Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Théorie des mesures et Intégration

M28-SMA5 - Chapitre 6 :

Tribus produit, Mesures produit et théorèmes de Fubini

Allal GHANMI

(2016 - 2017)

Chapitre 6

Tribus produit, Mesures produit et théorèmes de Fubini

6.1 Tribu Produit

Définition 6.1.1. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit de $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ la tribu sur $X \times Y$ engendrée par $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. On l'a note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Exemple 6.1.2. *Pour $X = Y = \mathbb{R}$, tous les deux muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.*

Preuve : Exercice. □

Remarque 6.1.3. *La preuve s'adapte facilement au cas de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 6.1.4. *Soit $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Soit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Alors pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a*

$$E_x = \{y \in Y;\ (x,y) \in E\} \in \mathcal{B}$$

et

$$E^y = \{x \in X;\ (x,y) \in E\} \in \mathcal{A}.$$

Preuve : On montre que

$$\Omega = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B};\ E_x \in \mathcal{B},\ E^y \in \mathcal{A} \text{ pour tout } x \in X, y \in Y\}$$

est une tribu sur $X \times Y$ telle que $\Omega \supset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, et donc $\Omega = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

On utilise principalement les faits suivants :

– Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & si\, x \in A \\ \emptyset & si\, x \notin A \end{cases} \quad \text{et} \quad (A \times B)^y = \begin{cases} A & si\, y \in B \\ \emptyset & si\, y \notin B \end{cases}.$$

– Pour toute $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a

$$(E^c)_x = (E_x)^c \quad \text{et} \quad (E^c)^y = (E^y)^c.$$

– Pour toute $(E_n)_n \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, on a

$$\left(\bigcup_n E_n\right)_x = \bigcup_n (E_n)_x \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_n E_n\right)^y = \bigcup_n (E_n)^y.$$

□

6.2 Fonctions mesurables sur la tribu produit

Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. On définit les applications partielles f_x et f^y pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, par

$$\begin{aligned} f_x : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f_x(y) := f(x,y) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} f^y : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^y(x) := f(x,y) \end{aligned}.$$

Proposition 6.2.1. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. Si f est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable, alors f_x et f^y sont mesurables, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$.*

Preuve : On utilise principalement les faits que :

$$f_x^{-1}(D) = \left(f^{-1}(D)\right)_x \quad \text{et} \quad (f^y)^{-1}(D) = \left(f^{-1}(D)\right)^y.$$

□

Remarque 6.2.2. *La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par contre on a le résultat suivant qui donne la réciproque dans un cas particulier.*

Proposition 6.2.3. *Soient $(X;\mathcal{A})$ et $(Y;\mathcal{B})$ deux espaces mesurables et f une fonction définie sur $X \times Y$. Soient f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable sur X et g une fonction $\mathcal{B}$-mesurable sur Y. Alors, la fonction $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable sur $X \times Y$.*

Preuve : La preuve peut se faire en 3 étapes :

1. Pour $f = \chi_A$ et $g = \chi_B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$: On a

$$f(x)g(y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B} \in \mathfrak{M}(X \times Y; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

2. En explicitant le produit $f(x)g(y)$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions étagées sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, on établit le résultat pour cette classe de fonctions.
3. On étend le résultat obtenu pour $\mathcal{E}$ à la classe $\mathfrak{M}$ sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ par le théorème d'approximation.

