Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Théorie des mesures et Intégration

M28-SMA5 - Chapitre 2 :

Fonctions mesurables

Allal GHANMI

(2016 - 2017)

Chapitre 2

Fonctions mesurables

2.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *Soit $(X, \mathscr{M})$ et $(X', \mathscr{M}')$ deux espaces mesurables et $f : X \longrightarrow X'$ une fonction. On dit que f est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable (ou simplement mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté) si*

$$f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M},$$

c'est-à-dire que pour tout $A' \in \mathscr{M}'$ on a $f^{-1}(A') \in \mathscr{M}$.

Définition 2.1.2. *Lorsque $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sont des tribus boréliennes, toute fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable f de X dans X' est dite fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-borélienne.*

Remarque 2.1.3. *Soient $(X, \mathscr{M}_1)$, $(X, \mathscr{M}_2)$, $(X', \mathscr{M}'_1)$ et $(X', \mathscr{M}'_2)$ des espaces mesurables tels que*

$$\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2 \quad \text{et} \quad \mathscr{M}'_1 \supset \mathscr{M}'_2.$$

Si $f : X \longrightarrow X'$ est $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}'_1)$-mesurable, alors

1. *f est aussi $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}'_1)$-mesurable si $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$.*
2. *f est aussi $(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}'_2)$-mesurable si $\mathscr{M}'_1 \supset \mathscr{M}'_2$.*
3. *f est aussi $(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}'_2)$-mesurable si $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ et $\mathscr{M}'_1 \supset \mathscr{M}'_2$.*

Exemple 2.1.4. *Soit X un ensemble. Toute fonction f de $(X, \mathcal{P}(X))$ dans un espace mesurable quelconque $(Y, \mathscr{M})$ est $(\mathcal{P}(X), \mathscr{M})$-mesurable. Rien à prouver puisque pour toute $B \in \mathscr{M}$, on a $f^{-1}(B)$ est effectivement une partie de X.*

Exemple 2.1.5. *Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sont deux tribus sur X alors l'application identité $Id_X : X \longrightarrow X$; $f(x) = x$, est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable si et seulement si $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$. Ceci résulte du fait que pour toute $B \in \mathscr{M}'$, on a $f^{-1}(B) = B \in \mathscr{M}' \subset M$.*

Exemple 2.1.6. *Si $(X, \mathscr{M})$ et $(X', \mathscr{M}')$ sont deux espaces mesurables. Les applications constantes $f : X \longrightarrow X'$ (i.e., il existe $b \in X'$ tel que $f(x) = b$ pour tout $x \in X$) sont $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurables. En effet, pour toute $B \in \mathscr{M}'$, on a $f^{-1}(B) = X$ si $b \in B$ et $f^{-1}(B) = \emptyset$ si $b \notin B$. Dans les deux cas, on a $f^{-1}(B) \in \subset M$.*

Exemple 2.1.7. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $A \subset X$. La fonction indicatrice $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de A définie par*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

est $(\mathscr{M}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{M}$. Ceci est du au fait que pour toute $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\chi_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & si\ 0, 1 \notin A, \\ A^c & si\ 0 \in A, 1 \notin A, \\ A & si\ 1 \in A, 0 \notin A; \\ X & si\ 0, 1 \in A. \end{cases}$$

Il en resulte alors que χ_A est $(\mathscr{M}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{M}$.

