Chapitre 3

COURBES PARAMETREES PLANES ET APPLICATIONS

Une courbe est définie
→explicitement par des équations de la forme $y = f(x)$ ou $x = g(y)$
→par une équation implicite $F(x, y) = 0$.
→par un paramétrage:
$f : t \in I \to (x, y) = (x(t), y(t)) = f(t)$,(avec $I \subset \mathbb{R}$)

Exemples:
1) $x = 3 - t$, $y = t^2 - 2$, $t \in \mathbb{R}$, c'est une parabole.
2) $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$, c'est le cercle centré en 0 et de rayon 2.

Dans toute la suite:
→on se place dans P, le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
→ce plan est alors identifié à $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples de réels formé des coordonnées cartésiennes.
→pour tout $M \in P$, on pose $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et on note $M = (x, y)$.

1 Fonctions vectorielles à variable réelle.

I est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définition:
Une courbe paramétrée plane est une application

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to f(t) = (x(t), y(t)).$$

Ainsi une courbe paramétrée est une application qui à un réel t, appelé, le paramètre, associe un point du plan $M(t)$.

C'est aussi l'ensemble des positions prises par un point $M \in P$, dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre t:

$$M(t) = (x(t), y(t)).$$

Remarque:
Si ce paramètre t est le temps, il s'agit alors de la trajectoire du point M.
On pose $\Gamma = \{M = (x, y) \in P;\ x = x(t) \text{ et } y = y(t) \text{ où } t \text{ décrit } I\}$.
La courbe Γ est paramétrée par la fonction vectorielle à variable réelle:

$$f : t \in I \to f(t) = (x(t), y(t)),$$

les deux fonctions x et y sont à valeurs réelles et définies sur I.
On a alors

$$f(I) = \Gamma$$

$$\text{pour tout } t \in I \text{,et tout } M \in \Gamma,\ \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$$

On dit alors que Γ est décrite par les équations :

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ pour } t \in I.$$

Exemples:
1) La droite:
Si la représentation d'une courbe Γ, dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

alors Γ est la partie de la droite de vecteur directeur (α, β) passant par le point $A(a, b)$, correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I.

Si $I = \mathbb{R}$, alors Γ est une **droite** d'équation. $y = cx + d$.

2) Le cercle:

Si la représentation d'une courbe Γ, dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(t) \\ y(t) = r\sin(t) \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

alors Γ est la partie du cercle de centre O et de rayon r. correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I.

Si

$\rightarrow$Si $I = [0, 2\pi]$, alors Γ est le cercle de centre O et de rayon r.

$\rightarrow$Si $I = [0, \pi]$, t décrit $[0, \pi]$, x décrit $[-r, r]$ et y décrit $[0, r]$ i.e. Γ est le demi-cercle "positif" de centre O et de rayon r.

Remarque:

1) Dans les exemples 1) et 2) ci-dessus, on a pu éliminer le paramètre t entre x et y, et obtenir une relation ente x et y :

$$F(x, y) = 0.$$

Ce n'est pas toujours le cas:

Pour déterminer la courbe paramétrée Γ, dont la représentation, dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2-1} \end{cases} \quad \text{pour } t \in]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

une étude est nécessaire.

2) Si la courbe Γ est paramétrée par $f(t), t \in I$ et si $\varphi : I \rightarrow J$ est une bijection continue, alors Γ est aussi paramétrée par $f \circ \varphi(s), s \in J$.

3) Si F est une fonction continue de $I \rightarrow \mathbb{R}$, alors son graphe est la courbe paramétrée par $f : t \rightarrow (t, F(t))$ avec $t \in I$.

2 Limite, Dérivée, vecteur vitesse et tangente

Définition

Soit une courbe paramétrée $f : t \in I \rightarrow f(t) = (x(t), y(t))$ et $t_0 \in I$, alors:

1) $\underset{t \rightarrow t_0}{lim} f(t) = (\alpha, \beta)$ si et seulement si $\underset{t \rightarrow t_0}{lim} x(t) = \alpha$ et $\underset{t \rightarrow t_0}{lim} y(t) = \beta$

2) La courbe est continue en t_0 si et seulement si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont continues en t_0.

