Chapitre 2

Développements limités et applications

1 Comparaison des fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques définies dans $V(x_0) \setminus \{ x_0\}$, avec.$V(x_0) =]x_0 - r, x_0 + r[$ et $r > 0$.

1.1 Fonctions équivalentes

Définition:

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe une fonction h définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = g(x)h(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} h(x) = 1$$

On écrit alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou tout simplement $f \sim g$.

Remarque: Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemples

1) $\sin x \underset{0}{\sim} x$

2) $\tan x \underset{0}{\sim} x$

3) $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

1.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition:

1) On dit que f est négligeable devant g, au point x_0, s'il existe une fonction ε définie dans $V(x_0) \setminus \{ x_0\}$ telle que:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

2) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de l'infini s'il existe une fonction ε définie au voisinage de l'infini telle que:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ avec } \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$$

1.3 Notation Landau:

Si f est négligeable devant g, au voisinage de x_0,on note $f = \circ(g)$,

et on dit que f est un petit o de g.

Remarques

1) *Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 on a*

$$f = \circ(g) \text{ au } vois(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2) De plus $f \underset{x_0}{\sim} g \Longleftrightarrow f - g = \circ(g)$, au $vois(x_0)$.

Exemples:

1) $x^\alpha = \circ(x^\beta)$ au $vois(0)$, si $\alpha > \beta$

2) $x^\alpha = \circ(x^\beta)$ au $vois(\infty)$, si $\alpha < \beta$

2 Développements limités

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur $V(x_0) \setminus \{x_0\}$

On dit que f possède un D.L d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

tel que

$$f(x) - P_n(x) = \circ((x - x_0)^n)$$

c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0),$$

avec $\varepsilon(x - x_0) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to x_0$

$P_n(x)$ est appelé partie entière ou régulière du D.L de $f(x)$.

$(x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0)$ est appelé reste du D.L de f.

Remarques

1) *Le développement limité est une notion locale, c'est-à-dire que le DL de f* n'a d'intérêt que pour $x \in Vois(x_0)$.

2) *Pour simplifier, on calcule le D.L de $f(x)$ en 0. Pour obtenir un D.L en x_0, il suffit de remlacer x* par $(x - x_0)$.

3) *Pour obtenir un D.L au voisinage de* l'infini*, on se ramène au calcul du DL en* 0*, en posant* $X = \frac{1}{x}$.

Théorème 1 : Unicité du développement limité

Si f admet un D.L d'ordre n en 0 alors il est unique.

i.e; si $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$ alors $P_n(x)$ est unique.

Remarque : L'unicité est à prendre dans les sens que la partie polynômiale du DL d"ordre n au voisinage de 0 *est unique.*

Théorème 2 : Développements limités des fonctions paires et impaires.

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 et qui admet le D.L

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

En posant $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, on peut écrire que

$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$

i) si f est paire alors la fonction polynômiale P_n est paire, ce qui implique que:

$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$

ii) si f est impaire alors la fonction polynômiale P_n est impaire, ce qui implique:

$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$.

3 Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

On rappelle le **théorème de Taylor-Young:**

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant 0 et que $f^{(n+1)}$ est bornée au voisinage de 0, alors f admet un développement de Taylor:

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

qu'on peut écrire aussi

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \circ(x^n)$

Donc la fonction f admet un développement limité au voisinage de 0:

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \circ(x^n)$, avec $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, \cdots, n$

Remarque

Il existe des fonctions qui ont un DL d'ordre n et qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^n$.

Par exemple:

$$f(x) = \begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $f(x) = x^2[x\sin(\frac{1}{x})]$ avec $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$

donc f admet pour D.L en 0, d'ordre 2: $f(x) = 0 + \circ(x^2)$,

alors que f'' n'existe pas.en 0.

4 Opérations sur les développements limités

4.1 Somme

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + \circ((x - x_0)^n) \\ g(x) = Q_n(x) + \circ((x - x_0)^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + \circ((x - x_0)^n)$$

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n et m, respectivement, au voisinage de x_0, alors $f + g$ admet un développement limité à l'ordre min(m,n), obtenu en faisant la somme des développements limités de f et g.

Dans le calcul de la partie principale du DL, on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple:

Si $f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + \circ(x^4)$ et $g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4)$

alors $f(x) + g(x) = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{10} + \circ(x^4)$

4.2 Produit

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + \circ((x-x_0)^n) \\ f(x) = Q_n(x) + \circ((x-x_0)^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \times g(x) = (P_n(x) \times Q_n(x)) + \circ((x-x_0)^n)$$

Si f et g admettent un développement limité, au voisinage de x_0, respectivement à l'ordre n et m, alors $f.g$ admet un développement limité à l'ordre min(m,n) obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g.

Dans le calcul de la partie principale du DL, on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à min(m,n).

