Notes de Cours
Analyse 3
SMA-Semestre 2 - 2015-2016

Pr. Hanaa Benazzouz[1], Pr. Saïd El Hajji[2]
Pr. Touria Ghemires[2]
Département de mathématiques
Faculté des sciences de Rabat.

Plan du cours

Chapitre 1: Formules de Taylor et applications
1 Rappel du théorème des accroissements finis
2 Dérivées d'ordre n,
3 Formule de Taylor à l'ordre n
4 Extremum local
5 Fonctions convexes
Chapitre 2: Développements limités et applications
1 Comparaison des fonctions
2 Développements limités
3 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
4 Opérations sur les développements limités
5Calcul des D.L
6 Géneralisation des développements limités
7 Applications des DL
Chapitre 3: Courbes paramétrées et applications
1 Fonctions vectorielles à variable réelle.
2 Limites, dérivée d'une fonction vectorielle, tangente en un point.
3 Etude Locale
4 Branches infinies
5 Construction de courbes planes paramétrées
6 Construction de courbes planes en coordonnées polaires

[1] *Laboratoire d'Analyse et Applications*
[2] *Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications*

Chapitre 1

Formules de Taylor et applications

Etant donné une fonction $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, le théorème des accroissements finis permet d'avoir une approximation de f par une fonction affine. Nous allons voir que les fonctions plusieurs fois dérivables peuvent être approchées par des polynômes.

1 Rappel du théorème des accroissements finis:

Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$

On rappelle les **définitions** des dérivées de f:

▶ f est dérivable en $x_0 \in]a, b[$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie ($f'(x_0)$).

▶ f est dérivable à droite de a si $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie (notée $f'_d(a)$).

▶ f est dérivable à gauche de b si $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ existe et est finie (notée $f'_g(b)$).

▶ f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$.

Remarque:

On dit aussi que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si

f est dérivable sur $]a, b[$, f est dérivable à droite de a et f est dérivable à gauche de b.

On rappelle aussi les **propriétés** suivantes:

▶ f est dérivable en $x_0 \in]a, b[\Longrightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

▶ f est dérivable en $x_0 \in]a, b[\Longrightarrow f$ est continue en x_0

▶ f est dérivable sur $]a, b[\Longrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$

Théorème 1

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$$

Remarque:

1) On a aussi pour tout $x \in I$ et $x + h \in I$, $\exists c$ compris entre x et $x + h$ tel que:

$$f(x + h) = f(x) + h.f'(c)$$

2) Une autre façon d'écrire cette relation: pour tout $x \in I$ et $x + h \in I$,

$\exists \theta \in]0, 1[$ tel que $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$.

2 Dérivées d'ordre n

Définition:

On dit qu'une fonction f est 2 fois continûment dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (ou de classe $\mathcal{C}^2$ sur I) si f est 2 fois dérivable et sa dérivée seconde f'' est continue.

Rappels:

f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \Longrightarrow f, f'$ et f'' sont continues.

On dit qu'une fonction f est n fois continûment dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (ou de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) si f est n fois dérivable et sa dérivée $f^{(n)}$ est continue.

Remarques:

1) Par convention, f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue.

2) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés:

1) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I alors f, f',.....,$f^{(n)}$ existent et sont continues.

2) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et λ une constante alors $f + g$, $\lambda.f$ et $f.g$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Si en plus la fonction g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

3) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

De plus on a:

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
$$(\lambda.f)^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$$

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}.g^{(n-p)}$$

Exemples
Les fonctions polynômiales, exp, sin et cos.sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$sur $\mathbb{R}$.
La fonction ln est $\mathcal{C}^{\infty}$sur $]0,+\infty[$.

