

Série 1 - Tribus (σ -algèbres)

Exercice 1 (Tribu trace (induite)): Soit X un ensemble non vide et $C \subset X$. On suppose que X est un espace topologique et que $\mathcal{M}$ est la tribu borélienne de X , $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(X)$. Montrer que la tribu trace $\mathcal{M}_C := \{A \cap C; A \in \mathcal{M}\}$ de $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(X)$ sur C est la tribu borélienne $\mathfrak{B}(C)$ de C .

Exercice 2 (Tribu image directe).

Soient X et Y des ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur X .

- (1) Vérifier que l'image $\{f(A), A \in \mathcal{M}\}$ n'est pas forcément une σ -algèbre sur Y .
- (2) Montrer que $\mathcal{M}' = \{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ est une tribu sur Y . ($\mathcal{M}'$ est dite Tribu image directe de $\mathcal{M}$ par f .)

Exercice 3 Soit X un ensemble infini et $\mathcal{S} = \{\{x\}; x \in X\}$. Déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{S}$ (distinguer les cas X dénombrable et non dénombrable).

Exercice 4 Soit X un ensemble et f une application de X dans lui-même. Montrer que l'ensemble des parties A de X telles que $f^{-1}(f(A)) = A$ est une tribu sur X .

Exercice 5 Soit f une bijection d'un ensemble X . Montrer que l'ensemble des parties A de X possédant la propriété $x \in A \iff f(x) \in A$ et $f^{-1}(x) \in A$ est une tribu sur X .

Exercice 6 Soit X un ensemble et A un sous-ensemble de X . Trouver la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{B \subset X; A \subset B\}$. Donner des conditions suffisantes pour que $\sigma(\mathcal{C})$ soit $\mathcal{P}(X)$ ou la tribu grossière.

Exercice 7 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}_+}$): Montrer que

$$\sigma(\{[0; \beta[; \beta \in \mathbb{R}_+^*\}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{[0; \beta[; \beta \in \mathbb{Q}_+^*\}).$$

Exercice 8 (Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ - Devoir à rendre): On note $\mathcal{M}$ la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B; A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. L'objectif est de montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

- (1) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{M}$.
- (2) Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (3) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (4) Montrer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Conclure.

Série 2 - Fonctions mesurables

Exercice 9 Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction (dite tranquée)

$$f_a(x) := \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}.$$

Montrer que f_a est mesurable de X dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Soit f une application d'un espace métrique X dans un espace métrique Y . On suppose que l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable.

Exercice 11 Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables, i.e., il existe $B \subset A$ tel que $B \notin \mathcal{M}$. Montrer que $h = \chi_B - \chi_{A \setminus B}$ n'est pas mesurable de X dans $\mathbb{R}$, alors que $|h|$ l'est.

Exercice 12

- (1) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la restriction de f à $[a; b]$ est mesurable.
- (2) Montrer que les fonctions monotones d'un borélien A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont mesurables.
- (3) Montrer que toute fonction réglée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne. On rappelle qu'une fonction sur un segment est réglée si elle est limite uniforme de d'une suite de fonctions en escalier.
- (4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive. Montrer que la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, est mesurable, où $\overline{\mathbb{R}^+}$ est muni de sa tribu borélienne.

Exercice 13 (Devoir à rendre) Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une application mesurable sur X . Pour tout entier n et tout $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$, on considère les ensembles

$$A_n := \{f \geq n\} \quad \text{et} \quad A_{k,n} := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}.$$

On définit les fonctions φ_n par

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} n & \text{pour } x \in A_n \\ \frac{k}{2^n} & \text{pour } x \in A_{k,n}; \quad \text{avec } k = 0, \dots, n2^n - 1 \end{cases}.$$

- (1) Vérifier que $A_n, A_{k,n}$ sont dans $\mathcal{M}$ et forme une partition de X .
- (2) Montrer qu'on a

$$\varphi_n(x) = n\chi_{\{f \geq n\}}(x) + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{A_{k,n}}(x).$$

En déduire que φ_n est une suite de fonction étagées.