Proposition 2.1.8. *Le composé de fonctions mesurables est encore une fonction mesurable. Autrement dit la mesurabilité des fonctions est stable par composition.*

Preuve : Soit $(X, \mathscr{M})$, $(X', \mathscr{M}')$ et $(X'', \mathscr{M}'')$ trois espaces mesurables, $f : X \longrightarrow X'$ une fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable et $g : X' \longrightarrow X''$ une fonction $(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')$-mesurable. On a $g^{-1}(\mathscr{M}'') \subset \mathscr{M}'$ et $f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}$ et donc

$$(g \circ f)^{-1}(\mathscr{M}'') = f^{-1}(g^{-1}(\mathscr{M}'')) \subset f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}.$$

Alors $g \circ f$ est une fonction $(\mathscr{M}, \mathscr{M}'')$-mesurable. □

2.2 Un cas spéciale

Théorème 2.2.1. *Soit $(X, \mathscr{M})$ et $(X', \mathscr{M}')$ deux espaces mesurables, $\mathscr{C}'$ une collection de parties de X' engendrant $\mathscr{M}'$ (c-à-d. $\sigma(\mathscr{C}') = \mathscr{M}'$). Alors $f : X \longrightarrow X'$ est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{M}$.*

Preuve : Si f est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable, on a $f^{-1}(\mathscr{M}') \subset \mathscr{M}$. Comme $\mathscr{C}' \subset \mathscr{M}'$ et que donc $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset f^{-1}(\mathscr{M}')$, on en déduit que $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{M}$.

Réciproquement, si $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{M}$, on a bien

$$\mathscr{C}' \subset \{A' \subset X' / f^{-1}(A') \in \mathscr{M}\} =: \mathscr{M}''.$$

La collection $\mathscr{M}''$ est non vide et c'est bien une tribu sur X' (c'est la tribu image directe - voir TD).

Comme $\mathscr{M}'$ est la plus petite tribu sur X' contenant $\mathscr{C}'$, on conclut que $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}''$, et donc

$$f^{-1}(\mathscr{M}') \subset f^{-1}(\mathscr{M}'') \subset \mathscr{M}.$$

D'où f est $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable. □

Attention : *On n'a pas forcément* $\quad f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$.

Corollaire 2.2.2. *Soit X et X' deux ensembles, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux collections de parties de X et X', respectivement, et $f : X \longrightarrow X'$ une fonction donnée. Si $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C}$ alors f est $(\sigma(\mathscr{C}), \sigma(\mathscr{C}'))$-mesurable.*

Preuve : Par hypothèse, on a $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{C} \subset \sigma(\mathscr{C})$. On applique alors le théorème précédent (Théorème 2.2.1) avec $\mathscr{M}' = \sigma(\mathscr{C}')$ et $\mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C})$. □

Corollaire 2.2.3. *Soit $(X, \mathscr{T})$ et $(X', \mathscr{T}')$ deux espaces topologiques. Alors, toute fonction continue $f : X \longrightarrow X'$ (c.à d. $f^{-1}(\mathscr{T}') \subset \mathscr{T}$) est borélienne.*

Preuve : Par définition $\mathfrak{B}(X, \mathscr{T}) = \sigma(\mathscr{T})$ et $\mathfrak{B}(X', \mathscr{T}') = \sigma'(\mathscr{T}')$. Il suffit d'appliquer le résultat précédent. □

Remarque 2.2.4. *Le théorème précédent (ainsi que ses corollaires) est fondamental et permet de montrer la mesurabilité d'une application en ne regardant que les images réciproques d'éléments d'une famille engendrant la tribu de l'espace d'arrivé. Par exemple, si l'espace d'arrivé est $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, il suffira de regarder les images réciproques des parties de la forme $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ (ou bien $a \in \mathbb{Q}$), car la collection de ces éléments engendre $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 2.2.5. *Une fonction $f : X \longrightarrow X'$ borélienne n'est pas forcément une fonction continue. Le contre-exemple est donné par la fonction indicatrice d'une partie non-vide borné de $X = \mathbb{R}$.*

Corollaire 2.2.6. *Soit X et X' deux ensembles, $\mathscr{C}'$ une collection de parties de X' et posons $\mathscr{B} = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$ et $\mathscr{B}' = \sigma(\mathscr{C}')$. Si $f : X \longrightarrow X'$ une fonction $(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$-measurable, alors*

