



Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

THÉORIE DES MESURES ET INTÉGRATION

M28-SMA5 - CHAPITRE 4 :

MESURE DE LEBESGUE

ALLAL GHANMI

(2016 - 2017)

Mesure de Lebesgue

Il s'agit de prouver l'existence d'une mesure sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ de sorte que la mesure d'un intervalle soit égale à sa longueur.

4.1 Un théorème de prolongement

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un ensemble non vide X (i.e. contenant X , et stable par complémentation et réunion finie).

- Les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$ sont dits ensembles élémentaires de $(X, \mathcal{A})$.
- Une fonction élémentaire sur $(X, \mathcal{A})$ est toute combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles élémentaires de $(X, \mathcal{A})$.
- Une mesure sur $\mathcal{A}$ est la donnée d'une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et

$$\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

pour toute collection $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et vérifiant $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

- Une mesure μ sur $\mathcal{A}$ est dite σ -finie, s'il existe $(E_n)_n \subset \mathcal{A}$ telle que

$$X = \bigcup_n E_n \quad \text{et} \quad \mu(E_n) < +\infty \text{ pour tout } n.$$

Théorème 4.1.1 (Théorème de prolongement de Caratheodory). *Toute mesure σ -finie sur une algèbre $\mathcal{A}$ se prolonge de manière unique en une mesure σ -finie sur $\sigma(\mathcal{A})$, la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.*

Preuve : A admettre.

Un bref aperçu sur la preuve :

Unicité : Soient $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ deux mesures sur $\sigma(\mathcal{A})$ telles que $\tilde{\mu}_1|_{\mathcal{A}} = \tilde{\mu}_2|_{\mathcal{A}}$ et montrons que $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ sur $\sigma(\mathcal{A})$. Ceci est équivalent à

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \{A \in \sigma(\mathcal{A}); \tilde{\mu}_1(A) = \tilde{\mu}_2(A)\} = \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Il est clair que $\mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ puisque $\widetilde{\mu}_1(A) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \widetilde{\mu}_2(A)$ pour toute $A \in \mathcal{A}$. De plus $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu (à vérifier).

Existence : On se sert de l'application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par

$$\mu^*(A) = \inf_{\left\{ \begin{array}{l} (A_n)_n \subset \mathcal{A} \\ \cup_n A_n \supset A \end{array} \right\}} \left\{ \sum_n \mu(A_n) \right\}.$$

Alors, μ^* vérifie

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. μ^* est monotone : Si $A, B \subset X$ avec $A \subset B$, alors tout recouvrement de B par des parties dans $\mathcal{A}$ est aussi un recouvrement de A .
3. μ^* est σ -sous additive : Soit $(A_n) \subset \mathcal{P}(X)$ et montrons que

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Par la propriété caractéristique de l'inf, pour tout n fixé et tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(A_k^n)_k \subset \mathcal{A}$ vérifiant

$$A_n \subset \bigcup_k A_k^n$$

et

$$\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_k \mu(A_k^n).$$

D'autre part

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \left(\bigcup_k A_k^n \right); \quad A_k^n \in \mathcal{A}.$$

Alors par la définition de μ^* , on a

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) &\leq \sum_{n,k} \mu(A_k^n) \\ &\leq \sum_{n,k} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &\leq \left(\sum_n \mu^*(A_n) \right) + \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Définition 4.1.2. Toute application $\phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant 1), 2) et 3) est dite mesure extérieure.

Suite de la preuve du théorème : L'application μ^* vérifie aussi $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$ (i.e., μ^* prolonge μ). En effet, pour $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu^*(A) = \inf_{\left\{ \begin{array}{l} (A_n)_n \subset \mathcal{A} \\ \cup_n A_n \supset A \end{array} \right\}} \left\{ \sum_n \mu(A_n) \right\} \leq \sum_n \mu(A_n),$$

pour toute $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$; $A \subset \bigcup_n A_n$, et en particulier pour $(A_n)_n$ telle que $A_0 = A$ et $A_n = \emptyset$; $n \geq 1$. Alors,

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Pour $A \in \mathcal{A}$ quelconque, soit $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ avec $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(\bigcup_n (A \cap A_n)\right) && (\text{car } A = \bigcup_n (A \cap A_n)) \\ &\leq \sum_n \mu(A \cap A_n) && (\mu \text{ est } \sigma\text{-sous-additive sur } \mathcal{A} \text{ et } A \cap A_n \in \mathcal{A}; \forall n) \\ &\leq \sum_n \mu(A_n) && (\text{par monotonie de la mesure } \mu). \end{aligned}$$

Alors

$$\mu(A) \leq \inf_{\left\{ \begin{array}{l} (A_n)_n \subset \mathcal{A} \\ \bigcup_n A_n \supset A \end{array} \right\}} \left\{ \sum_n \mu(A_n) \right\} = \mu^*(A).$$

Question : Peut-on construire une tribu $\mathcal{M}$ sur X vérifiant

$$\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$$

et sur laquelle μ^* est une mesure ?

Tribu des parties μ^* -mesurables :

Définition 4.1.3. Une partie $A \subset X$ est dite μ^* -mesurable si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Exercice : Soit $\mathcal{M} = \{A \subset X; A \text{ est } \mu^*\text{-mesurable}\}$

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
3. Montrer que μ^* est σ -additive sur $\mathcal{M}$.