- (3) Vérifier que $A_{k,n} = A_{2k,n+1} \cup A_{2k+1,n+1}$ et comparer $\varphi_{n+1}(x)$ et $\varphi_n(x)$ dans les cas suivants: $f(x) \geq n+1$; $n \leq f(x) < n+1$; $0 \leq f(x) \leq n$. En déduire que la suite $(\varphi_n)_n$ est croissante.
- (4) Montrer que pour tout x vérifiant $f(x) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = +\infty$.
- (5) Montrer que pour tout x vérifiant $0 \leq f(x) < +\infty$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi_n(x) \leq f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

Série 3 - Mesures positives

Exercice 14 Soit X un ensemble infini non dénombrable. On définit sur $\mathcal{P}(X)$ l'application $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 15 Soient $(X; \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y, \mathcal{M}')$ un espace mesurable. Soit f une application $(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ -mesurable. Montrer que l'application définie par $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{M}')$.

Exercice 16 Soient $(X; \mathcal{M}; \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{A}$ une tribu sur X incluse dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_F$ la tribu trace de $F \subset X$.

- (1) Montrer que la restriction de μ à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ -finie) si μ est finie (resp. σ -finie)?
- (2) Vérifier que $\mathcal{M}_F \subset \mathcal{M}$ si et seulement si $F \in \mathcal{M}$. Montrer dans ce cas que la restriction de μ à $\mathcal{M}_F$ est une mesure sur $\mathcal{M}_F$. Cette mesure est-elle finie?

Exercice 17 Soit $(X; \mathcal{M}; \mu)$ un espace mesuré fini, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{M}$ avec $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) - \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(B_n)).$$

Exercice 18 Soit $(X; \mathcal{M}; \mu)$ un espace mesuré fini et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \mu(X)$. Montrer que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(X)$.

Exercice 19 Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ sous l'hypothèse que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Exercice 20 Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$, et m et μ deux mesures sur l'espace mesurable $(X; \mathcal{M} = \sigma(\mathcal{C}))$. On suppose que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Montrer que si $X \in \mathcal{C}$ et que $m(X) < +\infty$, alors $m = \mu$ sur $\mathcal{M}$.

Exercice 21 (Devoirs à rendre) Soient μ une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On définit la fonction ψ par $\psi(x) := \mu([x, +\infty[)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (1) Montrer que ψ est décroissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$. Calculer les limites de ψ en $\pm\infty$.
- (2) Montrer que ψ est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
- (3) En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable. *On admettra que l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.*

Exercice 22 (Devoir à rendre) Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Alors μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ si et seulement si

- (1) Pour tout $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
 (2) Pour toute suite $(A_n)_n$ décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$ pour laquelle il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Série 4 - Mesure de Lebesgue

Exercice 23 On désigne par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et considérons la fonction λ définie sur la classe $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ à valeurs dans la demi-droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}^+$ par $\lambda(I) := |I|$ où $|I|$ est la longueur de l'intervalle I .

- (1) Montrer que λ est additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute famille finie d'intervalles $(I_k)_{k=1}^N$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{k=1}^N I_k \subset I$ avec $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{k=1}^N \lambda(I_k) \leq \lambda(I).$$

- (2) Montrer que pour tout compact $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et toute recouvrement finie $(O_k)_{k=1}^N \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$ de K par des ouverts de $\mathbb{R}$, on a

$$\lambda(K) \leq \sum_{k=1}^N \lambda(O_k).$$

- (3) Montrer que pour tout intervalle borné I_n et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $O_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tel que

$$I_n \subset O_n \quad \text{et} \quad \lambda(O_n) \leq \lambda(I_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

- (4) Montrer que si $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ borné I et $\varepsilon > 0$, alors il existe un compact $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tel que

$$K \subset I \quad \text{et} \quad \lambda(K) \geq \lambda(I) - \varepsilon.$$

- (5) Soit $(I_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tels que $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Montrer que

$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

En déduire que λ est σ -sous additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

- (6) Montrer que λ est σ -additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

On désigne par $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

- (7) Montrer que toute ensemble élémentaire $E \in \mathcal{U}(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme

$$E = \bigcup_{j=1}^N I_j,$$

où les $I_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et sont deux à deux disjoints.

- (8) Montrer que λ se prolonge à une application bien définie sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

- (9) Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. Montrer que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Exercice 24 On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

- (1) Montrer qu'un ouvert O de $\mathbb{R}$ de mesure finie n'est pas forcément borné.
- (2) Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé?

Exercice 25 (Devoir à rendre) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ avec $m([0; 1]) = 1$

- (1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse).
- (2) En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Série 5 - Fonctions intégrables - Grands théorèmes - Espaces L^p

Exercice 27 (Lemme fondamentale): Il s'agit de montrer que si (φ_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ et $\psi \in \mathcal{E}^+$ telles que $\lim_n \varphi_n \geq \psi$, alors $\lim_n \int \varphi_n d\mu \geq \int \psi$.