□

6.3 Mesure produit

Théorème 6.3.1 (A admettre). *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés de mesures (positives) σ-finies, et $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Alors*

1. *Les applications $x \longmapsto \nu(E_x)$ sur X et $y \longmapsto \mu(E^y)$ sur Y sont mesurables.*
2. *On a*
$$\int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y).$$

Proposition 6.3.2. *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Alors*

1. *L'application*
$$E \longmapsto \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)d\nu(y)$$
est une mesure sur la tribu produit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. On la note $\mu\otimes\nu$ et on l'appelle mesure produit des mesures (σ-finies) μ et ν.
2. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a*
$$\mu\otimes\nu(A\times B) = \mu(A)\times\nu(B).$$
3. *$\mu\otimes\nu$ est σ-finie.*

Preuve :

1. Soit $(E_n)_n \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Alors
$$\begin{aligned}\mu\otimes\nu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int_Y \mu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)^y\right)d\nu(y)\\ &= \int_Y \mu\left(\bigcup_n (E_n^y)\right)d\nu(y)\\ &= \int_Y \sum_n \mu\left(E_n^y\right)d\nu(y) \quad (\mu \text{ mesure})\\ &= \sum_n \int_Y \mu\left(E_n^y\right)d\nu(y) \quad (\text{TCM})\\ &= \sum_n \mu\otimes\nu(E_n).\end{aligned}$$
2. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on a
$$\begin{aligned}\mu\otimes\nu\,(A\times B) &= \int_Y \mu\left((A\times B)^y\right)d\nu(y)\\ &= \int_B \mu\left((A\times B)^y\right)d\nu(y) + \int_{Y\setminus B}\mu\left((A\times B)^y\right)d\nu(y)\\ &= \int_B \mu(A)d\nu(y) + \int_{Y\setminus B}\mu(\emptyset)d\nu(y)\\ &= \mu(A)\int_B d\nu(y)\\ &= \mu(A)\nu(B).\end{aligned}$$

3. Comme les mesures μ et ν sont σ-finies, il existe une partition $(A_m)_m$ de X constituée de parties $\mathcal{A}$-mesurables deux à deux disjoints et une partition $(B_n)_n$ de Y formée de parties $\mathcal{A}$-mesurables deux à deux disjoints telles que $\mu(A_m) < +\infty$ et $\nu(B_n) < +\infty$ pour tout m, n. Alors les $A_m \times B_n$ sont des parties $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $X \times Y$. On a
$$\mu \otimes \nu\,(A_m \times B_n) = \mu(A_m)\nu(B_n) < +\infty.$$
De plus les $A_m \times B_n$ forment une partition de $X \times Y$. En effet
$$\bigcup_{m,n}(A_m \times B_n) = \left(\bigcup_n A_m\right) \times \left(\bigcup_n B_n\right) = X \times Y.$$
On conclut alors que $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

□

Remarque 6.3.3. *La mesure produit $\mu \otimes \nu$ n'est pas forcément complète si μ et ν sont complètes. En effet, considérons $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $B \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{B}$, en supposant que $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)$. On a bien $A \times B \subset A \times Y$ avec $A \times Y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et $\mu \otimes \nu(A \times Y) = \mu(A) \times \nu(Y) = 0$. Pourtant, $A \times B \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, car sinon*
$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & si\, x \in A \\ \emptyset & si\, x \notin A \end{cases} \in \mathcal{B}$$
pour tout $x \in X$. Absurde.

Remarque 6.3.4. *$\mu \otimes \nu$ est l'unique mesure sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ vérifiant $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $\nu(B) < +\infty$.*

6.4 Théorèmes de Fubini

Théorème 6.4.1 (Fubini-Tonelli). *Soient $(X; \mathcal{A}; \mu)$ et $(Y; \mathcal{B}; \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable positive. Alors, les applications*
$$F_*(f) : x \longmapsto \int_Y f_x(y) d\nu(y) =: F_x(f)$$
sur X et
$$F^*(f) : y \longmapsto \int f^y(x)\mu(x) =: F^y(f)$$
sur Y sont mesurables positives, et on a
$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Preuve : La preuve peut se faire en 3 étapes :

