UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Filière Sciences de Matières Physiques (SMP4)
Module Mathématiques : Analyse (S4)

Cours d'Analyse

Séries numériques
Suites et Série de fonctions
Séries entières

A. Bourass, A. Ghanmi, N. Madi

(FSR 2009-2010)

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Définitions et premières propriétés

Definition 1.1.

1) On appelle série à termes dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ tout couple $((u_n)_n, (S_n)_n)$ forme d'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{K}$ et de la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

u_n est appelé le terme général de la série et S_n est la somme partielle d'ordre n. On écrira formellement $\sum u_n$ ou lieu de $((u_n)_n, (S_n)_n)$.

2) La série $\sum u_n$ converge, ou est convergente, si et seulement si (S_n) est convergente et $S = \lim S_n$ est appelée la somme de la série $\sum u_n$. On note alors $S = \sum\limits_{n}^{+\infty} u_n$.

La série diverge (ou est divergente) si elle ne converge pas.

Proposition 1.2 (Condition nécessaire)**.** *Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.*

Preuve : Ceci résulte du fait que

$$u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$$

où $S_n = \sum\limits_{k \leq n} u_k$. □

Exemples 1.3.

1. **La série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$:**

   Pour n assez grand, on a bien $\ln(n) \geq \ln(2)$. Alors, si on note par m la partie *entière de* $\frac{\ln n}{\ln 2}$, $m = E(\frac{\ln n}{\ln 2})$, *on obtient* $m \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < m+1$ *et donc* $m\ln(2) \leq \ln(n)$. *En appliquant* e^x *qui est une fonction croissante, on voit que*

$$2^m \leq n.$$

Par suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow \infty\end{aligned}$$

Par conséquent $S_n \geq 1 + \frac{m}{2}$. *Il en résulte donc que la série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

Résultat fondamental : $\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n} \text{ est divergente.}}$

2. **Série géométrique** $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ **:**

   La suite des sommes partielles est donnée par $S_n = 1 + a + \cdots + a^n$. *Alors, on a*

   $$S_{n+1} = 1 + a + \cdots + a^{n+1} = 1 + a(1 + \cdots + a^n) = 1 + aS_n.$$

   D'autre part, on a $a^{n+1} = S_{n+1} - S_n$ *et donc*

   $$a_{n+1} = 1 + aS_n - S_n = 1 + (a-1)S_n.$$

   Si $|a| \neq 1$ *on a* $S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *et s'en suit alors que* S_n *diverge si* $|a| > 1$ *et converge si* $|a| < 1$. *Dans ce dernier cas on a* $S_n \to \frac{1}{a-1}$. *Enfin, la série diverge si* $a = \pm 1$. *En effet pour* $a = 1$, *il est clair que* $S_n = n \longrightarrow +\infty$. *Pour* $a = -1$, *le terme général* $a^n = (-1)^n$ *ne tend pas vers zero et donc la série diverge d'après la condition nécessaire de convergence des séries numériques.*
   Résultat fondamental :

   $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} a^n \text{ converge si et seulement si } |a| < 1 \text{ et sa somme est } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a-1}.}$$

Definition 1.4. *Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre n de cette série la quantité R_n donnée par*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

On a alors

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n.$$

Proposition 1.5. *Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum u_n$ tend vers 0, lorsque $n \to 0$.*

Preuve : En effet

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = S - S_n \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Proposition 1.6. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Il suffit de passer aux suites partielles. $\square$

Proposition 1.7. *On désigne par $\Re u_n$ (resp. $\Im u_n$) la partie réele (resp. immaginaire) de u_n. Alors, on a*

$$\sum u_n \quad converge \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \Re u_n \\ \sum \Im u_n \end{cases} \quad converge \quad \Leftrightarrow \sum \overline{u_n}.$$

Proposition 1.8. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes telles que $u_n \leq v_n$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

1.2 Séries à termes dans $\mathbb{R}^+$

Lemme 1.9. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $u_n \geq 0$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire $\exists M > 0$ tel que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M, \forall n$.*

