Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2016-2017
SMA 5 - M28
Mesures et Intégration

Série 1 - Tribus

Exercice 1 (Tribu trace (induite)): Soit X un ensemble non vide et $C \subset X$.

(1) Soit $\mathscr{M}$ une tribu sur X. Montrer que $\mathscr{M}_C := \{A \cap C; A \in \mathscr{M}\}$ est une tribu sur C.

(2) On suppose que X est un espace topologique et que $\mathscr{M}$ est la tribu borélienne de X, $\mathscr{M} = \mathfrak{B}(X)$. Montrer que la tribu trace $\mathscr{M}_C$ de $\mathscr{M} = \mathfrak{B}(X)$ sur C est la tribu borélienne $\mathfrak{B}(C)$ de C.

Exercice 2 *(Tribus images).*

Soient X et Y des ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

(1) Montrer que si $\mathscr{M}'$ est une tribu sur Y, alors $f^{-1}(\mathscr{M}') = \left\{f^{-1}(B); B \in \mathscr{M}'\right\}$ est une tribu sur X. (Tribu image réciproque)

(2) Que dire de l'image d'une σ-algèbre sur X?

(3) Montrer que si $\mathscr{M}$ est une tribu sur X, alors $\mathscr{M}' = \left\{B \subset Y; f^{-1}(B) \in \mathscr{M}\right\}$ est une tribu sur Y. (Tribu image directe)

Exercice 3 Soit X un ensemble infini et $\mathscr{S} = \{\{x\}\,; x \in X\}$. Déterminer la tribu engendrée par $\mathscr{S}$ (distinguer les cas X dénombrable et non dénombrable).

Exercice 4 Soit X un ensemble et f une application de X dans lui-même. Montrer que l'ensemble des parties A de X telles que $f^{-1}(f(A)) = A$ est une tribu sur X.

Exercice 5 Soit f une bijection d'un ensemble X. Montrer que l'ensemble des parties A de X possédant la propriété $x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in A$ et $f^{-1}(x) \in A$ est une tribu sur X.

Exercice 6 Soit X un ensemble et A un sous-ensemble de X. Trouver la tribu engendrée par $\mathscr{C} = \{B \subset X; A \subset B\}$. Donner des conditions suffisantes pour que $\sigma(\mathscr{C})$ soit $\mathcal{P}(X)$ ou la tribu grossière.

Exercice 7 *(Lemme de transport):* Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Montrer que pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de Y on a:

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Exercice 8 *(Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}_+}$):* Montrer que

$$\sigma(\{[0;\beta[;\beta \in \mathbb{R}_+^*\}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{[0;\beta[;\beta \in \mathbb{Q}_+^*\}).$$

Exercice 9 *(Tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$):* On note $\mathscr{M}$ la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B; A; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. L'objectif est de montrer que $\mathscr{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(1) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathscr{M}$.

(2) Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1 = \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$. Montrer que $\mathscr{M}_1$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathscr{M}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(3) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_2 = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \quad A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$. Montrer que $\mathscr{M}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que $\mathscr{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Conclure.