Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Théorie des mesures et Intégration

M28-SMA5 - Chapitre 1 :

Espaces mesurables

Allal GHANMI

(2016 - 2017)

Chapitre 1

Espaces mesurables

Dans toute la suite X désignera un ensemble non vide. On notera par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de parties de X.

1.1 Clans (Algébres de Boole)

Définition 1.1.1. *Une classe $\mathscr{C}$ de parties de X est appelée clan (ou algèbre de Boole ou tout simplement algèbre) si :*

1. $\emptyset \in \mathscr{C}$.
2. *$\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire dans X : si $A \in \mathscr{C}$, alors $A^{\complement} = X \setminus A \in \mathscr{C}$.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cup B \in \mathscr{C}$.*

Exemples 1.1.2. *Il y a beaucoup d'algèbres sur un ensemble non-vide donné X.*

- *La plus grosse est l'algèbre $\mathcal{P}(X)$.*
- *La plus petite est $\{\emptyset, X\}$.*
- *Soit $A \subset X$. La plus petite algèbre contenant A est la collection constituée de $\emptyset$, A, $A^{\complement}$ et X.*
- *L'intersection de deux algèbres $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur X, définie par*

$$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 := \{A \subset X;\ A \in \mathscr{C}_1 \text{ et } A \in \mathscr{C}_2\},$$

  est encore une algèbre sur X. Plus généralement, L'intersection d'une famille quelconque d'algèbres sur X est une algèbre sur X.

Remarque 1.1.3. *Soit $\mathscr{C}$ un clan de parties de X. Les propriétés suivantes sont immédiates :*

1. $X \in \mathscr{C}$.
2. *$\mathscr{C}$ est stable par différence non symétrique : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{C}$.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par différence symétrique : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{C}$.*
4. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion finie : si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{C}$.*
5. *$\mathscr{C}$ est stable par intersection finie : si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{C}$.*

Il y a d'autres systèmes équivalents à l'ensemble des axiomes dans la définition d'une algèbre. On cite par exemple la définition équivalente suivante :

Définition 1.1.4. *$\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est un clan sur X si et seulement si*

1. *$\mathscr{C}$ non-vide.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable différence non symétrique.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion.*

1.2 Tribus (σ-Algébres de Boole)

Définition 1.2.1. *Une collection $\mathscr{C}$ de parties de X, $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$, est dite tribu (ou σ-algèbre ou encore σ-algèbre de Boole) sur X si elle possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathscr{C}$ est non-vide.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion au plus dénombrable.*

Définition 1.2.2. *Le couple $(X;\mathscr{C})$ formé d'un ensemble non vide X et d'une tribu $\mathscr{C}$ sur X est dit espace mesurable. Les éléments de $\mathscr{C}$ sont appelés les parties $\mathscr{C}$-mesurables de X ou simplement mesurables s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la tribu $\mathscr{C}$.*

Exemples 1.2.3. *L'ensemble des tribus sur X est évidemment non vide. Les exemples des algèbres sur X cités précédemment sont aussi des σ-algèbres sur X :*
- *La plus grosse est la tribu $\mathcal{P}(X)$.*
- *La plus petite est $\{\emptyset, X\}$.*
- *Soit $A \subset X$, la plus petite tribu contenant A est $\{\emptyset, A, A^{\complement}, X\}$..*

Remarque 1.2.4. *Toute tribu (σ-algèbre) sur X est un clan (algèbre) sur X. En revanche, il existe des algèbres qui ne sont pas des tribus. Un des contre-exemples est donné par*

$$\mathscr{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \text{ ou } A^{\complement} = X \setminus A\}$$

où X est un ensemble non vide et infini.

Remarque 1.2.5. *Soit $(X;\mathscr{M})$ un espace mesurable. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. *$\mathscr{M}$ contient nécessairement les parties $\emptyset$ et X.*
2. *$\mathscr{M}$ est stable par intersection dénombrable.*
3. *$\mathscr{M}$ est stable par différence non symétrique et par différence symétrique.*

Comme dans le cas des clans, il y a d'autres systèmes équivalents à l'ensemble des axiomes définissant une tribu. Par exemple :

Définition 1.2.6. *$\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X si et seulement si*

1. *$X \in \mathscr{C}$.*
2. *$\mathscr{C}$ est stable par différence non symétrique.*
3. *$\mathscr{C}$ est stable par réunion au plus dénombrable.*

1.3 Construction des tribus

1.3.1 Constuction 1 : Tribu trace (induite)

Soit $\mathscr{M}$ une tribu de parties de X. Pour toute partie fixée C non vide de X, on définit

$$\mathscr{M}_C := \{A \cap C; \quad A \in \mathscr{M}\}.$$

Alors $\mathscr{M}_C$ est une tribu sur C, appelée tribu induite par $\mathscr{M}$ (ou encore tribu trace de $\mathscr{M}$) sur C.