2) La courbe est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en t_0. Dans ce cas le vecteur dérivé de la courbe en t_0 est le vecteur $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Remarque:

Si le paramètre t est le temps, alors $x(t)$ et $y(t))$ sont les coordonnées d'un point mobile $M(t)$.

Si $t \neq t_0$, la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et t_0 est donnée par le vecteur

$$\frac{1}{t-t_0} \overrightarrow{M(t)M(t_0)}$$

qui a pour coordonnées

$$\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)$$

dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Lorsque $t \rightarrow t_0$, $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} \rightarrow x'(t_0)$ et $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \rightarrow y'(t_0)$

Définition:

Le vecteur $\overrightarrow{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = f'(t_0)$ est appelé aussi **le vecteur vitesse** de $M(t)$ à l'instant $t = t_0$.

2.1 Tangente en un point régulier

Soit $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ avec $t_o \in I$ et tel que x et y soient dérivables au point t_o.

Définition: Le point $M(t_0)$ est dit **régulier** si

$$f\ '(t_o) = (x'(t_o), y'(t_o)) \neq (0, 0)$$

Lorsque $\overrightarrow{v}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, la droite passant par le point $M(t_0)$, de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(t_0)$ et paramétrée par:

$$\begin{cases} x_T(s) = x(t_0) + (s - t_0)x'(t_0) \\ y_T(s) = y(t_0) + (s - t_0)y'(t_0) \end{cases}$$

est appelée **la tangente à** la courbe paramétrée, au point $M(t_0)$, à l'instant t_0.

Une équation cartésienne de la tangente à Γ, à l'instant t_0:

$$\boxed{(X - x(t_0))y\ '(t_0) - (Y - y(t_0)x\ '(t_0) = 0}$$

(les inconnues sont X et Y).

Cette droite passe par $M(t_0)$ et elle est parallèle à $\overrightarrow{v}(t_0)$.

2.2 Tangente en un point stationnaire

Soit $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ avec $t_o \in I$ et tel que x et y soient dérivables au point t_o.

Définition: Le point $M(t_o)$ est dit **stationnaire** si

$$f\ '(t_o) = (x'(t_o), y'(t_o)) = (0, 0)$$

Si $\overrightarrow{v}(t_0) = \overrightarrow{0}$, on considère

p =le plus petit entier tel que:

$$(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq \overrightarrow{0},$$

alors lorsque $t \to t_0$, $\frac{1}{(t-t_0)^p}\overrightarrow{M(t)M(t_0)}$ admet pour limite:

$$f^{(p)}(t_0)$$

$= (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$

On dit aussi que la courbe admet pour tangente, au point $M(t_0)$, la droite d'équation:

$$\boxed{(X - x(t_0))y^{(p)}(t_0) - (Y - y(t_0)x^{(p)}(t_0) = 0}$$

qui passe par $M(t_0)$ et qui est parallèle à $f^{(p)}(t_0)$.

La pente de la tangente à Γ, est donnée par: $\gamma(t_o) = \frac{y^{(p)}(t_o)}{x^{(p)}(t_o)}$

2.3 Etude locale

2.3.1 Points multiples:

On dit qu'un point A de la courbe paramétrée Γ est double s'il existe t_1 et $t_2 \in I$ distincts tels que: $M(t_1) = M(t_2) = A$.

La recherche de ces points s'effectue en résolvant le système

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \text{pour } t_1, t_2 \in I,\ t_1 < t_2.$$

De même on définit **la multiplicité d'un point** A, de la courbe paramétrée Γ: c'est le nombre de réels $t \in I$, pour lesquels $A = M(t)$.