3 Formule de Taylor à l'ordre n (n ≥ 1)

Cas d'un polynôme:
Soit P_n un polynôme à coefficients réels, de degré n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Pour x_0 et $x \in \mathbb{R}$, il est facile de vérifier que le polynôme P_n peut être écrit sous la forme:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{P\ _n''(x_0)}{2!} + ... + (x - x_0)^n \frac{P_n{}^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Théorème 2
Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n (n \in \mathbb{N})$ et qui admet une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que:

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + (b - a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + .. + (b - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (b - a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$$

Démonstration
On pose $P_n(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + ... + (x - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$
on a alors $P_n(a) = f(a)$, $P\ '_n(a) = f\ '(a), ..., \ P_n^{(n)}(a) = f\ ^{(n)}(a)$
Par suite la fonction $f - P_n$ est nulle, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n pour $x = a$.
Il en est de même pour la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x) + \alpha(x - a)^{n+1},$$

quelque soit la constante α.
Si on prend $\alpha = \frac{P_n(b) - f(b)}{(b-a)^{n+1}}$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\varphi^{(n+1)}$existe sur $]a, b[$.
De plus $\varphi(a) = \varphi'(a) = ... = \varphi^{(n)}(a) = \varphi(b) = 0$
On applique le théorème de Rolle à φ :

$\exists c_1 \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

On applique le théorème de Rolle à φ' :

$\exists c_2 \in]a, c_1[$ tel que $\varphi''(c_1) = 0$.

On continue ainsi jusqu'à l'ordre n :

$\varphi^{(n)}(a) = 0$ et $\exists c_n \in]a, b[$, $\varphi^{(n)}(c_n) = 0$
$\Longrightarrow \exists c \in]a, b[, \ \varphi^{(n+1)}(c) = 0$.

Or $\varphi^{(n+1)}(x) = f\ ^{(n+1)}(x) + \alpha(n + 1)!$
Il en résulte que $f^{(n+1)}(c) + \alpha(n + 1)! = 0$, ce qui donne $\alpha = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$
On remplace dans $\varphi(x) = f(x) - P_n(x) + \alpha(x - a)^{n+1}$
On obtient alors $\varphi(b) = f(b) - P_n(b) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1} = 0$

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$$

Remarque:
Si on remplace dans la formule de Taylor b par $a + x$, on obtient

$$\boxed{f(a + x) = f(a) + xf'(a) + x^2 \frac{f\ ''(a)}{2!} + ... + x^n \frac{f\ ^{(n)}(a)}{n!} + x^{n+1} \frac{f\ ^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},}$$

avec c compris entr a et $a + x$
(c dépend de a et x)
cette formule s'écrit aussi sous la forme

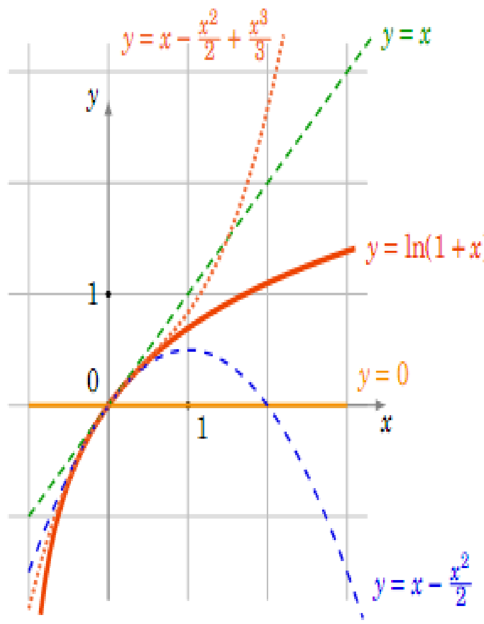
$$\boxed{f(a + x) = f(a) + xf'(a) + x^2 \frac{f''(a)}{2!} + ... + x^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(a+\theta x)}{(n+1)!},}$$

avec $\theta \in]0, 1[$ (θ dépend de a et x).