Exemple:

$f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + \circ(x^4)$ et $g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4)$

alors $f(x) \times g(x) = -4 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{9}x^3 - \frac{4}{45}x^4 + \circ(x^4)$

4.3 Quotient

Si $f(x) = P_n(x) + \circ((x-x_0)^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + \circ((x-x_0)^n)$ avec $g(x_0) \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + \circ((x-x_0)^n) \\ g(x) = Q_n(x) + \circ((x-x_0)^n) \text{ et } g(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + \circ((x-x_0)^n) = S_n(x) + \circ((x-x_0)^n)$$

Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n.au voisinage de x_0.

Pour déterminer la partie principale S_n de $\frac{f}{g}$, on fait la division de P_n par Q_n, suivant les puissances croissantes de x, à l'ordre n.

Remarques *:*

1) Si g admet un D.L d'ordre n, en 0 et que $g(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ admet un D.L d'ordre n en 0.

2) Pour calculer le D.L d'ordre n de $\frac{f}{g}$, Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n puis de faire le produit par celui de f et ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

3) Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut opérer de manière analogue, mais on obtient un développement dit développement limité ***généralisé****.*

Exemples:

1) Si $f(x) = -2 + 3x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4)$ et $g(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + \circ(x^4)$

alors $g(0) \neq 0$ et on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -1 + 2x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{36}x^3 - \frac{67}{360}x^4 + \circ(x^4)$$

2) D.L de $\cos(x)$ d'ordre 4, en 0 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$$

D.L de $\frac{1}{\cos(x)}$ d'ordre 4, en 0:

On a $\cos(0) = 1 \neq 0$ $\frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \circ(x^4)$

Comme $\frac{1}{\cos(x)}$ est paire $\Longrightarrow a_1 = a_3 = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \circ(x^4)$

$$\cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1 \Longleftrightarrow (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)) \times (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \circ(x^4)) = 1$$

$$\Longrightarrow a_0 + (-\frac{a_0}{2} + a_2)x^2 + (\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} + a_4)x^4 + \circ(x^4) = 1$$

En identifiant les coefficients, on obtient:

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ -\frac{a_0}{2} + a_2 = 0 \\ \frac{a_0}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_0 = 1 \\ -a_2 = \frac{1}{2} \\ a_4 = \frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24} \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \circ(x^4)$$

4.4 Composition :

Soit f est une fonction définie au voisinage de 0 qui admet un développement limité d'ordre n.

Soit g une fonction définie au voisinage de 0, telle que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et qui admet un développement limité d'ordre n en 0,

alors $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, La technique à utiliser est de remplacer tous les termes en x de la partie principale du DL en 0 de f par la partie principale de g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n), \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \circ(x^n)$$

On remarque que $b_0 = 0$ car $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et alors $f \circ g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (g(x))^k + \circ(x^n)$

et chacune des fonctions $(g(x))^k$ possède un D.L. d'ordre n.

4.5 Exemples

1) Une autre manière de développer $\frac{1}{f(x)}$ lorsque $f(0) \neq 0$

$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)} = [1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)]^{-1} = (1+X)^{-1}$

Comme $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4) \to 0$, lorsque $x \to 0$, on peut utiliser le DL :

$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}X^n + \circ(X^n)$, avec $\alpha = -1$

$(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 + \circ(X^4)$

$\frac{1}{\cos(x)} = [1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4))]^{-1}$

On ne garde dans la partie principale que les monômes de degré≤ 4.

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + \circ(x^4)$$
$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - (\frac{1}{24} - \frac{1}{4})x^4 + \circ(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \circ(x^4)$$

2) Calculer le DL d'ordre 3 de $f(x) = e^{\sin(x)}$ en 0.

3) Calculer le DL d'ordre 2 de $h(x) = e^{\cos(x)}$ en 0.

5 Calcul des D.L

5.1 Développement limité des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ(x^{2p+1})$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ(x^{2p})$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \circ(x^{2p+1})$$
$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \circ(x^{2p+2})$$

Propriétés du DL

Si f admet un développement de Taylor-Young d'ordre n, au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \circ(x^n)$$

alors sa dérivée admet DL d'ordre $n-1$

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \circ(x^{n-1})$$

Le polynôme principal de f' est la dérivée du polynôme principal de f.

c'est–dire

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \text{ et } f' \text{ existe} \Longrightarrow f'(x) = P'_n(x) + \circ(x^{n-1}).$$

5.2 Exemples

1) Développement limité de $f(x) = \arctan(x)$ à l'ordre 5, au voisinage de 0:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + \circ(x^4)$$

$\Longrightarrow f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \circ(x^5)$

2) $(Arc\sin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \circ(x^6)$

$\Longrightarrow Arc\sin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \circ(x^7)$

3) Développement limité de $f(x) = x\cot(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0:

On a $f(x) = \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} \Longrightarrow f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + \circ(x^5)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5)}$

$x\cot(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45}x^4 + \circ(x^5)$

6 Géneralisation des développements limités

6.1 Développements Limités au voisinage de l'infini:

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini c'est à dire f définie sur $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, B[$ avec $A > 0$ et $B < 0$.