Preuve : La série $\sum u_n$ converge si et seulement si (par définition) la suite $(S_n)_n$ converge. Mais comme $(S_n)_n$ est croissante, puisque $u_n \geq 0$, on sait que $(S_n)_n$ converge si et seulement si elle est majorée. $\square$

Théorème 1.10 (Critères de convergence). *Soient les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Alors on a*

1. *Si $0 \leq u_n \leq v_n$, alors on a $\sum v_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum u_n$ converge et $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.*
2. *Si $u_n = O(v_n)$ avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.*
3. *Si $u_n \sim v_n$ pour $n \to +\infty$ et $v_n \geq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature*
4. **Régle $n^\alpha u_n \to 0$:** *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ alors $\sum u_n$ converge.*
5. **Régle de Cauchy :** *Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sqrt[n]{u_n} \to l$, alors $\sum u_n$ converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$.*
6. **Régle de D'Alembert :** *Soit $u_n > 0$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$, alors $\sum u_n$ converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$.*

Mise en garde : Le cas $l = 1$ dans les régles de Cauchy et D'Alembert est un casqu'il conviendrait d'étudier à part dans chaque cas.

Exemple 1.11 (Exemple fondamental : Série de Riemann).

On considère la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Si $\alpha \leq 0$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$.*
- *Si $\alpha = 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (voir Exemples 1.3).*
- *Si $0 < \alpha < 1$, on a bien $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ est donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après (1) du théorème précédent.*
- *Si $\alpha > 1$, alors on a*

$$\frac{1}{n^\alpha} < \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Il en résulte alors que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque la suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ est majorée.

Résultat fondamental : $\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{n^\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}, \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

Exemples 1.12.

1. $u_n = \frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}$.
   Par la régle de D'Alembert, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{2(n+1)}e^{-2(n+1)}}{n+1}}{\frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}} = \left(\frac{2}{e}\right)^2\left(\frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^2 < 1.$$

   Donc $\sum \frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}$ *est convergente.*
   On peut utiliser aussi la régle de Cauchy.

2. $u_n = (\frac{n}{n+1})^{n^2} = (1+\frac{1}{n})^{-n^2}$.
   Par la règle de Cauchy, on a

$$\sqrt[n]{u_n} = (1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

   Alors $\sum(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ *converge.*

3. *Soit* $u_n = (\frac{an}{n+1})^{n^2}$; $a \in \mathbb{R}^+$,

   Par la régle de Cauchy, on a $\sqrt[n]{u}_n\left(\frac{a}{(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \frac{a^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

   - $\sqrt[n]{u_n} \to 0$ *si* $a < 1$
   - $\sqrt[n]{u_n} \to \frac{1}{e} < 1$ *si* $a = 1$
   - $\sqrt[n]{u_n} \to +\infty$ *si* $a > 1$

   Par suite, la série $\sum(u_n = (\frac{an}{n+1})^{n^2})$; $a \in \mathbb{R}^+$, *converge si et seulement si* $a \leq 1$.

4. *Soit* $u_n = an\ln(1+\frac{1}{n}) - b\cos\frac{1}{n} + c\sin\frac{1}{n}$.
   On sait que

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$$
$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$
$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Il en résulte que

$$u_n = a - b + (c - \frac{a}{2})\frac{1}{n} + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

- *Si* $a \neq b$ *alors* $u_n \longrightarrow a - b \neq 0$, *et donc* $\sum u_n$ *diverge.*
- $a = b$ *et* $c \neq \frac{a}{2}$ *alors* $u_n \sim \alpha\frac{1}{n}$ *et donc* $\sum u_n$ *diverge d'après (3) du théorème précédent (puisque* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge).*
- *Si* $a = b$, $c = -\frac{a}{2}$ *et* $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \neq 0$, *alors* $u_n \sim \alpha\frac{1}{n^2}$, *donc* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $a = b$, $c = -\frac{a}{2}$ *et* $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$, *alors* $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *donc* $\sum u_n$ *converge.*

5. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

   Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{n}] \subset [0, \pi]$ *on a* $\frac{1}{1+\pi^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. *D'où,*

$$\frac{\sin(x)}{1+x^2} \leq \sin(x)$$

   car $\sin(x) \geq 0$ *pour* $x \in [0, \pi]$. *On en déduit,*

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin dx = 1 - \cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{n^2}.$$

   Donc $\sum u_n$ *converge.*

Definition 1.13. *La série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série à termes positifs* $\sum |u_n|$ *converge.*

Proposition 1.14. *Si la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente, alors* $\sum u_n$ *converge*

Preuve : Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$, on a

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| = T_{n+p} - T_n.$$

Mais (T_n) converge par hypothèse, donc (T_n) est de Cauchy. Il en résulte que (S_n) est aussi de Cauchy, et donc converge. □

1.3 Séries alternées

Definition 1.15. *La série $\sum u_n$ est dite alternée si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = -(-1)^n |u_n|$.*

Théorème 1.16. *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_n$ décroit et $|u_n| \to 0$, alors $\sum u_n$ converge.*

Preuve : Supposons que $u_n = (-1)^n |u_n|$, on a alors

$$S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = -|u_{2p+1}| + |u_{2p+2}| \leq 0$$

et

$$S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+3} + u_{2p+2} = -|u_{2p+3}| + |u_{2p+2}| \geq 0.$$

De plus

$$S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \to 0.$$

Ainsi, les deux suites extraites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes et donc S_{2p} et S_{2p+1} ont même limite. Ceci montre que $(S_n)_n$ converge. □

Exemples 1.17.

1. *On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   - *Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ et donc la série diverge.*
   - *Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le théorème précédent.*
   - *Si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument et donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.*
2. *Soit $u_n = \frac{1}{n^2+1}((-1)^n n + a)$; $a \in \mathbb{R}$.*

   La série n'est pas absolument convergente, car $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum |u_n|$ ne converge pas. Pourtant, la série $\sum u_n$ est convergente. En effet, on a

   $$u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + \frac{a}{n^2+1} = v_n + w_n$$

   où $v_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ est une suite alternée $\searrow_0$. Donc d'après le théorème précédent $\sum v_n$ converge. Comme $\sum w_n$ est aussi convergente (car $\frac{a}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$), on conclut alors que la série $\sum u_n$ est convergente.

Chapitre 2

Suites et Série de fonctions

2.1 Rappels

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $A \subset \mathbb{R}$. On note par $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ des fonctions de A dans $\mathbf{K}$, $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K}) = \{f : A \to \mathbf{K}\}$. On dit que $f \in \mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ est bornée si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in A.$$

On note par $\mathfrak{B}(A, \mathbf{K})$ le sous espace vectoriel de $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ constitué des fonctions bornées,

$$\mathfrak{B}(A, \mathbf{K}) = \{f \in \mathfrak{F}(A, \mathbf{K}), f borne\}.$$

Par $\mathfrak{C}(A, \mathbf{K})$ on désigne l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbf{K}$. C'est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$. Enfin, on définit la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Théorème 2.1. *Soit $A = I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Alors, toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée. De plus, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1)$ et $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2)$,*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in [a, b].$$

Théorème 2.2 (T.A.F). *Soit $f \in \mathfrak{C}(A, \mathbf{K})$ une fonction dérivable. On suppose de plus que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in A$. Alors, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \qquad \forall x, y \in A.$$

2.2 Suites de fonctions

Definition 2.3.

1. *On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge simplement sur* A *vers la fonction* f *si pour tout* $x \in A$*, la suite numérique* $(f_n(x))_n$ *converge vers* $f(x)$.

2. *On dit que* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers* f *et on écrit* $f_n \overset{unif.}{\longrightarrow}$ *si* $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|$ *converge vers* 0. *Cela signifie que la suite numérique* $\big(\|f_n - f\|_\infty \big)_n$ *converge vers* 0.

