Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

THÉORIE DES MESURES ET INTÉGRATION

M28-SMA5 - CHAPITRE 3 :

MESURES POSITIVES

ALLAL GHANMI

(2016 - 2017)

Chapitre 3

Mesures positives

Dans ce chapitre on associe à chaque espace mesurable donné $(X, \mathscr{M})$ des fonctions définient sur $\mathscr{M}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, généralisant en quelque sorte la notion de longeur, surface, ...

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1. *On appelle mesure (positive) sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$, la donnée d'une application $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Positive : $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}^+$ pour tout $A \in \mathscr{M}$.*
3. *σ-additive : Pour toute famille dénombrable $\{A_n; \quad n \geq 1\}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathscr{M}$, on a*

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Définition 3.1.2. *Si $(X, \mathscr{M})$ est un espace mesurable et μ une mesure donnée sur $(X, \mathscr{M})$, on dit que le triplet $(X, \mathscr{M}; \mu)$ est un espace mesuré.*

Définition 3.1.3. *Une mesure μ sur $(X, \mathscr{M})$ est dite finie si $\mu(X) < +\infty$.*

Remarque 3.1.4. *Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité :*

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k)$$

pour toute famille finie $\{A_k; k = 0, 1, \cdots, n\}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ deux à deux disjoints.

Remarque 3.1.5. *Dans la définiton précédente, la condition $\mu(\emptyset) = 0$ peut être remplacée par la condition :*

$$\text{Il existe } A \in \mathscr{M} \text{ tel que} \qquad \mu(A) < \infty.$$

En effet, d'une part on a bien $\mu(A) < +\infty$ pour $A = \emptyset \in \mathscr{M}$. D'autre part, si $\mu(A) < +\infty$ pour certain $A \in \mathscr{M}$, on a bien $\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$.

Remarque 3.1.6. *Il est intéressant de remarquer que pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance : Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ *et* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *une bijection, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}.$$

Remarque 3.1.7. *Dans la définition précédente, on a étendu à* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *l'addition dans* $\mathbb{R}^+$ *en posant* $x + (+\infty) = +\infty$*, pour tout* $x \in \overline{\mathbb{R}^+}$*. Il faut noter aussi que pour tout* $x; y; z \in \overline{\mathbb{R}^+}$*, l'équation* $x + y = x + z$ *n'implique* $y = z$ *que si* x *est fini.*

Remarque 3.1.8. *Noter également que la somme de la série est à prendre dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$ *et que, bien sûr,* $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *signifie simplement que* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \to a$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}^+}$*) quand* $n \to \infty$*. S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $a_{n_0} = +\infty$*, alors la série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Exemple 3.1.9 (Mesures triviaux)**.** *Soit* $(X, \mathscr{M})$ *un espace mesurable. On définit* μ_1 *et* μ_2 *sur* $\mathscr{M}$ *par*

$$\mu_1(A) = 0$$

pour tout $A \in \mathscr{M}$ *et*

$$\mu_2(A) := \begin{cases} +\infty, & \text{si } A \in \mathscr{M} \setminus \{\emptyset\}; \\ 0, & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

Alors μ_1 *et* μ_2 *sont des mesures sur* $(X, \mathscr{M})$*.*

Exemple 3.1.10 (Mesure de Dirac)**.** *Soit* $(X; \mathscr{M})$ *un espace mesurable et* $p \in X$*. On définit sur* $\mathscr{M}$ *l'application* $\delta_p : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *par*

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad A \not\ni p; \\ 1 & \text{si} \quad A \ni p \end{cases} \qquad =: \chi_A(p)$$

pour tout $A \in \mathscr{M}$*. Alors* δ_p *est une mesure finie de* X *dans* $\mathbb{R}$*, dite mesure de Dirac.*