Attention : Ici, il faut prendre le complémentaire dans C.

1.3.2 Constuction 2 : Tribu image réciproque

Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \longrightarrow Y$ une application donnée. Si $\mathscr{M}_Y$ est une tribu sur Y, alors $f^{-1}(\mathscr{M}_Y) = \left\{f^{-1}(B); B \in \mathscr{M}_Y\right\}$ est une tribu sur X.

Pour la vérification, on utilise les propriétés suivants

$$\complement\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}(\complement A); \quad f^{-1}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

ainsi que $f^{-1}(Y) = X$.

1.3.3 Constuction 3 : Intersection de tribus

La plus part des tribus "intéressantes" sur X sont construites en utilisant le résultat que *toute intersection (dénombrable ou non) de tribus de parties de X est encore une tribu de parties de X.*

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de X. La tribu*

$$\bigcap_{\left\{\substack{\mathscr{M} \text{ tribu sur } X \\ \mathscr{M} \supset \mathcal{F}}\right\}} \mathscr{M} =: \sigma(\mathcal{F})$$

est la plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.2. *$\sigma(\mathcal{F})$ est dite la tribu sur X engendrée par $\mathcal{F}$.*

Proposition 1.3.3. *1) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux collections de parties de X. Alors,*

i) Si $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$, alors $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}')$ (en particulier si $\mathscr{C}'$ est une tribu, on a $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}'$).

ii) On a $\sigma(\mathscr{C}) \subset \sigma(\mathscr{C}') \Longleftrightarrow \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}')$.

iii) $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}') \Longleftrightarrow \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C}')$ et $\mathscr{C}' \subset \sigma(\mathscr{C})$.

2) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application et $\mathscr{C}_Y$ une collection de parties de Y, alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}_Y)) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}_Y)).$$

Remarque 1.3.4. *On peut avoir $\sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}')$ pour deux classes différentes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Par exemple, on a $\sigma(\{A\}) = \sigma(\{A^{\complement}\})$.*

Remarque 1.3.5 (Emboitage des Tribus)**.** *On rencontrera souvent la situation du cas particulier de la proposition précédente : on aura deux tribus $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sur le même ensemble X et on voudra montrer que $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$. Si on sait que $\mathscr{M}$ est engendrée par une collection $\mathscr{C}$ (autrement dit $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{M}$), il suffira alors de prouver que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}'$.*

1.3.4 Constuction 4 : Tribu produit

Soient $(X; \mathscr{M}_X)$ et $(Y; \mathscr{M}_Y)$ deux espaces mesurables.

– La tribu produit de $\mathscr{M}_X$ et $\mathscr{M}_Y$ est la tribu sur le produit cartésien $X \times Y$, noté $\mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y$, engendré par les parties $A \times B$ où $A \in \mathscr{M}_X$ et $B \in \mathscr{M}_Y$.
– Le couple $(X \times Y; \mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y)$ est dit espace mesurable produit des espaces $(X; \mathscr{M}_X)$ et $(Y; \mathscr{M}_Y)$.

Remarque 1.3.6. *Le produit cartésien des deux tribus, $\mathscr{M}_X \times \mathscr{M}_Y$, n'est pas une tribu sur $X \times Y$ (La stabilité par réunion dénombrable tombe en défaut). Mais on a bien*

$$\mathscr{M}_X \otimes \mathscr{M}_Y = \sigma(\mathscr{M}_X \times \mathscr{M}_Y).$$

1.4 Tribu de Borel

La notion de tribu borélienne est liée à la structure topologique de l'ensemble de base.

Définition 1.4.1 (Topologie)**.** *On appelle espace topologique tout couple $(X; \mathscr{O})$ formé d'un ensemble non vide X et d'une famille $\mathscr{O}$ de parties de X possédant les propriétés*

1. *$\mathscr{O}$ contient les parties $\emptyset$ et X.*
2. *$\mathscr{O}$ est stable par intersections finies.*
3. *$\mathscr{O}$ est stable par réunions quelconques.*

Les éléments de $\mathscr{O}$ sont les ouverts de la topologie. Les complémentaires des ouverts sont les fermés de la topologie.