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')).$$

Preuve : Notons qu'on a $\mathscr{C}' \subset \sigma(\mathscr{C}')$ et donc $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$. Par suite, comme $f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}'))$ est une tribu contenant $f^{-1}(\mathscr{C}')$, on a

$$\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')) \subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')) =: f^{-1}(\mathscr{B}').$$

En vertu du théorème précédent, f est $(\mathscr{B}, \mathscr{B}' = \sigma(\mathscr{C}'))$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathscr{C}') \subset \mathscr{B} := \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$. Alors,

$$f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}')) \subset \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}')).$$ □

Remarque 2.2.7. *Toute application $f : X \longrightarrow X'$ est $(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$-measurable, avec $\mathscr{B} = \sigma(f^{-1}(\mathscr{C}'))$ et $\mathscr{B}' = \sigma(\mathscr{C}')$ pour toute collection $\mathscr{C}' \subset \mathcal{P}(X')$.*

2.3 Fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$

Dorénavant, sauf mention du contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ sera muni de sa tribu borélienne $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.3.1. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.*

2. $A_\alpha := \{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} =: \{f > \alpha\} \in \mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $B_\alpha := \{x \in X; \quad f(x) < \alpha\} =: \{f < \alpha\} \in \mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $C_\alpha := \{x \in X; \quad f(x) \leq \alpha\} =: \{f \leq \alpha\} \in \mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. $D_\alpha := \{x \in X; \quad f(x) \geq \alpha\} =: \{f \geq \alpha\} \in \mathscr{M}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve : On applique le théorème précédent puisque ces intervalles engendrent $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (voir Chapitre 1). En effet,

— (1) $\Longleftrightarrow$ (2) grâce au fait que $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ de la forme $]\alpha, +\infty[$; $\alpha \in \mathbb{Q}$.
— (2) $\Longleftrightarrow$ (4) par passage au complémentaire.
— (3) $\Longleftrightarrow$ (5) par passage au complémentaire.
— Il reste alors à montrer qu'on a (2) $\Longleftrightarrow$ (5) : Supposons qu'on a (2), alors

$$A_{\alpha-\frac{1}{n}} \in \mathscr{M}; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad \forall n \geq 1.$$

Ensuite comme $D_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}}$ et $\mathscr{M}$ est une tribu sur X, alors $D_\alpha \in \mathscr{M}$. Réciproquement, supposons (3), on déduit de même que

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_{\alpha+\frac{1}{n}} \in \mathscr{M}.$$

□

Proposition 2.3.2. *Soit f une fonction sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors, f est mesurable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont des fonctions mesurables.*

Preuve :

— Notons que $\mathfrak{B}(\mathbb{C}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ et que les projections canoniques $P_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto x$ et $P_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto y$ sont continues et donc mesurables.
— f est mesurable ssi $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $F(x) = (\Re(f)(x), \Im(f)(x))$ est mesurable. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a, +\infty[\times]b, +\infty[) &= F^{-1}(]a, +\infty[\times]b, +\infty[) \\ &= \Re(f)^{-1}(]a, +\infty[) \cap \Im(f)^{-1}(]b, +\infty[). \end{aligned}$$

— Par suite
  — f mesurable $\Longrightarrow P_x \circ F =: \Re(f)$ et $P_y \circ F =: \Im(f)$ mesurables.
  — $\Re(f)$ et $\Im(f)$ mesurables $\Longrightarrow f$ mesurable (2ème égalité).

