Université Mohammed V, Rabat
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

2016-2017
SMA 5 - M28
Mesures et Intégration

Série 5b
Théorème de convergence monotone - Lemme de Fatou

Exercice 1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables d'un espace mesuré $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable vérifiant

$$\int_X |f - \chi_{A_n}| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(1) Montrer qu'on a $|f| \leq 2$ μ-p.p. et déduire que $|f + \chi_{A_n}| \leq 3$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$.
(2) Montrer que

$$\int |f - f^2| d\mu \leq 4 \int |f - \chi_{A_n}| d\mu$$

pour tout $n \geq 1$. En déduire l'existence de $A \in \mathfrak{X}$ tel que $f = \chi_A$ μ-p.p.

Exercice 2. Soient $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ un espace mesuré et f un fonction intégrable.
(1) Montrer que

$$\int_X |f| \chi_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) En déduire que (la continuité de l'intégrale par rapport à la mesure):

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall A \in \mathfrak{X}, \quad \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. On définit pour tout $n \geq 1$, $g_n(x) = f(x^n)$. Calculer la limite de $\int_{]0,1[} g_n d\lambda$.

Exercice 4. Soient $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
(1) Montrer que $\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.
(2) Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Exercice 5. Soient $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ un espace mesuré, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_X |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu = \int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n \Big) d\mu.$$

Exercice 6. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose qu'il existe f intégrable telle que

$$\int_E |f_n - f| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ convergeant vers f μ-p.p., et une fonction h intégrable telle que $\sup_{n\geq 1} |f_{\phi(n)}| \leq h$ μ-p.p.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que

$$\int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0.$$