

Série 5a - Fonctions intégrables

Exercice 1 (Lemme fondamentale):

Soit (φ_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ et $\psi \in \mathcal{E}^+$ telles que $\lim_n \varphi_n \geq \psi$.

(1) Soit $0 < \alpha < 1$ et considérons la suite

$$A_n^\alpha := \left\{ x \in X; \varphi_n(x) \geq \alpha\psi(x) \right\} = (\varphi_n - \alpha\psi)^{-1}([0, +\infty[).$$

Vérifier que $(A_n^\alpha)_n$ est croissante dans $\mathcal{M}$ et que $\bigcup_n A_n^\alpha = X$.

(2) On considère la suite $\alpha\psi\chi_{A_n}$. Vérifier que

(a) $(\alpha\psi\chi_{A_n})_n$ est croissante dans $\mathcal{E}^+$,

(b) $(\alpha\psi\chi_{A_n})_n \rightarrow \alpha\psi$,

(c) $\alpha\psi\chi_{A_n} \leq \varphi_n$ sur X .

En déduire que

$$\int \alpha\psi\chi_{A_n} d\mu \leq \int \varphi_n d\mu.$$

(3) En écrivant ψ sous la forme $\psi = \sum_{j=1}^N \beta_j \chi_{B_j}$, montrer que

$$\alpha \int \psi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \varphi_n d\mu.$$

En déduire que

$$\lim_n \int \varphi_n d\mu \geq \int \psi.$$

(4) Faire une conclusion.

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{M}^+(X)$ et considérons l'ensemble $\mathfrak{F}_f := \left\{ \psi; \psi \in \mathcal{E}^+, \psi \leq f \right\}$.

(1) Montrer que

$$\sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu \leq \int f d\mu.$$

(2) Soit φ_n est une suite croissante dans $\mathcal{E}^+$ convergeant vers f . Montrer que

$$\sup_{\psi \in \mathfrak{F}_{\varphi_n}} \int \psi d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

(3) Vérifier que

$$\sup_{\psi \in \mathfrak{F}_{\varphi_n}} \int \psi d\mu$$

est atteint en $\psi = \varphi_n$.

(4) Déduire que

$$\int f d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathfrak{F}_f} \int \psi d\mu.$$

(5) Conclure.

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{M}^+$ et $t \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$