Exemple: La courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases} \text{pour } t \in \mathbb{R}^*,$$

a un point double de coordonnées $(1, -5)$

Exemple: point simple, double et triple:

2.3.2 Point bi-régulier

Définition:

Si $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ admettent des dérivées secondes en t_o, on dit que $M(t_0)$ est dit **bi-régulier** si $\{f\ '(t_0), f\ ''(t_0)\}$ sont linéairement indépendants.

c'est dire $\begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y^{'}(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\prime(t_o)y"(t_o) - x"(t_o)y\prime(t_o) \neq 0}$

Dans ce cas:

$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f\ '(t_0) + \frac{(t-t_0)2}{2!}f''(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t - t_0)$

Dans ce cas, $M(t_0)$ est point d'allure ordinaire:

2.3.3 Position de la courbe par rapport à sa tangente $M(t_0)$.

On suppose que $t \to x(t)$ et $t \to y(t)$ admettent des dérivées d'ordre n, en t_o. $(n \geq q, p)$

Soit p le plus petit entier tel que:

$$(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq \overrightarrow{0},$$

Soit q le plus petit entier supérieur à p tel que:

$\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{vmatrix} x^{(p)}(t_0) & x^{(q)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) & y^{(q)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

La formule de Taylor-Young, d'ordre q, autour de t_0:
$x(t) = x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}x^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon_1(t-t_0)$
$y(t) = y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}y^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon_2(t-t_0)$
avec $\varepsilon_1(t-t_0) \to 0$ et $\varepsilon_2(t-t_0) \to 0$ lorsque $t \to t_0$.
Donc pour $p+1 \leq n \leq q-1$, $\exists \lambda_n$ tel que$f^{(n)}(t_0) = \lambda_n f^{(p)}(t_0)$,
$f(t) - f(t_0) =$

$$[\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1}\frac{(t-t_0)}{(p+1)!} + .. + \lambda_{q-1}\frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!}](t-t_0)^p f^{(p)}(t_0)$$
$$+\frac{(t-t_0)^q}{q!}f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon(t-t_0)$$

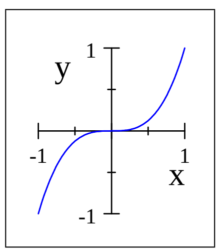
$f(t) - f(t_0) = X_1(t)f^{(p)}(t_0) + Y_1(t)f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\varepsilon(t-t_0)$
avec

$\varepsilon(t-t_0) \to (0,0)$, lorsque $t \to t_0$,
$\boxed{x_1(t) = [\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1}\frac{(t-t_0)}{(p+1)!} + .. + \lambda_{q-1}\frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!}](t-t_0)^p}$
et $\boxed{y_1(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!}}$

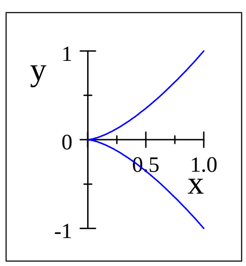
Donc $(x_1(t), y_1(t)) \simeq$ les coordonnées de $f(t) - f(t_0)$ dans la base $\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\}$, lorsque $t \to t_0$.

1er cas : p **impair et** q **pair,** alors $M(t_0) \in \Gamma$ est dit **ordinaire**:

2ème cas: p **impair et** q **impair,**
alors $M(t_0)$ est dit **point d'inflexion**.
Au voisinage du point $M(t_0)$, la courbe a une allure de la forme suivante:



3ème cas : p **pair et** q **impair,**
alors $M(t_0)$ est un point de rebroussement **de première espèce**.
Au voisinage du point $M(t_0)$, la courbe est de la forme:



4ème cas: p **pair et** q **pair**
$M(t_0)$ est un point de **rebroussement de seconde espèce**:

2.4 Branches infinies:

On peut avoir des branches infinies lorsque
$t \longrightarrow +\infty$, $t \longrightarrow -\infty$, $t \longrightarrow t_o^-$ ou $t \longrightarrow t_o^+$
si t_0 est une borne du domaine de définition de la courbe paramétrée $\Gamma = f(I)$
Définition:
On dit que la courbe paramétrée Γ admet une branche infinie pour $t \longrightarrow t_o^-$ si

$$\lim_{t\longrightarrow t_o^-} \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| = +\infty,$$
$$\text{avec } \left\|\overrightarrow{OM(t)}\right\| = \sqrt{x(t)^2+y(t)^2} \text{ et } \overrightarrow{OM(t)} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$$

Proposition :
Γ présente une branche infinie pour $t \longrightarrow t_o^-$ si et seulement si
$$\lim_{t\longrightarrow t_o^-} (|x(t)|+|y(t)|) = +\infty.$$

Démonstration:
On a : $|x(t)|^2 + |y(t)|^2 \leq (|x(t)|+|y(t)|)^2$
$\iff \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| \leq |x(t)|+|y(t)|$
D'autre part on a $|x(t)| \leq \sqrt{|x(t))|^2+|y(t)|^2}$ et
$|y(t)| \leq \sqrt{|x(t)|^2+|y(t)|^2}$
$\Longrightarrow |x(t)|+|y(t)| \leq 2\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$.