□

Proposition 2.3.3. *Si f et g sont deux fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *cf est mesurable.*
2. *f^2 est mesurable.*
3. *$|f|$ est mesurable.*
4. *$f + g$ est mesurable.*
5. *$f \times g$ est mesurable.*

Preuve :

1. On a $A_\alpha(cf) = A_{\alpha/c}(f) \in \mathscr{M}$ si $c > 0$ et $A_\alpha(cf) = B_{\alpha/c}(f) \in \mathscr{M}$ si $c < 0$. Le cas $c = 0$ est trivial puisque $A_\alpha(0) = \emptyset$ quand $\alpha \geq 0$ et $A_\alpha(0) = X$ quand $\alpha < 0$.
2. On a $A_\alpha(f^2) = X \in \mathscr{M}$ si $\alpha < 0$ et $A_\alpha(f^2) = A_{\sqrt{\alpha}}(f) \cup B_{-\sqrt{\alpha}}(f) \in \mathscr{M}$ si $\alpha \geq 0$.
3. On a $A_\alpha(|f|) = X \in \mathscr{M}$ si $\alpha < 0$ et $A_\alpha(|f|) = A_\alpha(f) \cup B_{-\alpha}(f) \in \mathscr{M}$ si $\alpha \geq 0$.
4. On a $A_\alpha(f+g) = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r$ (union dénombrable), avec
$$S_r := A_r(f) \cap A_{\alpha-r}(g)$$
pour tout $r \in \mathbb{Q}$. L'inclusion $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r \subset A_\alpha(f+g)$ est clair. Pour l'inclusion inverse, $A_\alpha(f+g) \subset \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} S_r$, notons que pour $x \in A_\alpha(f+g)$ on a $f(x) > \alpha - g(x)$. Il existe alors $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x) \geq r \geq g(x) - \alpha$ et donc $f(x) \geq r$ et $g(x) \geq \alpha - r$.
5. La mesurabilité de $f \times g$ peut être vu comme conséquence de (1), (2), (4) et du fait que
$$f \times g = \frac{1}{4}\left([f+g]^2 - [f-g]^2\right).$$
$\square$

Remarque 2.3.4. *L'asserrtion (2) est un cas particulier du (5). On peut redémontrer (4) et (5) à l'aide de la fonction mesurable $F = X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par*
$$F(x) := (f(x); g(x))$$
et la mesurabilité (continuité) des fonctions $\varphi; \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définient par
$$\varphi(a,b) = a + b \quad et \quad \psi(a,b) = ab,$$
puisque
$$f + g = \varphi \circ F \quad et \quad f \times g = \psi \circ F.$$

A toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, on associe les fonctions f^+ et f^- définient respectivement sur X par
$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\} \qquad \text{et} \qquad f^-(x) = -\inf\{f(x), 0\} = \sup\{-f(x), 0\}.$$

Définition 2.3.5. *f^+ est dite la partie positive de f et f^- la partie négative de f. Ce sont des fonctions positives $f^+, f^- : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$.*

Proposition 2.3.6. *La fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si les fonctions f^+ et f^- sont mesurables.*

Preuve : Le résultat de la proposition est une conséquence immédiate de l'observation que
$$\bullet\, f = f^+ - f^-, \quad \bullet\, |f| = f^+ + f^-, \quad \bullet\, f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad \bullet\, f^- = \frac{1}{2}(|f| - f). \qquad \square$$

Dans la suite, on considerera les fonctions définient sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2.4 Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2.4.1. *La tribu borélienne sur $\overline{\mathbb{R}}$ est celle engendrée par les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Définition 2.4.2. *Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ sont des réunions des intervalles (ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$) de la forme $]a,b[$, $[-\infty,a[$ et $]b,+\infty]$; $a,b \in \mathbb{R}$.*

Comme pour $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, on montre que (voir TD) :

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{]a,+\infty]; a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a,+\infty]; a \in \mathbb{R}\}) = \cdots .$$

Notation 2.4.3. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. On note par $\mathfrak{M}(X,\mathscr{M})$ l'ensemble des fonctions mesurables sur $(X,\mathscr{M})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposition 2.4.4. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.*
2. *$\{f > \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
3. *$\{f < \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
4. *$\{f \leq \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*
5. *$\{f \geq \alpha\} \in \mathscr{M}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Similaire au démonstration donnée dans le cas des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. □

Proposition 2.4.5. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $f,g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions mesurables. Alors,*

$$\{f < g\}; \{f \leq g\}; \{f = g\} \in \mathscr{M}.$$

Preuve :

1. On a
$$\{f < g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in X; f < r < g\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r\}) \in \mathscr{M}.$$
2. $\{f \leq g\} \in \mathscr{M}$ s'obtient par passage au complémentaire dans $\{g < f\}$, ou bien grâce au fait que
$$\{f \leq g\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{f < g + \frac{1}{n}\right\}.$$
3. $\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} \in \mathscr{M}$.