□

4.2 Mesure de Borel et mesure de Lebesgue

Définition 4.2.1 (Ensembles négligeables). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $F \subset X$ est dite μ -négligeable, s'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $F \subset A$ et $\mu(A) = 0$. On note l'ensemble des parties μ -négligeables par $\mathcal{N}_\mu$.

Proposition 4.2.2. $\mathcal{N}_\mu$ est stable par union au plus dénombrable.

Preuve : Soit $(F_n)_n \subset \mathcal{N}_\mu$. Alors pour tout n , il existe $A_n \in \mathcal{M}$ tel que $F_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) = 0$. Par suite, on a

$$\bigcup_n F_n \subset \bigcup_n A_n \text{ avec } \bigcup_n A_n \in \mathcal{M} \text{ et } \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = 0,$$

puisque

$$\mu\left(\bigcup_n F_n\right) \leq \sum_n \mu(F_n) = 0.$$

□

Définition 4.2.3 (Tribu complète). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. La tribu $\mathcal{M}$ est dite complète pour la mesure μ si toute μ -négligeable est mesurable, i.e., $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{M}$.

Remarques 4.2.4.

1. L'adjonction de $\mathcal{N}_\mu$ à $\mathcal{M}$ élargit la tribu $\mathcal{M}$. $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu$ est stable par toute réunion dénombrable.
2. L'application $\tilde{\mu}$ définie sur $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu$ par $\tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ est σ -additive.
3. $\tilde{\mu}$ est une mesure sur l'algèbre engendrée par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_\mu$ et elle est σ -finie si μ l'est.

En appliquant le théorème de prolongement, on obtient le résultat suivant

Théorème 4.2.5. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré de mesure σ -finie. Alors, il existe une et une seule mesure sur la tribu engendrée par $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu)$ prolongeant $\tilde{\mu}$ et donc μ .

Définition 4.2.6. $\mathcal{M}^* = \sigma(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}_\mu)$ est dite tribu complète et $\tilde{\mu}$ est dite la mesure complétée de μ .

Remarque 4.2.7. $\mathcal{M}^*$ est complète pour $\tilde{\mu}$ par construction.

On désigne par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et on note

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_{n=1}^N I_n, I_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Alors, $\mathcal{U}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ et on a $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}$.

Considérons l'application $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie sur $\mathcal{U}$ par

$$\lambda\left(\bigcup_n I_n\right) = \sum_n l(I_n),$$

où

$$l(I_n) = |I_n| \quad (\text{longueur de } I_n) = \begin{cases} +\infty; & \text{si } I_n \text{ n'est pas borné,} \\ b_n - a_n; & \text{si } I_n = (a_n, b_n) \text{ est borné.} \end{cases}$$

Alors, λ est une mesure sur $\mathcal{U}$ (voir TD). De plus λ est σ -fini sur $\mathcal{U}$, puisque

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[\text{ avec } \mu(]-n, n[) = 2n < +\infty.$$

En appliquant le théorème de prolongement, il existe $\tilde{\lambda} : \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ tel que $\tilde{\lambda}$ est σ -finie et $\tilde{\lambda}(I) = \lambda(I) = |I_n|$ pour tout $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

Définition 4.2.8. $\tilde{\lambda}$ qu'on note encore λ est dite mesure de Borel sur $\mathcal{B}$.

Définition 4.2.9. Le prolongement de λ à la tribu complète de $\mathcal{B}$ est dite mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et elle est notée encore λ .

Proposition 4.2.10. *On a les propriétés suivantes :*

1. λ est invariant par translation.
2. Si μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariante par translation et si $\mu(I) < +\infty$ pour tout $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ borné, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mu = \alpha\lambda$.

Preuve : Notons que

$$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma([\alpha, \beta]) \iff a + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

De plus l'application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $\mu(B) = \lambda(a + B)$ est une mesure σ -finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\mu|_{\mathcal{U}} = \lambda|_{\mathcal{U}}$ où $\mathcal{U}$ est l'algèbre engendré par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. L'unicité dans le théorème de prolongement montre que $\mu = \lambda$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\lambda(B) = \mu(B) = \lambda(a + B)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Soit $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(B + a) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$. Comme $\mu(I) < +\infty$ pour tout intervalle borné $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, on peut poser $c = \mu(0, 1) \in \mathbb{R}^+$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mu((0, 1)) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad (\text{invariance par translation}) \\ &= n \mu\left(0, \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors,

$$\mu((a, b)) = \mu((0, b - a) + a) = \mu((0, b - a)) = \mu((0, \beta))$$

avec $\beta = b - a \in \mathbb{Q}$. On écrit $\beta = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$. Par suite

$$\mu((0, \beta)) = \mu\left(\bigsqcup_{\text{disjoint}} \left[\frac{k\beta}{n}, \frac{(k+1)\beta}{n}\right]\right) = n \mu\left(\left(0, \frac{\beta}{n}\right)\right).$$

Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier pour $n = p$, on obtient

$$\mu((0, \beta)) = p \mu\left(\left(0, \frac{p/q}{p}\right)\right) = p \mu\left(\left(0, \frac{1}{q}\right)\right) = \frac{p}{q} \mu((0, 1)) = \beta \mu((0, 1)) = \beta c.$$

Donc $\mu((a, b)) = (b - a)c$, pour tout $a, b \in \mathbb{Q}$. Pour conclure, il suffit de noter que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((a, b)), a, b \in \mathbb{Q}$. $\square$