Propriété 2.4. *Si* $f_n \overset{unif.}{\longrightarrow} f$*, alors* $f_n \to f$ *simplement.*

Remarque pratique : Pour montrer que $f_n \overset{unif.}{\longrightarrow} f$, on étudie $|f_n(x) - f(x)|$. On essaie de majorer $|(f_n(x)) - f(x)|$ par une quantité u_n indépendante de x telle que $u_n \longrightarrow 0$.

Exemples 2.5.

1. *Soit* $(f_n(x)) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.
   Pour $x = 0$ *on a* $f_n(0) \longrightarrow 0$.
   Si $x \neq 0$ *on a* $f_n(x) \longrightarrow x$.
   Alors, la suite de fonctions $(f_n)_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la foncion* $f(x) = x$. *De plus, on a*

   $$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \leq |x|.$$

   - *Si* $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$*, alors* $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   - *Du fait que* $\frac{nx^2}{1+nx^2} \leq 1$ *on déduit que* $\frac{n|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|}$. *Il s'ensuit alors que si* $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ *on a*

   $$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

   Par suite

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

   Alors, la suite de fonctions $(f_n)_n$ *converge aussi uniformement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $f(x) = x$.

2. *On considère la suite de fonctions* $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n})$.
   Il est claire que cette suite converge simplement vers 0 *sur* $\mathbb{R}^+$ *car*

$$f_n(x) \sim \frac{x}{n} \qquad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

   Mais, elle ne converge pas uniformement sur $\mathbb{R}^+$. *En effet, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé, on a*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = +\infty.$$

   Toutefois, elle converge uniformement vers 0 *sur tout intervalle* $[0, a]$ *fermé borné de* $\mathbb{R}^+$ *; en effet pour tout* $x \in [0, a]$, *on a* $|f_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{a}{n})$ *et donc*

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{a}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 2.6. *Soit* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *avec* $I = [a, b]$. *On suppose que* $f_n \longrightarrow f$ *uniformement sur* I.

1. *Si les* f_n *sont continues sur* I, *il en est de même de* f.
2. *Si les* f_n *sont intégrables alors* f *est intégrable et*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

3. *On définit* $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ *et* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Alors*

$$F_n \overset{unif.}{\longrightarrow} F \qquad \text{sur } [a, b].$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= |\int_a^x (f_n(t) - f(t))dt| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \\ &\leq ||f_n - f||_\infty |x - a| \end{aligned}$$

Par suite

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |b - a| ||f_n - f|| \longrightarrow 0.$$

□

Remarque et Exemple 2.7. *On considère la suite des fonctions*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ x \in [0, n] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a bien

$$f_n \overset{unif.}{\longrightarrow} 0,$$

mais

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = 1 \nrightarrow 0.$$

Théorème 2.8. *Le théorème précédent n'est plus vrai si I n'est pas un intervalle fermé borné. Soit $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions vérfiant*

i) Il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f_n(\alpha) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$

ii) $f'_n \overset{unif.}{\longrightarrow} g$.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformement vers une fonction f qui est la primitive de g prenant la valeur l au point α, et on a $f' = g$.

Preuve : Pour tout x fixé, on a

$$f_n(x) = f_n(\alpha) + \int_\alpha^x f'_n(t)dt.$$

Alors, par passage à la limite on obtient

$$\lim_n f_n(x) = l + \int_\alpha^x g(t)dt.$$

Si on pose $f(x) = l + \int_\alpha^x g(t)dt$, alors $||f_n - f||_\infty \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème précédent. En effet, posons

$$F_n(x) = \int_\alpha^x f'_n(t)dt = f_n(x) - f_n(\alpha)$$

et $F(x) = \int_\alpha^x g(t)dt$. On a donc d'après le théorème précédent $F_n \longrightarrow F$ uniformément sur $[a, b]$. C'est à dire puisque $f_n(\alpha) \longrightarrow l$:

$$f_n(x) \longrightarrow l + \int_\alpha^x g(t)dt = f(x),$$

où f est la primitive de g qui prend la valeur l au point $x = \alpha$. $\square$

2.3 Séries de fonctions

Definition 2.9.