Propriétés : .
1) Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$ alors $x = l$ est une asymptote verticale à Γ au voisiange de t_0.
2) Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = l \in \mathbb{R}$ alors

$$y = l \text{ est une asymptote horizontale à } \Gamma \text{ au voisiange de } t_0.$$

1) Si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$, on pose $\alpha = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)}$,
  i) si $\alpha = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $(O;\overrightarrow{j})$. $vois(t_0)$
  ii) si $\alpha = 0$, on a une branche parabolique de direction $(O;\overrightarrow{i})$.
  iii) si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $\beta = \lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-x(t))$, alors
$\to$ soit β n'existe pas , on a une branche infinie de direction $y = \alpha x$
$\to$ soit $\beta = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction $y = \alpha x$
$\to$ soit $\beta \in \mathbb{R}$, on a $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote à la courbe Γ

Exemples :
1) Soit $\Gamma \begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = 2t - \frac{1}{t^2} \end{cases}$
Quand $t \to +\infty$, on a $x(t)$ et $y(t) \to +\infty \Rightarrow$ on a une branche infinie.
Comme $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2t-\frac{1}{t^2}}{2t+t^2} = \frac{2t^3-1}{t^4+2t^3} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, on a une branche parabolique de direction $(O;\overrightarrow{i})$..
2) Soit Γ la courbe paramétrée:$\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$
si $t \to 0^+$, on a $x(t)$ et $y(t) \underset{t\to 0^+}{\to} +\infty$
$\Rightarrow \Gamma$ a une branche infinie au $vois(0^+)$
De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t+\frac{1}{t}}{t^2+\frac{2}{t}} = \frac{t^2+1}{t^3+2} \underset{t\to 0^+}{\to} \frac{1}{2}$
$\Rightarrow y = 2x$ est une direction asymptotique au $vois(0^+)$.
Comme $y(t) - \frac{1}{2}x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 \underset{t\to 0^+}{\to} 0^+$,
la droite $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe Γ, $vois(0^+)$, et la courbe est au dessus se son asymptote.

3 Réduction du domaine d'étude

a) Périodicité
Définition: On dit que la courbe paramétrée est périodique, et de période T, si et seulement si:
  (i) $\forall\ t \in I,\ t+T \in I$
  (ii) $\forall t \in I,\ M(t+T) = M(t)$.
ce qui est équivalent à
  $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques sur I, et de période T.
Exemple :

Le cercle $C(M(t_0), r)$ peut être paramétrée par:

$$\begin{cases} x(t) = r \ \cos(t) + x_o \\ y(t) = r \ \sin(t) + y_o \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques, de période 2π, il en est de même de la courbe.

L'étude d'une courbe paramétrée, périodique de période T, se fait dans un intervalle de longueur T, par exemple $[t_o, t_o + T] \cap I$, pour un point quelconque $t_o \in I$.

b) Invariance par translation:

La courbe Γ est invariante par la translation si et seulement si $\Im(\Gamma) = \Gamma$.

Soient $M \in \Gamma$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation .

La condition $\Im(\Gamma) = \Gamma$ s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \forall M &\in \Gamma, \Im(M) \in \Gamma et \ \ \forall M \in \Gamma, \exists M_2 \in \Gamma : \Im(M_2) = M \Leftrightarrow \\ \forall t &\in I, \ \forall t_1 \in I : \overrightarrow{M(t)M(t_1)} = v \ et \ \exists \ t_2 \in I \ \ \overrightarrow{M(t_2)M(t)} = \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

c) Symétries :

Symétrie centrale :

Soit **S** la symétrie par rapport à un point $A(a, b)$;

Γ est invariante par la symétrie S si et seulement si $S(\Gamma) = \Gamma$.