1. Pour $f = \chi_E$ avec $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$: Pour $x \in X$ fixé, on a $\chi_E(x,y) = 1$ si, et seulement si $(x,y) \in E$, i.e., $y \in \{y \in Y, (x,y) \in E\} =: E_x$. Il en résulte alors que
$$\int_Y \chi_E(x,y)d\nu(y) = \int_{E_x} d\nu(y) = \nu(E_x).$$
Or, d'après le théorème admis, la fonction $x \longmapsto \nu(E_x)$ est mesurable pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ fixé. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)d(\mu\otimes\nu) = d(\mu\otimes\nu)(E)&\\ &= \int_Y \mu(E^y)d\nu(y) \quad \left(\text{ou encore } = \int_X \nu(E_x)d\mu(x)\right)\\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) \quad (\text{d'après } (*))\end{aligned}$$
2. On prolonge ensuite le résultat par linéarité à la classe $\mathcal{E}^+$ des fonctions étagées positives sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.
3. On prolonge le résultat obtenu pour $\mathcal{E}^+$ par le TCM à la classe $\mathfrak{M}^+$ sur $(X \times Y, E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

□

Corollaire 6.4.2. *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable. Alors*
$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B};\mu\otimes\nu) \iff \int\left(\int |f|d\mu\right)d\nu < +\infty \iff \int\left(\int |f|d\nu\right)d\mu < +\infty. \tag{$\bigstar$}$$

Preuve : Le corollaire découle immédiatement du théorème de Fubini-Tonelli. □

Théorème 6.4.3 (Fubini)**.** *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B};\mu\otimes\nu)$. Alors, on a*
1. *$f_x \in \mathcal{L}^1(Y,\mathcal{B};\nu)$ μ-p.p. et $f^y \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A}\ \mu)$ ν-p.p..*
2. *$F_*(f) : x \longmapsto \int_Y f_x(y)d\nu(y) = F_x(f)$ est μ-p.p. définie et $F^*(f) : y \longmapsto \int f^y(x)\mu(x) = F^y(f)$ est ν-p.p. définie.*
3. *$\int f = \int_X F_x(f)d\mu(x) = \int_Y F^y(f)d\nu(y)$, soit encore*
$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y).$$

Preuve : Comme $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B};\mu\otimes\nu)$, alors f est $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable. On écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique le théorème de Fubini-Tonelli à f^+ et f^-. □

Corollaire 6.4.4. *Soient $(X;\mathcal{A};\mu)$ et $(Y;\mathcal{B};\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable telle que*
$$\int\left(\int |f|d\mu\right)d\nu < +\infty$$

ou

$$\int \left(\int |f| d\nu \right) d\mu < +\infty.$$

Alors

$$\int \left(\int f d\mu \right) d\nu = \int \left(\int |f| d\nu \right) d\mu.$$

Preuve : Le corollaire découle immédiatement du théorème de Fubini et de l'équivalence ($\bigstar$). $\square$

Exercice : On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0;\ x \leq y < 2x \\ -\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0;\ 2x \leq y < 3x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right) dy.$$

6.5 Changement de variables

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V est la donnée d'une application $\psi : U \longrightarrow V$ bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et telle que ψ^{-1} soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Une caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes est donnée par la proposition suivante

Proposition 6.5.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$ si, et seulement si ψ vérifie les asserestions suivantes :*

1. *ψ bijective de U sur $V = \psi(U)$.*
2. *ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*
3. *Le déterminant la matrice jacobienne $J(\psi)$ de ψ est non nulle sur U ; $J(\psi) \neq 0$.*

Théorème 6.5.2 (Changement de variables). *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. Pour toute fonction borélienne positive (resp. $f \in \mathcal{L}^1$), on a*

1. *$(f \circ \psi)|\det(J(\psi)(u)|\chi_U$ est borélienne positive (resp. $f \in \mathcal{L}^1$).*
2. *et*

$$\int_V f(v) d\lambda(v) = \int_U f(\psi(u))|\det(J(\psi)(u))| d\lambda(u)$$

soit aussi

$$\int_U f(\psi(u)) d\lambda(u) = \int_V f(v)|\det(J^{-1}(\psi)(u))| d\lambda(v).$$