1. *On appelle série de fonctions un couple de deux suites* $(f_n)_n$ *et* $(S_n)_n$ *avec* $S_n = \sum_{k \leq n} f_k$*, on la note* $\sum f_n$*.*

2. $\sum f_n$ *converge simplement sur* A *si la suite* $(S_n)_n$ *converge simplement sur* A*, c'est-à-dire si et seulement si pour tout* $x \in A$ *la série numérique* $\sum f_n(x)$ *converge. La fonction* $x \longmapsto \sum_{k \geq n} f_k(x)$ *est appelée reste de la série* $\sum f_n$*.*

   On note par $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *la somme de la série* $\sum f_n$*, i.e. la fonction* f *définie par*

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

3. *La série* $\sum f_n$ *converge uniformement sur* A *si et seulement si la suite de fonctions* $(S_n)_n$ *converge uniformement sur* A *: Autrement dit s'il existe une fonction* $S : A \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\sup_{x \in A} |s_n(x) - s(x)| \longrightarrow_n 0.$$

4. *La série* $\sum f_n$ *converge absolument sur* A *si la série* $\sum |f_n|$ *converge simplement sur* A*.*

5. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement sur* A *si et seulement si la série* $\sum ||f_n||_\infty$ *converge dans* $\mathbb{R}^+$*, avec*

$$\|f\|_\infty \sup_{x \in A} |f_n(x)|.$$

Théorème 2.10.

1. *Si la série* $\sum f_n$ *converge normalement, alors* $\sum f_n$ *converge uniformément, et donc* $\sum f_n$ *converge simplement.*
2. *La série* $\sum f_n$ *converge normalement si et seulement s'il existe une série* $\sum u_n$ *à termes positifs et convergente telle que*

$$|f_n(x)| \leq u_n, \quad \forall x, \ \forall n.$$

Exemples 2.11.

1. *Soit* $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n!}$.
   On a
   $$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$
   La sa série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ *converge. Alors* $\sum f_n$ *converge normalement d'après 2) du théorème précédent.*

2. *Soit* $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ *sur* $\mathbb{R}^+$.
   La série $\sum f_n$ *converge simplement mais pas normalement sur* $\mathbb{R}^+$. *En effet, pour tout n fixé, on a*
   $$f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$
   Le tableau de variation de la fonction $f_n(x)$ *montre que*
   $$||f_n||_\infty = f_n(\frac{2}{\sqrt{n}}) = \frac{4}{e^2}.$$
   Par suite la série numérique $||f_n||_\infty$ *diverge et donc* $\sum f_n$ *ne converge pas normalement sur* $\mathbb{R}^+$.
   • *Pourtant, pour un réel* $a > 0$ *et un entier* $N \geq 0$ *tel que* $\frac{2}{\sqrt{N}} < a$, *on a bien*
   $$sup_{x>a}|f_n(x)| = f_n(a) = na^2 e^{-a\sqrt{n}}$$
   et donc on a la convergence normale de la série $\sum f_n$ *sur tout* $[a, +\infty[\,; a > 0$.
   • *Notons aussi que comme* $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2} \nrightarrow 0$ *alors la série* $\sum f_n$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. *Mais, elle converge uniformément sur tout* $[a, +\infty[\,; a > 0$.

Théorème 2.12. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* $I = [a, b]$. *On suppose que* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *et que les* f_n *sont continues. Alors*

i) *La fonction* $f = \sum f_n$ *est continue.*

ii) *La série* $\sum(\int_a^b f_n(t)dt)$ *converge et on a*
$$\int_a^b (\sum f_n(x))dx = \sum(\int_a^b f_n(x)dx).$$

Théorème 2.13. *Soit* f_n *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant*

i) $\sum f_n$ *converge simplement*

ii) $\sum f_n'$ *converge uniformément.*

Alors, on a

a. $\sum f_n$ *converge uniformément.*
b. $f = \sum f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$.
c. $f' = (\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Chapitre 3

Série entières

3.1 Définition et première propriétés

Definition 3.1. *Une série entière est une série de fonctions f_n où $f_n(z) = a_n z^n$, autrement dit ce sont les séries de la forme*

$$\sum a_n z^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}.$$

Lemme 3.2 (d'Abel). *S'il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\sum |a_n \rho^n|$ converge, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq |\rho|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Definition 3.3 (théorème). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors, il existe $R \in [0, +\infty]$ tel que*

i) Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge.

ii) Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.