□

Proposition 2.4.6. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. Une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si*

$$\mathcal{A} := \{x \in X; \quad f(x) = +\infty\}$$

et

$$\mathcal{B} := \{x \in X; \quad f(x) = -\infty\}$$

sont des parties mesurables, et la fonction $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(x) = (1 - \chi_{\mathcal{A}\cup\mathcal{B}})(x) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } \mathcal{A}\cup\mathcal{B} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est mesurable (avec la convention que $0 \times \pm\infty = 0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Preuve :

— Pour l'implication directe, soit $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$. Alors

$$\mathcal{A} := \{x \in X; \quad f(x) > n; \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > n\} \in \mathscr{M}$$

et

$$\mathcal{B} := \{x \in X; \quad f(x) < -n; \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < -n\} \in \mathscr{M}.$$

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}(x) = (1 - \chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}})(x) f(x)$.

— Si $\alpha \geq 0$, alors

$$\{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} \setminus \mathcal{A} \in \mathscr{M}.$$

— Si $\alpha < 0$, on a

$$\{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} \cup \mathcal{B} \in \mathscr{M}.$$

Donc $\widetilde{f}$ est mesurable.

Réciproquement, supposons que $\widetilde{f}$ est mesurable et que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{M}$.

— Pour tout $\alpha \geq 0$, on a

$$\{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} \cup \mathcal{A} \in \mathscr{M}.$$

— Pour tout $\alpha < 0$, on a

$$\{x \in X; \quad f(x) > \alpha\} = \{x \in X; \quad \widetilde{f}(x) > \alpha\} \setminus \mathcal{B} \in \mathscr{M}.$$

Par suite f est mesurable, $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$. $\square$

Remarque 2.4.7. *Il est évident de voir que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(\mathscr{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable, alors la fonction $\hat{f} : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$; $x \in X$, est $(\mathscr{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-mesurable.*

Remarque 2.4.8 (Exercice). *Comme conséquence de la Proposition 2.4.6, on déduit que si $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$, alors*

$$cf, \quad f^2, \quad |f|, \quad f^+, \quad f^- \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M}).$$

Noter que cf est identiquement nulle une fois que $c = 0$ (ceci est du au fait que $0 \times (\pm\infty) = 0$ dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Remarque 2.4.9. *Notons que si $f, g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$, alors la somme $f + g$ n'est pas bien définie par*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

sur les ensembles $\mathscr{M}$-mesurables

$$E_1 := \{x \in X; \ f(x) = +\infty \ et \ g(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\})$$

et

$$E_2 := \{x \in X; \ f(x) = -\infty \ et \ g(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \cap^{-1} (\{+\infty\}).$$

Définition 2.4.10. *Pour* $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonctions sur* X*. On définit* $f + g$ *par*

$$(f+g)(x) := (1 - \chi_{E_1 \cup E_2})(f(x) + g(x)) = \begin{cases} 0 & \textit{sur } E_1 \cup E_2, \\ f(x) + g(x) & \textit{sinon .} \end{cases}$$

Proposition 2.4.11. *Soient* $f, g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$*. Alors*

1. $f + g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.
2. $f \times g \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.

Preuve : Une démonstration sera donnée plus tard en utilisant le théorème d'approximation.