Comme on a $S^2 = Id$, il suffit de vérifier que $S(\Gamma) \subset \Gamma$.

Soit (a, b) les coordonnées du centre de la symétrie S, la condition s'écrit :

$$\forall t \in I, \exists \ t_1 \in I \ x(t_1) = 2a - x(t) \text{ et } y(t_1) = 2b - y(t)$$

Remarque : Si x et y sont impaires, alors Γ est **symétrique par rapport à l'origine**.

Exemple : Trouver le centre de symétrie de la courbe Γ d'équations

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t^2 + 2t \\ y(t) = 2t^3 - 6t + 13t + 11 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Symétrie par rapport à une droite parallèle à un des axes:

Γest invariante par rapport à la symétrie d'axe $x = a$ si et seulement si:

$$\forall t \in I, \exists t_1 \in I : x(t_1) = 2a - x(t) \text{ et } \ y(t_1) = y(t)$$

Γ est invariante par rapport à la symétrie d'axe $y = b$ si et seulement si

$$\forall t \in I, \exists t_1 \in I : x(t_1) = x(t) \ \text{ et } \ y(t_1) = 2b - y(t)$$

4 Construction de courbes paramétrées planes

4.1 Plan pour l'étude d'une courbe plane paramétrée par une fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$

1) Détermination du domaine de définition de f, puis recherche d'éventuelles symétries (parité, périodicité, etc...)

2) Etude des fonctions $x(t)$ et $y(t)$

3) Etude des branches infinies, recherche des courbes asymptotes.

4) construction du tableau de variations de $x(t)$ et $y(t)$

5) recherche des points particuliers: stationnaires, multiples, d'inflexion et de rebroussement.

6) Tracé de la courbe dans un repère orthonormé, après avoir cherché les positions des branches de la courbe par rapport aux asymptotes, intersection avec les axes de coordonnées, avec les asymptotes.

4.2 Applications

4.2.1 Exemple 1

Soit Γ la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t+2)^2}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{(t-2)^2}{t-1} \end{cases}$$

(i) **Domaine de définition**: $I =]-\infty, -1\,[\cup]-1, 1\,[\cup]\ 1, +\infty[$
(ii) **Domaine d'étude:**
Pour tout $t \in I$, $(-t) \in I$ et $(x(-t), y(-t)) = (-y(t), -x(t)) = -(y(t), x(t))$
$\Rightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à la $2^{ème}$ diagonale $y = -x$.
Donc l'étude se ramène à $I_E = [0, 1\,[\cup]\ 1, +\infty[$.
(iii) **Etude aux bornes**

$$\begin{array}{ll}
 & (x(0), y(0)) = (4, -4) \\
 & t \longrightarrow 1,\ t = 1 + \varepsilon \\
 & x(1+\varepsilon) = \dfrac{9}{2} + \dfrac{3}{4}\varepsilon + \circ(\varepsilon) \\
 & y(1+\varepsilon) = -2 + \varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} \\
1) & t \longrightarrow 1^- \\
 & x(t) \longrightarrow \dfrac{9^-}{2}; y(t) \longrightarrow -\infty \\
2) & t \longrightarrow 1^+\ ,\ x(t) \longrightarrow \dfrac{9^+}{2}; y(t) \longrightarrow +\infty \\
 & x = \dfrac{9}{2} \\
3) & t \longrightarrow +\infty \\
 & x(t) = t + 3 + \dfrac{1}{t} + 0\left(\dfrac{1}{t}\right) \longrightarrow +\infty \\
 & y(t) = t - 3 + \dfrac{1}{t} + 0\left(\dfrac{1}{t}\right) \longrightarrow +\infty
\end{array}$$

Au voisinage de $+\infty$, il y a une asymptote oblique: $x = t + 3, y = t - 3 \Rightarrow \boxed{y = x - 6}$.
au voisinage de $+\infty$: $y(t) - (x - 6) > 0 \Rightarrow$la courbe est au-dessus de l'asymptote.
(iv) **Tableau des variations :**

$$x\prime(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\ ,\ y\prime(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