Corollaire:
Si en plus la fonction $|f^{(n+)}|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $a, x \in I$, on a

$$\boxed{|f(x) - P_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

avec $P_n(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + ... + (x - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$



3.1 Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n ($\mathbf{n} \geq 1$)

Théorème 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I ($n \in \mathbb{N}$) alors pour tout a et $x \in I$.

$$\boxed{f\ (x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + .. + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^x \frac{f^{\ (n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}$$

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre n ($\mathbf{n} \geq 1$)

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + ... + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n\varepsilon(x-a),}$$
$$\boxed{\text{avec } \varepsilon(x-a) \to 0 \text{ lorsque } x \to a}$$

3.3 Formule de Taylor-Young en a=0

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $0 \in I$, alors

$$\boxed{f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + ... + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n\varepsilon(x),}$$
$$\boxed{\text{avec } \varepsilon(x) \to 0 \text{ lorsque } x \to 0}$$

3.4 Exemples et applications

1) $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x),$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

2) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x);$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x4}{4!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x),$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

4) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x),$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha.x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x),$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

6) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x),$
avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

7) $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - .... - \frac{1}{n}x^n + x^n\varepsilon(x),$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$

8) Calcul approché:

Utiliser la formule de Taylor avec $n = 2$, pour approcher

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}, \text{ pour } x > -1$$

On a $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$; $f'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$

Pour tout $x > -1$ on a: il existe c entre 0 et x tel que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \frac{x^3}{3!}f'''(c) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3(1+c)^{-\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Pour $x = 0.3$

$$1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 = 1.09$$

$$0 < \frac{5}{81}x^3(1+c)^{-\frac{8}{3}} \leq \frac{5}{81}.(\frac{3}{10})^3$$

Donc $\sqrt[3]{1,03} \sim 1.09$ avec une erreur $\leq \frac{5}{81}(\frac{3}{10})^3 = 1.666\,7 \times 10^{-3}$

$$\boxed{\sqrt[3]{1,03} \sim 1.09 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

9) Montrer l'inégalité: $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq |\cos x|$ pour tout x dans $\mathbb{R}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe c compris entre 0 et x tel que

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\sin c}{6}x^3$$

Si $0 \leq x \leq \pi$ alors $0 \leq c \leq \pi$ et on a

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{\sin c}{6}x^3 \geq 0 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$$

Si $-\pi \leq x \leq 0$ alors $-\pi \leq c \leq 0$ et on a

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{\sin c}{6}x^3 \geq 0 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$$

Donc pour $|x| \leq \pi$, $|\cos x| \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$

Pour $|x| > \pi$, on a $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 < \cos x$, ce qui donne

$$\boxed{1 - \frac{1}{2}x^2 \leq |\cos x| \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}}$$

4 Extremum local

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Définition

x_0 est un point critique de f , si f n'est pas dérivable en x_0 ou bien si$f\,'(x_0) = 0$.

Dans le cas où f est dérivable sur $[a, b]$, alors on a

(1) $x_0 \in]a, b[$ est un point critique de f si $f\,'(x_0) = 0$.

(2) a est un point critique de f si $f\,'_d(a) = 0$.

(3) b est un point critique de f si $f\,'_g(b) = 0$.

