Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2015-2016
SMA 5 - M28
Mesures et Intégration

Série 4 - Mesure de Lebesgue

Exercice 1 On désigne par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et considèrons la fonction λ définie sur la classe $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ à valeurs dans la demi-droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}^+$ par $\lambda(I) := |I|$ où $|I|$ est la longueur de l'intervalle I.

(1) Montrer que λ est additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. En déduire que pour toute famille finie d'intervalles $(I_k)_{k=1}^N$ deux à deux disjoints telle que $\bigcup_{k=1}^N I_k \subset I$ avec $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda(I_k) \leq \lambda(I).$$

(2) Montrer que pour tout compact $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et toute recouverement finie $(O_k)_{k=1}^N \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$ de K par des ouverts de $\mathbb{R}$, on a

$$\lambda(K) \leq \sum_{k=1}^{N} \lambda(O_k).$$

(3) Montrer que pour tout intervalle borné I_n et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $O_n \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tel que

$$I_n \subset O_n \quad \text{et} \quad \lambda(O_n) \leq \lambda(I_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

(4) Montrer que si $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ borné I et $\varepsilon > 0$, alors il existe un compact $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tel que

$$K \subset I \quad \text{et} \quad \lambda(K) \geq \lambda(I) - \varepsilon.$$

(5) Soit $(I_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ tels que $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Montrer que

$$\lambda(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

En déduire que λ est σ-sous additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

(6) Montrer que λ est σ-additive sur $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

On désigne par $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{I}(\mathbb{R})$.

(7) Montrer que toute ensemble élémentaire $E \in \mathcal{U}(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme

$$E = \bigcup_{j=1}^{N} I_j,$$

où les $I_j \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ et sont deux à deux disjoints.

(8) Montrer que λ se prolonge à une application bien définie sur $\mathcal{U}(\mathbb{R})$.

(9) Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{U}(\mathbb{R})$ deux à deux disjoints. Montrer que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

Exercice 2 On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'un ouvert O de $\mathbb{R}$ de mesure finie n'est pas forcément borné.

(2) Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé?

Exercice 3 Soit m une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(I) = m(I + x)$ avec $m([0;1]) = 1$

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $m(\{x\}) = 0$ (i.e. m est diffuse).

(2) En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.