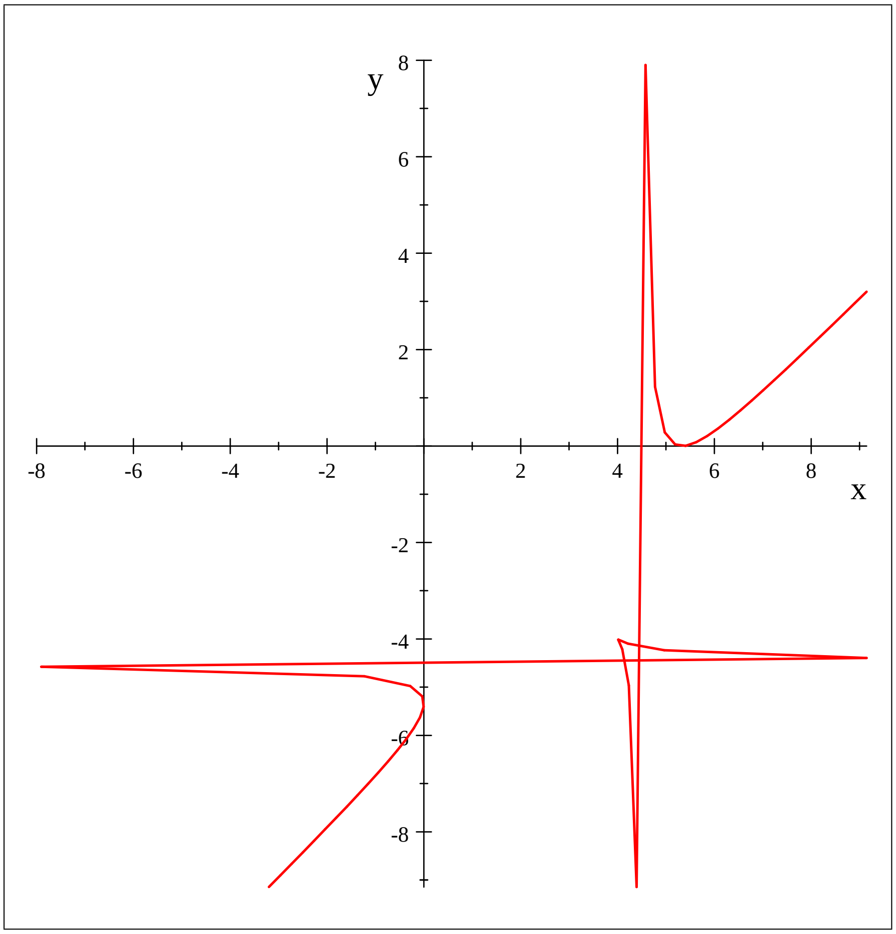
t	0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(t)$	4	$\nearrow$	$9/2$	$\nearrow$	C	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	-4	$\searrow$	$-\infty\ \Vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

(v) **Point remarquable**
$\rightarrow$Au voisinage de $t = 0$, on a

$$\overrightarrow{OM}(t) = (4\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j}) + (\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\,)t^2 + (-\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\,)t^3 + 0(t^3)$$

$f(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ(t^3) \\ \circ(t^3) \end{pmatrix}$Donc $p = 2$ pair, $q = 3$ impair$\Rightarrow$ $M(0)$ est un point de rebroussement de $1^{ère}$ espèce.

La tangente est la $2^{ème}$ diagonale.
$\rightarrow$Pour $t = 2$, $f(2) = (\frac{16}{3}, 0)$ $f'(2) = (\frac{8}{9}, 0)$ et l'équation de la tangente en $M(2)$ est :$y = 0$
(vi) tracé de Γ



4.2.2 Exemple 2:

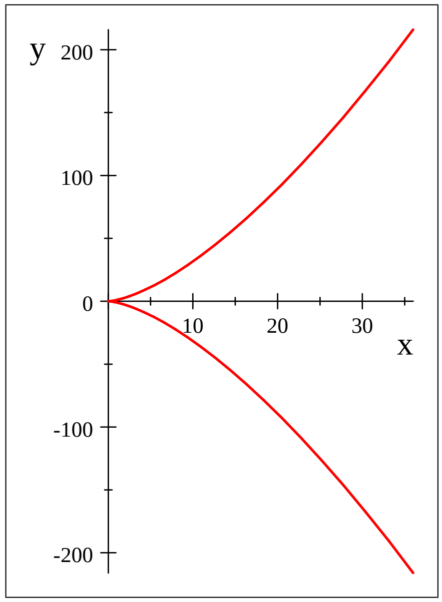
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t-1} \\ \frac{t^3}{t-1} \end{pmatrix}$$