Définition 3.1.11. *Une mesure* μ *sur* $(X, \mathscr{M})$ *est dite* σ*-finie si* X *admet un recouverement dénombrable par des éléments de* $\mathscr{M}$ *de mesures finies. Plus précisement, s'il existe* $(E_n)_{n\geq 1} \in \mathscr{M}$ *telle que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$$

et

$$\mu(E_n) < +\infty$$

pour tout $n \geq 1$*.*

Remarque 3.1.12. *Noter que dans cette définition, on ne suppose pas que les* E_n *doivent être forcément deux à deux disjoints.*

Exemple 3.1.13. *Toute mesure finie est* σ*-finie. L'implication inverse n'est pas vraie.*

Exemple 3.1.14 (Mesure de comptage ou dénombrement)**.** *On définit sur l'espace mesurable* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *l'application :*

$$\mu(A) := \begin{cases} Card(A) & \text{si} \quad A \text{ est une partie finie}; \\ +\infty & \text{sinon}. \end{cases}$$

Alors, il est facile de voir que μ *est une mesure sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$*. De plus, elle est* σ*-finie du fait que* $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} E_n$ *avec* $E_n = \{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $\mu(E_n) = Card(\{n\}) = 1 < +\infty$*.*

Remarque 3.1.15. *La mesure de comptage sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *est* σ*-finie mais n'est pas finie.*

3.2 Propriétès élémentaires des mesures positives

Proposition 3.2.1. *Toute mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$ satisfait les propriétés :*

(1) Monotonie : Si $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \subset B$, alors

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

En particulier, si de plus $\mu(A) < +\infty$, alors

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(2) Additivité forte : Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$, on a

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(3) σ-sous-additivité : Pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{M}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Preuve :

- Comme $A \subset B$, la partie B s'écrit sous la forme $B = A \cup (B \setminus A)$ avec A et $(B \setminus A)$ sont des parties mesurables et disjoints. Alors, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. La positivité de la mesure μ implique $\mu(A) \leq \mu(B)$.
  Maintenant, si de plus $\mu(A)$ est finie, on déduit alors que $\mu(B) - \mu(A) = [\mu(A) + \mu(B \setminus A)] - \mu(A)$, c'est-à-dire $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Noter que la monotonie peut se déduire aussi de l'additivité forte (2) en tenant compte du fait que $A \subset B$ et la positivité de la mesure μ.
- Les parties A et $(B \setminus A)$ sont mesurables et disjoints et on a $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Alors, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ et par suite

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B). \qquad (*)$$

  Maintenant, puisque

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

  avec $A \cap B$ et $(B \setminus A)$ des parties mesurables et disjoints, on obtient

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A). \qquad (**)$$

  En substituant $(**)$ dans le second membre de $(*)$, on arrive à

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

- Pour la σ-sous-additivité, soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{M}$ et considérons les parties $(B_n)_n$ définient par

$$B_0 = A_0 \quad \text{et} \quad B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

  - Les B_n sont des parties mesurables deux à deux disjoints.

– Les B_n vérifient $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
– On a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n$
Il en résulte alors que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

□

Théorème 3.2.2. *Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

1. *Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

2. *Si $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ avec $\mu(F_1) < +\infty$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(F_n).$$

Preuve : Pour la preuve de (1), on distingue deux cas :

Cas 1 : Il existe n_0 tel que $\mu(E_{n_0}) = +\infty$. Alors, d'après la croissance de la mesure μ, on obtient

$$+\infty = \mu(E_{n_0}) < \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$$

et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = +\infty.$$

D'autre part, comme la suite des réels $(\mu(E_n))_n$ est croissante et $\mu(E_n) = +\infty$ pour tout $n \geq n_0$, il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) = +\infty$. Enfin

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Cas 2 : $\mu(E_n)$ est finie pour tout n. Considèrons la famille de parties $(A_n)_n$ définie par : $A_1 = E_1$ et $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Par construction, on a $A_n \in \mathscr{M}$ pour tout $n \geq 1$. On note aussi que les A_n sont deux à deux disjoints. De plus, pour tout $n \geq 1$, on a $E_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, d'où $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Par suite