Topologie usuelle sur $\mathbb{R}$:

La topologie dite usuelle sur $\mathbb{R}$ est donnée par la collection $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ des parties de $\mathbb{R}$ qui sont unions d'intervalles ouverts $]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cette topologie usuelle, un ensemble $O \subset \mathbb{R}$ est ouvert si

$$\forall x \in O,\ \exists b \in O,\ x \in]a, b[\subset O.$$

Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, on considère

$$\mathcal{I} = \{(\rho, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*;\ ]\rho - r, \rho + r[\subset O\}.$$

Alors $\mathcal{I}$ est dénombrable (elle s'injecte dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) et

$$O = \bigcup_{(\rho,r)\in\mathcal{I}}]\rho - r, \rho + r[.$$

Ainsi tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion au plus denombrable d'intervalles ouverts (on peut même se limiter à des intervalles à extrémités rationnelles).

Tribu de Borel

Définition 1.4.2. *Soit $(X;\mathscr{O})$ un espace topologique. La tribu de parties de X engendrée par la famille $\mathscr{O}$ est appelée tribu de Borel ou encore tribu des boréliens de X.*

Remarque 1.4.3.
- *On note $\mathfrak{B}(X)$ la tribu borélienne de l'espace topologique $(X;\mathscr{O})$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la topologie mise sur X.*
- *Les ouverts et les fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, les réunions dénombrables de fermés sont des éléments de $\mathfrak{B}(X)$, dits des boréliens de X.*

Théorème 1.4.4. *Soit $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, où $\mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ est la collection de parties de $\mathbb{R}$ qui sont unions d'intervalles ouverts. Alors, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est aussi la tribu engendrée par l'un des classes suivantes*

1. *La collection $\mathscr{J}_1 := \{]a,+\infty[;\ a \in \mathbb{R}\}$.*
2. *La collection $\mathscr{J}_2 := \{]a,+\infty[;\ a \in \mathbb{Q}\}$.*
3. *La collection $\mathscr{J}_3 := \{[a,+\infty[;\ a \in \mathbb{R}\}$.*
4. *La collection $\mathscr{J}_4 := \{[a,+\infty[;\ a \in \mathbb{Q}\}$.*
5. *La collection $\mathscr{J}_5 := \{]a,b[;\ a,b \in \mathbb{R}\}$ des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$.*

Preuve :
- Pour tout $k = 1,2,3,4,5$, on a $\mathscr{J}_k \subset \mathscr{T}_{\mathbb{R}}$ et donc
$$\sigma(\mathscr{J}_k) \subset \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) =: \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$
- Il est clair que $\mathscr{J}_2 \subset \mathscr{J}_1 \subset \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \supset \mathscr{J}_3 \supset \mathscr{J}_4$. Il en résulte que
$$\sigma(\mathscr{J}_2) \subset \sigma(\mathscr{J}_1) \subset \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) =: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathscr{J}_3) \supset \sigma(\mathscr{J}_4).$$
- La preuve sera achevée en montrant
$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathscr{J}_2) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathscr{T}_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathscr{J}_4)$$
Pour ceci, il suffit alors de vérifier que
$$\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_2) \text{ et } \mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_4).$$

Montrons par exemple que $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_2)$: Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus denombrable d'intervalles de la forme $]a,b[$ avec $a < b$ et $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, il suffit alors de montrer que ces derniers sont dans $\sigma(\mathscr{J}_2)$.

- Pour tout $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ avec $a < b$, il existe deux suites (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{Q}$ vérifiant
  - (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante avec $a < a_n < b_n < b$
  - $a_n \to a$ et $b_n \to b$

  telles que
$$]a,b[= \bigcup_n]a_n,b_n[$$

– Or on a

$$]a_n, b_n[=]-\infty, b_n[\cap \left(\overbrace{\bigcap_{k\geq 1}]-\infty, a_n + \frac{1}{k}[}^{]-\infty, a_n]} \right)^{\complement} \in \sigma(\mathscr{J}_2).$$

Remarques 1.4.5. – *$\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_4)$ s'établit de manière analogue.*