4.2.3 Exemple 3

Nature du point $M(0)$ de la courbe paramétrée: $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix} \Longrightarrow f''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow p = 2$$
$$\begin{pmatrix} x'''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow f'''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow q = 3$$

$\Longrightarrow p = 2$ et $q = 3$ c'est un point de rebroussement de 1ère espèce.
De plus la tangente horizontale



5 Construction de courbes planes en coordonnées polaires

Soit $M = (x, y) \in P$

Définition

On appelle système de coordonnées polaires tout couple (r, θ) de nombres réels tel que

$(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$

Remarques:

1) $|r|$=distance de M à O.

θ= angle formé par Ox et la droite qui passe par O et M.

2) Tout élément de $\mathbb{R}^2$possède une infinité de systèmes de coordonnées polaires.

3) Dans le cas où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\theta \to u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

u est C$^\infty$ et on a

$(i)||u(\theta)|| = 1,$

$(ii)u'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ vérifie $u'(\theta)u(\theta) = 0$ et$||u'(\theta)|| = 1$

$\Longrightarrow \{u(\theta), u'(\theta)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$

5.1 Etude d'une courbe paramétrée de la forme $f(\theta) = r(\theta)u(\theta)$

$f : \theta \in I \to f(\theta) = r(\theta)u(\theta)$

avec $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $r : \theta \in I \to r(\theta) \in \mathbb{R}$

Soit $\alpha \in I$, comme $f\ '(\alpha) = r'(\alpha)u(\alpha) + r(\alpha)u'(\alpha)$,

$r'(\alpha)$ et $r(\alpha)$ sont les composantes de $f'(\alpha)$ dans la base

$\{u(\alpha), u'(\alpha)\}$.

$\to$**Si** $\boxed{f\ (\alpha) \neq (0, 0)}$ alors $r(\alpha) \neq 0$ et $f\ '(\alpha) \neq (0, 0)$

$\Longrightarrow$ la courbe possède une tangente au point $f(\alpha)$, qui est un point régulier.

Si en plus $r\ '(\alpha) = (0, 0)$ alors $f\ \ '(\alpha) = r(\alpha)u'(\alpha)$

$\Longrightarrow$La tangente au point $\underline{f(\alpha)}$ est orthogonale à la droite qui passe par O et $f(\alpha)$.

$\to$**Si** $\boxed{f\ (\alpha) = (0, 0)}$ <u>et si</u> il existe $\mathcal{V} = vois(\alpha)$ tel que

$(0, 0) \notin f(\mathcal{V} \setminus \{\alpha\})$

$\Longrightarrow r(\theta) \neq 0, \forall\theta \in \mathcal{V}\ \setminus \{\alpha\}$.

La pente de la droite qui passe par $f(\alpha) = (0, 0)$ et $f(\theta)$ est $\tan\theta$

$\Longrightarrow$la courbe admet une tangente au point $f(\alpha) = (0, 0)$, dont la pente est $\underset{\theta\to\alpha}{lim} \tan\theta$.

Si en plus $\underline{r'(\alpha) = 0}$, alors $f(\alpha) = (0, 0)$ est un point stationnaire.

Pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, on étudie les dérivées d'ordre supérieur.

5.2 Plan d'étude

$f(\theta) = r(\theta)u(\theta)$ avec $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$;

1) Détermination de l'ensemble de définition, recherche de symétries, parité et périodicité de r, pour réduire le domaine d'étude de r.

2) Etude de r aux extrémités des intervalles qui forment le domaine d'étude de r.

3) Etude des branches infinies.

4) Tableau de variation de r. Recherche des points où r s'annule et étude de l'allure de la courbe au voisinage de ces points.