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)\right).$$

Comme $(E_n)_n$ est une suite croissante de parties mesurables de mesures finies, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\mu(A_n) = \mu(E_n \setminus E_{n-1}) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}).$$

Il en résulte

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{N} (\mu(E_n) - \mu(E_{n-1})) = \mu(A_1) + (\mu(E_N) - \mu(E_1)) = \mu(E_N).$$

Enfin,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{N \to +\infty} \mu(E_N).$$

Pour la preuve de (2), on a par hypothèse $\mu(F_1) < +\infty$, alors $\mu(F_n) < +\infty$ pour tout n, ceci est du à la croissance de la mesure μ et au fait que la suite des parties mesurables F_n est décroissante. Par conséquent, la famille $B_n = F_1 \setminus F_n$ est une suite croissante de parties mesurables de mesures

$$\mu(B_n) = \mu(F_1) - \mu(F_n).$$

En appliquant (1) à $(B_n)_n$, il s'ensuit que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to +\infty} (\mu(F_1) - \mu(F_n)) = \mu(F_1) - \lim_{n \to +\infty} \mu(F_n).$$

D'autre part, on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = F_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n,$$

d'où

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right).$$

On conclut alors que

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(F_n).$$

□

Remarque 3.2.3. *La condition $\mu(F_1) < +\infty$ est nécessaire. En effet, si on prend l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage et on considère les parties mesurables*

$$A_n := \{n, n+1, \cdots\},$$

on voit que $(A_n)_n$ est décroissante et $\bigcap_n A_n = \emptyset$. D'où $\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = 0$. Pourtant $\mu(A_n) = +\infty$ pour tout n.

Corollaire 3.2.4. *Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Alors μ est une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ si et seulement si*

1. *Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2. *Pour toute suite $(A_n)_n$ croissante d'éléments de $\mathscr{M}$, on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve :

- L'implication directe ($\Longrightarrow$) résulte de la définition de mesure et de (1) du théorème précédent.
- Pour l'implication inverse ($\Longleftarrow$), on a $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset\cup\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) = 0$. D'autre part, pour toute suite $(B_n)_n \subset \mathscr{M}$, on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\leq n} B_k\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Les parties $A_n := \bigcup_{k\leq n} B_k$ sont mesurables et forme une suite croissante d'éléments de $\mathscr{M}$. Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty}\mu\left(\bigcup_{k\leq n} B_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu(B_k).$$

□

Corollaire 3.2.5. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$. Alors μ est une mesure sur $(X,\mathscr{M})$ si et seulement si*

(1) Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A\cap B = \emptyset$, on a

$$\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) Pour toute suite $(A_n)_n$ décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ pour laquelle il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(A_n).$$

Preuve : Exercice. □

Proposition 3.2.6. *Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable.*

(1) Si $\mu,\nu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ sont deux mesures sur $(X,\mathscr{M})$ et $a > 0$, alors $\mu + a\nu$ est aussi une mesure sur $(X,\mathscr{M})$.

(2) Si $(\mu_n)_n$ est suite croissante de mesures sur $(X,\mathscr{M})$, alors l'application définie par $\mu(A) := \lim_{n\to+\infty}\mu_n(A)$ est aussi une mesure sur $(X,\mathscr{M})$.

(3) Si $(\mu_n)_n$ est suite de mesures sur $(X,\mathscr{M})$, alors l'application $\mu(A) := \sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n(A)$ est une mesure sur $(X,\mathscr{M})$.

