M}^+$, et $t\in\mathbb{R}^{*+}$. Montrer que (inégalité de Markov)

$$\mu\left(\{f\geq t\}\right)\leq\frac{1}{t}\int fd\mu.$$

Exercice 2: **3pts**

Soient $(X;\mathscr{M};\mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction f. Soit $C>0$ et supposons que $\int_X f_n d\mu\leq C$ pour tout $n\geq 0$. Montrer que $\int_X fd\mu\leq C$.

Exercice 3: **3pts**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X,\mathscr{M},\mu)$ mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu\longrightarrow\int_X fd\mu<+\infty.$$

(1) Vérifier que la suite $g_n:=f+f_n-|f-f_n|$ converge simplement vers $2f$ et que $2f=\liminf_n g_n$.
(2) En appliquant le lemme de Fatou, montrer que

$$\int_X|f_n-f|d\mu\longrightarrow 0.$$

Exercice 4: **8pts**

Soit f la fonction définie par

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos(x))e^{-xt}}{x}dx$$

(1) Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
(2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
(3) Calculer explicitement sa dérivée.
(4) Calculer la limite de $f(t)$ quand $t\to+\infty$. En déduire la valeur de $f(t)$.