5) Tracé de la courbe après avoir précisé les points d'inflexion et les points multiples;

5.3 Exemples

5.3.1 Exemple 1: la cardioïde $r(\theta) = 2(1 - \cos\theta)$;

1) r est de classe $\mathcal{C}^\infty$ Elle s'annule si $\theta = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2) r est $2\pi-$périodique, donc on l'étudie sur $[-\pi, \pi]$

r est paire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, on l'étudie alors sur $[0, \pi]$

3) $r'(\theta) = 2\sin\theta \Longrightarrow r' > 0$ sur $]0, \pi[$ donc r est strictement croissante sur $]0, \pi[$ et elle croit de 0 jusqu'à 4.
Le carré de la vitesse est $r(\theta)^2 + r'(\theta)^2 = 8(1 - \cos\theta)$, qui s'annule si $\theta = 0$.

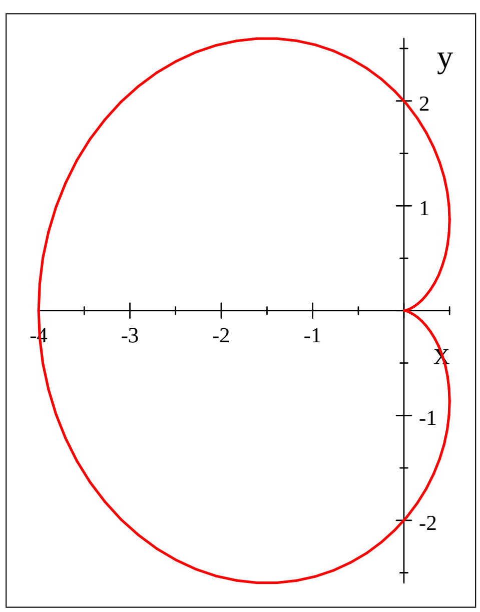
4) Au voisinage de $\theta = 0$:

$x(\theta) = \theta^2 + \circ(\theta^2)$ et $y(\theta) = \theta^3 + \circ(\theta^3)$

On a un point de rebroussement de 1ère espèce.

5) On peut chercher des tangentes parallèles aux axes ($\theta \in]0, \pi]$):
On a $x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta)$ et $y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta)$
Donc
$\rightarrow$la tangente est verticale si $y'(\theta) = 0$ et $x'(\theta) \neq 0$
$x'(\theta) = 0 \Longleftrightarrow 2\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \pi$.
Donc la tangente est verticale si $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $\theta = \pi$
$\rightarrow$La tangente est horizontale si $x'(\theta) = 0$ et $y'(\theta) \neq 0$
$y'(\theta) = 0 \Longleftrightarrow 2(-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1) = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0, \theta = \frac{2\pi}{3}$.
la tangente est horizontale si $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

6) Tracé de la courbe:



Remarques:
Si $r > 0$ et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
Si $r < 0$ et décroît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
Si $r > 0$ et décroît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.
Si $r < 0$ et croît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.

5.3.2 Exemple 2: $r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}$

1) r est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$

On a $r(\theta+\pi) = -r(\theta) \Longrightarrow M(\theta+\pi) = M(\theta)$

$\Longrightarrow$On peut donc limiter l'étude à l'intervalle: $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

De plus $r(-\theta) = r(\theta) \Longrightarrow$ la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox

$\Longrightarrow$On peut donc limiter l'étude à l'intervalle: $[0, \frac{\pi}{2}[$

2) $r'(\theta) = -\frac{\sin\theta(2\cos^2\theta+1)}{\cos^2\theta}$

Tableau de variations:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
$r(\theta)$	1	$\searrow$	$-\infty$

3) Points particuliers:

Etude en $\theta = 0$:

$r(0) = 1; r'(0) = 0 \Longrightarrow$la tangente est verticale

Etude quand $\theta \to (\frac{\pi}{2})^-$:

$r(\theta) \to -\infty \Longrightarrow$la droite $x = -1$ est asymptote

Etude en $\theta = \frac{\pi}{4}$:

$r(\frac{\pi}{4}) = 0$ et $r(\theta) > 0$ à gauche de $\frac{\pi}{4}$ et $r(\theta) < 0$ à droite de $\frac{\pi}{4}$

$M(\frac{\pi}{4}) = O$ est un point ordinaire dont la tangente est la droite d'équation polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$r(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\cos\theta}$