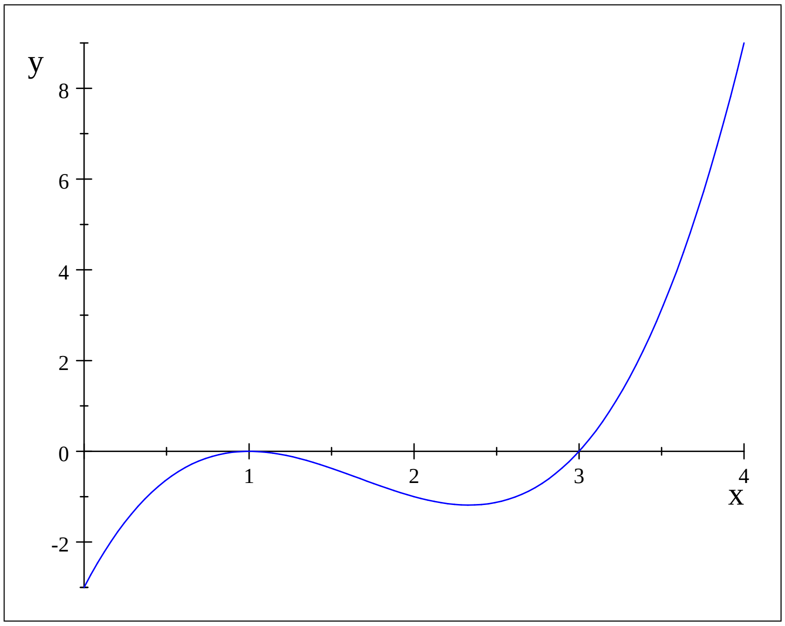
Définition

(1) On dit que f a un **maximum local** $f(x_0)$ en $x = x_0$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que pour tout x dans $I \cap [a, b]$, $f(x) \leq f(x_0)$.

(2) On dit que f a un **minimum local** $f(x_0)$ en $x = x_0$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que pour tout x dans $I \cap [a, b]$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple

On définit la fonction $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, pour $x \in [0, 4]$. Voici son graphe:



quels sont les extrema de f?

Théorème 4

Supposons que f est dérivable au point $x_0 \in]a,b[$.

Si f a un maximum ou un minimum local en x_0, alors $f\ '(x_0) = 0$.

Démonstration

Supposons que $f\ '(x_0) \neq 0$

Si $f\ '(x_0) > 0$, on a $0 < f\ '(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\Longrightarrow \exists r > 0$ tel que pour $|h| < r$, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$

Donc $0 < h < r \Longrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ et $-r < h < 0 \Longrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) < 0$.

De manière analogue on traite le cas où $f\ '(x_0) < 0$.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse:

en effet, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et f n'a ni un minimum ni un maximum en 0.

Théorème 4

Soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n (n \in \mathbb{N})$ sur $]a,b[$.

Soit $x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, alors

(i) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, f a un minimum local en x_0

(ii) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, a un maximum local en x_0

(iii) Si n est impair, f n'a ni un min ni un max local en x_0

Démonstration

On applique la formule de Taylor autour de x_0, pour $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ avec } c \text{ entre } x \text{ et } x_0$$

Comme $f\ ^{(n)}(x_0) \neq 0$ et $f\ ^{(n)}$ est continue, il existe $\varepsilon > 0$, tel que

$f\ ^{(n)}(x)$ a le même signe que $f^{(n)}(x_0)$, $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= V$,

et dans ce cas $c \in V$ et $f^{(n)}(c)$ a le même signe que $f^{(n)}(x_0)$...

5 Fonctions convexes

Définition

Une fonction $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t).f(x_1) + tf(x_2)$$

Théorème 5

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Alors

f est convexe sur $]a,b[$ si et seulement si $f\ ''(x) \geq 0$, $\forall x \in]a,b[$

Démonstration

Condition nécessaire:

On montre d'abord que $f\ ''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$, $\forall x \in]a,b[$

Comme $x = \frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)$ et comme f est convexe sur $]a,b[$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h)$$

$$\Longrightarrow f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0 \Longrightarrow f''(x) \geq 0$$

Condition suffisante:

Soit $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ avec $t \in [0,1]$

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2$$

$$\Longrightarrow (1-t).f(x_1) + tf(x_2) = f(x_0) + f\ '(x_0)((1-t)x_1 + tx_2 - x_0)$$
$$+ \frac{1-t}{2}f\ ''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2$$

On a donc $(1-t).f(x_1) + tf(x_2) = f(x_0) + R$

avec $R = \frac{1-t}{2}f\ ''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{t}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \geq 0$

et alors $(1-t).f(x_1) + tf(x_2) \geq f(x_0)$.