Preuve :

- (1) est immédiate.
- (3) est une conséquence de (1) et (2) appliquée à la suite

$$\nu_n = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

- Pour la preuve de (2), on a applique le corollaire :
  - Soient $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\mu(A \cup B) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim_{n\to+\infty} (\mu_n(A) + \mu_n(B)) = \mu(A) + \mu(B).$$

  - Soit $(A_k)_k \subset \mathscr{M}$ une suite croissante. Alors,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) := \lim_{n\to+\infty} \left(\mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)\right) \overset{\text{Théorème 3.2.2}}{=} \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{k\to+\infty} \mu_n(A_k)\right).$$

  Par la croissance de μ_n, on a $\mu_n(A_k) \leq \mu(A_k)$ et donc

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

  D'autre part, on a

$$\mu(A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A_k) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k)\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k)\right).$$

□

3.3 Mesures importantes

On admet les théorèmes suivantes. Une démonstration pour chacune sera présentée plus tard (voir Chapitre 4 et TD). On considère l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Théorème 3.3.1. *Il existe une unique mesure λ sur $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda((a,b)) = b - a$, pour tout intervalle (a,b) non vide de $\mathbb{R}$.*

Définition 3.3.2. *La mesure ainsi donnée par le théorème précédent est appelée mesure de Lebesgue (ou encore mesure de Borel).*

Proposition 3.3.3. *La mesure de Lebesgue λ est une mesure σ-finie mais n'est pas finie et vérifie $\lambda(\{x\}) = 0\,;\, x \in \mathbb{R}$. Plus généralement les ensembles dénombrables sont de mesures nulles par la mesure de Lebesgue.*

Théorème 3.3.4. *Pour toute fonction croissante et continue, il existe une unique mesure λ_f définie sur $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda_f((a,b)) = f(b) - f(a)$, pour tout intervalle (a,b) non vide de $\mathbb{R}$.*

Définition 3.3.5. *La mesure λ_f est dite mesure de Borel-Stieltjes engendrée par f.*

3.4 Notions

Définition 3.4.1 (Partie négligeable)**.** *Soient $(X;\mathscr{M};\mu)$ un espace mesuré et $A \subset X$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \in \mathscr{M}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.*

Définition 3.4.2 (Mesure complète)**.** *Soit $(X;\mathscr{M};\mu)$ un espace mesuré, on dit que μ est complète (ou que $(X;\mathscr{M};\mu)$ est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à $\mathscr{M}$.*

Définition 3.4.3. *Soit $(X,\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée μ presque partout sur X, et note P μ-p.p, s'il existe une partie mesurable N de mesure nulle telle que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \neq N$.*

3.5 Exercices supplémentaires et devoir à rendre

Exercice 1 Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $\mu : \mathscr{M} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^{+}$. Alors μ est une mesure sur $(X,\mathscr{M})$ si et seulement si

1. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Pour toute suite $(A_n)_n$ décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ pour laquelle il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a
$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Exercice 2 (Devoir à rendre) Soit $(X,\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. On considère $B = \{f \neq 0\}$ et $A_n = \{|f| \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) \neq 0$.
2. Vérifier que $B \in \mathscr{M}$.
3. On suppose que $\mu(B) \neq 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant $\mu(A) \neq 0$ et $|f(x)| \geq \varepsilon$ pour tout $x \in A$. *[Indication : Considérer les ensembles $B_n = \{|f| > 1/n\}$].*

Exercice 3 Soit $(X;\mathscr{M})$ un espace mesurable et m ; μ deux mesures sur $\mathscr{M}$. Soit $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$. On suppose que $\mathscr{C}$ engendre $\mathscr{M}$ et que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie. On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{C}$.

1. On suppose que $X \in \mathscr{C}$ et que $m(X) < +\infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{M}$. [On pourra introduire $\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{M}; \quad m(A) = \mu(A)\}$.]
2. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}$ telle que $A_j \cap A_k = \emptyset$; si $j \neq k$, $m(A_j) < 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{M}$.
3. Avec $(X;\mathscr{M}) = (\mathbb{R};\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple pour lequel $X \in \mathscr{C}$ et $m \neq \mu$.