Série 3 - Mesures positives

Exercice 1 Soit X un ensemble infini non dénombrable. On définit sur $\mathcal{P}(X)$ l'application $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 2 Soient $(X; \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(Y, \mathscr{M}')$ un espace mesurable. Soit f une application $(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$-mesurable. Montrer que l'application définie par $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $(Y, \mathscr{M}')$.

Exercice 3 Soient $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{A}$ une tribu sur X incluse dans $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}_F$ la tribu trace de $F \subset X$.

(1) Montrer que la restriction de μ à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si μ est finie (resp. σ-finie)?

(2) Vérifier que $\mathscr{M}_F \subset \mathscr{M}$ si et seulement si $F \in \mathscr{M}$. Montrer dans ce cas que la restriction de μ à $\mathscr{M}_F$ est une mesure sur $\mathscr{M}_F$. Cette mesure est-elle finie?

Exercice 4 Soit $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré fini, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathscr{M}$ avec $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu(A_n) - \mu(B_n)\right).$$

Exercice 5 Soit $(X; \mathscr{M}; \mu)$ un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \mu(X)$. Montrer que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(X)$.

Exercice 6 Soient $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$. Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ sous l'hypothèse que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Exercice 7 Soit $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(X)$, et m et μ deux mesures sur l'espace mesurable $(X; \mathscr{M} = \sigma(\mathscr{C}))$. On suppose que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie et que que $m = \mu$ sur $\mathscr{C}$.

(1) Montrer que si $X \in \mathscr{C}$ et que $m(X) < +\infty$, alors $m = \mu$ sur $\mathscr{M}$.

(2) Donner un exemple pour lequel $X \in \mathscr{C}$ et $m \neq \mu$.

Exercice 8 Soient μ une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On définit la fonction ψ par $\psi(x) := \mu([x, +\infty[)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que ψ est décroissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$. Calculer les limites de ψ en $\pm\infty$.

(2) Montrer que ψ est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

(3) En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable. *On admettra que l'ensemble de points de discontinuité d'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.*

Exercice 9 (Devoir à rendre) Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. On considère $B = \{f \neq 0\}$ et $A_n = \{|f| \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) \neq 0$.

(2) Vérifier que $B \in \mathscr{M}$.

(3) On suppose que $\mu(B) \neq 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant $\mu(A) \neq 0$ et $|f(x)| \geq \varepsilon$ pour tout $x \in A$. *[Indication: Considérer les ensembles $B_n = \{|f| > 1/n\}$].*