– *Une démonstration directe de $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_1) = \mathscr{M}_1$ est la suivante*
  – *Par construction, on a $]a, +\infty[\in \mathscr{J}_1 \subset \mathscr{M}_1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
  – *Par intersection dénombrables d'éléments de $\mathscr{M}_1$ et passage au complémentaire, on a aussi*

$$]-\infty, a[= ([a, +\infty[)^{\complement} = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]a - \frac{1}{n}, +\infty[\right)^{\complement} \in \mathscr{M}_1.$$

  – *Comme intersection de deux éléments de $\mathscr{M}_1$, on a*

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[\in \mathscr{M}_1; \quad a < b.$$

On conclut alors $\mathscr{M}_1$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1 \supset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

– *La preuve de $\mathscr{T}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathscr{J}_5)$, est immédiate du fait que tout ouvert est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés (voir le rappel topologique).*

1.5 Exercices supplémentaires et devoir à rendre

Exercice 1 Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. On définit les applications $f_d : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ et $f_r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ par

$$f_d(A) = \{f(x);\, x \in A\} \quad \text{et} \quad f_r^{-1}(B) = \{x;\, f(x) \in B\}.$$

1. Montrer que f_d et f_r^{-1} vérifient les formules suivantes (dites de Hausdorff) :

$$(a) \quad f_r^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcup_{i\in I} f_r^{-1}(B_i);$$

$$(b) \quad f_r^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} f_d(B_i);$$

$$(c) \quad f_r^{-1}(A^c) = \left(f_r^{-1}(A_i) \right)^c.$$

$$(a') \quad f_d\left(\bigcup_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} f_d(A_i);$$

$$(b') \quad f_d\left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) \subset \bigcap_{i\in I} f_d(A_i).$$

2. On suppose que f est bijective. Ecrire f_r^{-1} en terme de f^{-1}.

Exercice 2 Soit X un ensemble non vide, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de parties de X. Montrer que

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n).$$

Exercice 3 Pour une collection $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de X, on définit

$$\liminf A_n := \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \limsup A_n := \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right).$$

1. Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
2. Montrer que $\liminf A_n = \limsup A_n$ lorsque $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante (décroissante).
3. Montrer que $(\limsup A_n)^c = \liminf (A_n^c)$ et $(\liminf A_n)^c = \limsup (A_n^c)$.

Exercice 4 Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble non vide X. Déterminer la tribu engendrée par la collection $\{A, B\}$.

Exercice 5 : Soit n un entier, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathscr{M}_n = \sigma(\{I_n^k;\, k = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1\})$ la tribu sur $]0,1[$ engendrée par les

$$\begin{cases} I_n^0 := \left]0, \dfrac{1}{2^n}\right[\\ I_n^k := \left]\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right[, \qquad k \in \{1, 2, \cdots, 2^n - 1\} \end{cases}.$$

Montrer que la suite $(\mathscr{M}_n)_n$ est croissante mais que leur union n'est pas une tribu sur $]0,1[$.

Exercice 6 Soit X un ensemble non vide et considérons les collections

$\mathscr{C} := \{A \subset X : A \text{ ou } A^c \ \text{ est fini}\}$ et $\mathscr{M} := \{A \subset X : A \text{ ou } A^c \ \text{ est fini ou dénombrable}\}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un clan sur X. Est-elle une tribu sur X ?
2. Montrer que $\mathscr{M}$ est une tribu sur X.

Exercice 7 *(Tribu engendrée par une partition) :* Soit X un ensemble non vide.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de X. Décrire la tribu engendrée par cette partition.
2. Montrer que toute tribu finie de parties de X est la tribu engendrée par une partition finie de X.
3. Montrer que si X est dénombrable, toute tribu sur X est engendrée par une partition.

Exercice 8 *(Une tribu infinie est non dénombrable) :* Montrer que toute tribu infinie $\mathscr{M}$ sur un ensemble (infini) X est non dénombrable.

Devoir à rendre :

Exercice 9 *(Caractérisation de la tribu engendrée).* Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ deux collections de parties d'un ensemble E.

1. On note par $\mathcal{Z}$ l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(E)$ stables par différence et stables par union dénombrable disjointe. Montrer qu'il existe $\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ et :

$$\mathcal{A} \in \mathcal{Z}; \quad \mathcal{C} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ cette partie de $\mathcal{P}(E)$. On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que $E \in \mathcal{C}$.

2. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} \quad \text{tel que } A \cap D \in \mathcal{D}\}$.
   (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.
   (b) Soit $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$. En déduire que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Exercice 10 *(Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$).*

On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B; A; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. L'objectif est de montrer que

$$T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une Preuve analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).