Définition :

On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de l'infini si elle est de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})$$

Remarque :

Si f admet un D.L en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini, alors f admet une limite finie lorsque $x \to \infty$.

Les D.L au voisinage de l'infini sont utilisés pour l'étude des branches infinies des courbes.

6.2 Développements Limités géneralisés:

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut être en 0, telle que $x^p f(x)$ possède un D.L au voisinage de 0

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n)$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \cdots + a_n x^{n-p} + \circ(x^{n-p})$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de 0.

Exemples

1) $x\cot(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45}x^4 - \circ(x^5) \Longrightarrow \cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \circ(x^4)$

2) Le *développement limité* ***généralisé****. pour calculer le DL de $\frac{f}{g}$, dans le cas où $g(0) = 0$:*

Si $f(x) = 1 + x + x^3 + \circ(x^3) = P_3(x) + \circ(x^3)$,

et $g(x) = 2x + 3x^3 + \circ(x^3) = 2x(1 + \frac{3}{2}x^2) + \circ(x^3) = 2x[Q_2(x) + \circ(x^2)]$

alors $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2x} \times \frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = \frac{1}{2x}(1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \circ(x^2)) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \circ(x)$

7 Applications des DL

7.1 Calcul de limites

Remarques

(i) Si f admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de 0, $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$, alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = P_n(0).$$

(ii) En géneral les DL sont obtenus à partir des DL usuels au voisinage de 0 *et des théorèmes de bases sur les DL.*

1) Soit $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

On a $\ln(f(x)) = \ln((1 + \frac{1}{x})^x) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \circ(\frac{1}{x})$$

d'où $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}(1 + \circ(1)) = 1$

et alors $\lim_{x\to+\infty} f(x). = e$

2) Calculer $\mathop{lim}_{x\to 0} \ln(\frac{\sin(x)}{x})$

Calculer le D.L à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$

On trouve: $\ln(\frac{\sin(x)}{x}) = -\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)$

ce qui va donner $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\frac{\sin(x)}{x}) = 0$

3) Soit $f(x) = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)})$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

On pose $t = x - 1$ de telle sorte que $t \underset{x\to 1}{\to} 0$.

On a $f(x) = \frac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)}$.

Comme $\ln(1+t) - t = -\frac{t^2}{2} + \circ(t^2)$,

on obtient $\frac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)} = \frac{-\frac{t^2}{2}+\circ(t^2)}{t^2+\circ(t^2)}$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-t}{t\ln(1+t)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.

4) Soit $f(x) = \frac{\sin(x)-\tan(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))}$, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

En utilisant le D.L

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)$.

on trouve $f(x) = \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \frac{-\frac{1}{2}x^3+\circ(x^3)}{\frac{x^3}{2}+\circ(x^3)} = -1 + \circ(x^3)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

7.2 Application à l'étude des fonctions

Asymptote:

Une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $(\mathcal{C})$ admette une asymptote, à l'infini, est que l'on puisse trouver a et b tels que

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Ce qui est équivalent à $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$

<u>**Exemple**</u> Pour $f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1}$.

Pour avoir le D.L au voisinage de l'infini on fait le changement de variable $x = \frac{1}{X}$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{X}{|X|}(1+2X)\sqrt{1-X^2} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)}{x} = (1+2X)\sqrt{1-X^2} \text{ si } X > 0 \\ \frac{f(x)}{x} = -(1+2X)\sqrt{1-X^2} \text{ si } X < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{1-X^2} = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \circ(X^2) \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 + 2X - \frac{1}{2}X^2 + \circ(X^2) \text{ si } X > 0 \\ -1 - 2X - \frac{1}{2}X^2 + \circ(X^2) \text{ si } X < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 2 - \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}) \text{ si } x > 0 \\ -x - 2 - \frac{1}{2x} + \circ(\frac{1}{x}) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

<u>Au voisinage de $+\infty$,</u>

la droite $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe de f et la courbe est située en dessous de l'asymptote, puisque la différence

$f(x) - x - 2$ est du signe de $-\frac{1}{2x}$.

<u>Au voisinage de $-\infty$,</u>

la droite $y = -x - 2$ est une asymptote à la courbe de f et la courbe est située au dessus de l'asymptote, puisque la différence

$f(x) + x + 2$ a le même signe que $-\frac{1}{2x}$.

Direction asymptotique :

Si f admet un D.L au voisinage de l'infini de la forme

$f(x) = ax + b + x\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$

le coefficient directeur de l'asymptote oblique est $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une direction asymptotique est

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$$

Branche parabolique :

La courbe admet une branche parabolique lorsque

$\frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie a, lorsque $x \to \infty$ et $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie, lorsque $x \to \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \infty$$

On dit que la courbe admet une branche parabolique dans la direction de coefficient a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

Exemple

Pour $f(x) = \sqrt{x}$ on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

mais

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 0 \times x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

On a une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.