- (1) Soit $0 < \alpha < 1$ et considérons la suite

$$A_n^\alpha := \left\{ x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha \psi(x) \right\}.$$

Vérifier que $(A_n^\alpha)_n$ est croissante dans $\mathcal{M}$ et que $\bigcup_n A_n^\alpha = X$.

- (2) On considère la suite $\alpha \psi \chi_{A_n}$. Vérifier que $(\alpha \psi \chi_{A_n})_n$ est croissante dans $\mathcal{E}^+$, et que $(\alpha \psi \chi_{A_n})_n \rightarrow \alpha \psi$,
- (3) Montrer que

$$\int \alpha \psi \chi_{A_n} d\mu \leq \int \varphi_n d\mu.$$

- (4) En écrivant ψ sous la forme $\psi = \sum_{j=1}^N \beta_j \chi_{B_j}$, montrer que

$$\alpha \int \psi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu.$$

En déduire le résultat souhaité.

Exercice 28 Soit $f \in \mathcal{M}^+(X)$. On propose de montrer que $\int f d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu$ où $\mathfrak{F}_f$ est défini par $\mathfrak{F}_f := \left\{ \psi; \psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq f \right\}$.

- (1) Soit φ_n est une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ convergeant vers f . Montrer que

$$\int \varphi_n d\mu = \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_{\varphi_n}} \int \psi d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

En déduire que

$$\int f d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

- (2) Conclure après avoir montré que

$$\sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu \leq \int f d\mu.$$

Exercice 29 Soit $f \in \mathcal{M}^+$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que (inégalité de Markov)

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

Exercice 30 (CF-2016-2017 [6pts])

- (1) Donner avec précision l'énoncé du théorème de la convergence monotone.
- (2) Donner une démonstration de ce théorème.
- (3) Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ -p.p. vers une fonction f . On suppose que $\int_X f_1 d\mu < +\infty$. En appliquant le théorème de la convergence monotone, montrer que

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Exercice 31 Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable vérifiant

$$\int_X |f - \chi_{A_n}| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (1) Montrer qu'on a $|f| \leq 2$ μ -p.p. et déduire que $|f + \chi_{A_n}| \leq 3$ μ -p.p. pour tout $n \geq 1$.
- (2) Montrer que

$$\int |f - f^2| d\mu \leq 4 \int |f - \chi_{A_n}| d\mu$$

pour tout $n \geq 1$. En déduire l'existence de $A \in \mathcal{M}$ tel que $f = \chi_A$ μ -p.p.

Exercice 32 Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction intégrable.

- (1) Montrer que

$$\int_X |f| \chi_{\{|f| > n\}} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (2) En déduire que (la continuité de l'intégrale par rapport à la mesure):

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}, \quad \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

- (3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. On définit pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = f(x^n)$. Calculer la limite de $\int_{]0,1[} g_n d\lambda$.

Exercice 34 Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{n \geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty \implies \sum_{n \geq 0} \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n \geq 0} f_n \right) d\mu.$$

Exercice 35 Soient $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose qu'il existe f intégrable telle que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n \geq 1}$ convergeant vers f μ -p.p., et une fonction h intégrable telle que $\sup_{n \geq 1} |f_{\phi(n)}| \leq h$ μ -p.p.

Exercice 36 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ -p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0.$$

Exercice 37 (CF-2016-2017 [8pts]). Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(x))e^{-xt}}{x} dx$$

- (1) Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- (2) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- (3) Calculer explicitement sa dérivée.
- (4) Calculer la limite de $f(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$. En déduire la valeur de $f(t)$.

Exercice 38 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré.

- (1) Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq \mu(X)^2.$$

- (2) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $1/f$ soit intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

Exercice 39 Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2([0, 1], \lambda)$, montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_{[0, 1]} t^n f(t) dt = \int_{[0, 1]} \ln \left(\frac{1}{1-t} \right) f(t) dt.$$

Exercice 40 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

- (1) Montrer que si les fonctions f_n sont positives et si la suite (f_n) converge presque partout vers f , alors (f_n) converge vers f dans L^1 .
- (2) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ définie par $f_n = n\chi_{]0, 1/n[} - n\chi_{]-1/n, 0[}$. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 et que $\lim_n \int f_n d\lambda = 0$. La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans L^p ($p \geq 1$)?