2.5 Approximation des fonctions mesurables

Proposition 2.5.1. *Soient* $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$*. Alors,* $\sup(f_n)$ *et* $\inf(f_n)$ *sont des fonctions mesurables.*

Preuve : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\{\sup(f_n) \leq \alpha\} = \bigcap_n \{f_n \leq \alpha\} \in \mathscr{M}.$$

et

$$\{\inf(f_n) \geq \alpha\} = \bigcap_n \{f_n \geq \alpha\} \in \mathscr{M}.$$

Noter qu'on peut utiliser aussi le fait que

$$\inf(f_n) = -\sup(-f_n).$$

□

Corollaire 2.5.2. *Soient* $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *deux fonctions mesurables sur un espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$*. Alors* $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *sont des fonctions mesurables de* X *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*.*

Preuve : On prend $f_1 = f$ et $f_n = g$ pour $n \geq 2$ et on applique le résultat de la proposition précédente. □

Corollaire 2.5.3. *Si* $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable* $(X, \mathscr{M})$*. Alors, les fonctions* $\liminf f_n$ *et* $\limsup f_n$ *sont mesurables.*

Preuve : On a

$$\limsup f_n = \lim_{n \to +\infty} (\sup_{k \geq n}(f_k)) = \inf_n(\sup_{k \geq n}(f_k)).$$

et

$$\liminf_n f_n = \lim_{n \to +\infty} (\inf_{k \geq n}(f_k)) = \sup_n(\inf_{k \geq n}(f_k)).$$

□

Corollaire 2.5.4. *Soient $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. On a*

1. $\{x \in X; \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *existe* $\} \in \mathscr{M}$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} f_n$ *existe sur X, alors elle est dans* $\mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$.

Preuve : On a

$$\{x \in X; \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe } \} = \{\liminf_n f_n = \limsup_n f_n\}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n.$$

□

La réciproque du corollaire précédent est le résultat suivant (Théorème d'approximation des fonctions mesurables)

Théorème 2.5.5. *Soit $f \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$ telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$. Alors, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathfrak{M}(X, \mathscr{M})$ vérifiant*

1. *Croissance :* $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ *pour tout* $x \in X$.
3. *Chaque φ_n prend un nombre fini de valeurs réels.*

Remarque 2.5.6. *Ce théorème est une première étape dans la construction de l'intégrale de Lebesgue.*

Preuve : Exercice (voir TD).

Définition 2.5.7. *On appelle fonction étagée sue X, toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable sur X qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distincts dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 2.5.8. *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction étagée et α_i ; $i = 1, 2, \cdots$, les valeurs distincts de f, alors les $A_i = \{f = \alpha_i\} = \{f \geq \alpha_i\} \cap \{f \leq \alpha_i\}$ sont mesurables et on a*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x).$$

Réciproquement, toute combinaison linéaire à coefficients réels positifs de fonctions caractéristiques de parties mesurables de X est une fonction étagée.

Corollaire 2.5.9. *Toute fonction mesurable $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (qui n'est pas forcémént positive) est limite d'une suite de fonctions étagées sur X.*

Preuve : On a

$$f = f^+ - f^-$$

avec

$$f^+, f^- : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}; \quad f^+, f^- \geq 0.$$

Corollaire 2.5.10. *Si $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Alors $f+g$ et $f \times g$ sont aussi des fonctions mesurables.*

Preuve : En vertu du corollaire précédent, soient $(f_n)_n$ et $(g_m)_m$ deux suites de fonctions étagées sur X telles que

$$f = \lim_{n\to+\infty} f_n \quad \text{et} \quad g = \lim_{m\to+\infty} g_m.$$

Alors, on a

$$f+g = \lim_{n\to+\infty}(f_n+g_n) \quad \text{est mesurable}$$

et

$$f \times g = \lim_{m\to+\infty}(f \times g_m) \quad \text{est mesurable,}$$

car

$$f \times g_m == \lim_{n\to+\infty}(f_n \times g_m) \quad \text{sont mesurables,}$$

puisque $f_n \times g_m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.