R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple 3.4.

- *La série $\sum z^n$ est de rayon de convergence $R = 1$, et elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.*
- *La série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence $R = 1$, et converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.*

Proposition 3.5 (Règle de D'Alembert). *Si $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est*

$$R = \frac{1}{l}$$

avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition 3.6. *Soit la série entière* $\sum a_n x^n$. *Alors la série entière dérivée* $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ *a le même rayon de convergence que la série* $\sum a_n x^n$.

Théorème 3.7.

1. $\sum a_n x^n$ *converge normalement sur tout intervalle fermé borné contenu dans* $]-R, R[= I_R$
2. *La fonction* $S(x) = \sum a_n x^n$ *est continue sur* I_R
3. $S(x)$ *est de classe* C^∞ *sur* I_R *et on a pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

3.2 Développement en série entière

Definition 3.8. *On dit qu'une fonction* f *est développable en série entière s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *tel que*

$$f(x) = \sum a_n x^n, \qquad x \in I \subset]-R, R[,$$

et on a f *est de classe* C^∞ *sur* I *et*

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Proposition 3.9. *Si* f *est développable en série entière avec* $f(x) = \sum a_n x^n$, *alors*
i) Si f *est pair, alors* $a_{2p+1} = 0$.
ii) Si f *est impair, alors* $a_{2p} = 0$.

Proposition 3.10. *Soit* $f : I =]-a, a[\longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^∞. *Alors* f *est développable en série entière, (DES(0)), si et seulement s'il existe* α *tel que* $0 < \alpha \leq a$ *et des constantes* $A > 0$ *et* $B > 0$ *vérifiant*

$$\forall x, \quad -\alpha < x < \alpha, \quad \text{on a} \qquad |f^n(x)| \leq B.A^n n!.$$

Proposition 3.11. *Soit* $f : I =]-\alpha, \alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞ *de formule de Taylor avc reste intégral*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Alors f est développable en série entière si et seulement s'il existe β ; $0 < \beta < \alpha$ tel que

$$R_n(f)(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \longrightarrow 0, \qquad \forall x \in]-\beta, \beta[.$$

Preuve : Il est clair que si f est développable en série entière alors $R_n(f)(x) \longrightarrow 0$ sur $]-R, +R[$. Réciproquement, si $R_n(f)(x) \longrightarrow 0$ sur $]-\beta, \beta[$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(f)(x) \longrightarrow f(x).$$

De plus la série $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est de rayon de convergence $R \geq \beta > 0$. □

Exemples 3.12.

1. *Soit $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.*

   On a

$$e^x = \sum_{0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

   Alors

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \max(1, e^x) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right|$$
$$= \max(1, e^x) \left| \int_x^0 \frac{(u)^n}{n!} du \right|$$
$$= \max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^(k)(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(f)(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Enfin, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ *est de rayon de convergence égale à* $+\infty$.

2. $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$.

3. *Soit* $f(x) = \cos(x)$.

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{(2k)}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos(t)dt$$
$$= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos(t)dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{u^n}{n!} du \right| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

4. $\ln(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Propriété 3.13 (Opérations). *Soient f et g deux fonctions DES(0) avec $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$. Alors*

i) *$f + g$ est DES(0) et on a $f + g = \sum (a_n + b_n) x^n$.*

ii) *$f \times g$ est DES(0) et on a $f \times g = \sum c_n x^n$ avec*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

iii) *f' est DES(0) et on a $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

iv) *$f^{(k)}$ est DSE(0).*

v) *Les primitives de f sont aussi DES(0).*