Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire 2014-2015

Calcul Vectoriel

Professeur : Zine El-Abidine Guennoun

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat–Maroc
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://http://fsr.um5.ac.ma/

Table des matières

1 Les Fonctions de plusieurs variables réelles **3**
- 1.1 Introduction . . . 3
- 1.2 Fonctions numériques de plusieurs variables . . . 3
- 1.3 Graphe d'une fonction de plusieurs variables . . . 7
- 1.4 Représentation graphique d'une fonction de deux variables . . . 7
- 1.5 Surface de niveau . . . 17
- 1.6 Limite d'une fonction de plusieurs variables . . . 21
  - 1.6.1 Voisinage et limite d'une fonction de deux variables . . . 21
  - 1.6.2 Voisinage et limite d'une fonction de trois variables . . . 23
- 1.7 Continuité . . . 23
- 1.8 Dérivées partielles . . . 24
  - 1.8.1 Dérivées partielles d'une fonction de trois variables . . . 25
  - 1.8.2 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables . . . 26
- 1.9 Différentiabilité . . . 26
  - 1.9.1 Différentielle totale . . . 29
- 1.10 Dérivées partielles d'ordre supérieur . . . 29
  - 1.10.1 Égalité des dérivées partielles mixtes . . . 30
  - 1.10.2 Règle de dérivation en chaîne . . . 31
  - 1.10.3 Gradients et dérivées directionnelles . . . 33
- 1.11 Développement de Taylor . . . 35
- 1.12 Extremums d'une fonctions numériques . . . 38
  - 1.12.1 Classification des points stationnaires d'une fonction de deux variables . . . 40
- 1.13 Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . 42
- 1.14 Détermination d'une fonction à partir de son gradient . . . 45
- 1.15 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs . . . 47
- 1.16 Indépendance d'une intégrale curviligne par rapport au chemin . . . 49

2 Intégrales multiples **51**
- 2.1 Intégrale double . . . 51
  - 2.1.1 Quelques conséquences . . . 55
- 2.2 Intégrale double en coordonnées polaires . . . 61
- 2.3 Green-Riemann, Stokes et Divergence dans le plan . . . 70
  - 2.3.1 Quelques rappels . . . 70
  - 2.3.2 Théorème Green-Riemann . . . 71

2.3.3 Stokes dans le plan 76
2.3.4 Divergence dans le plan 78
2.4 Intégrale Triple 79
2.5 Intégrale de surface 84
2.6 Intégrale de surface d'une fonction vectorielle. 90
2.7 Changement de variables dans une intégrale double 95
2.8 Changement de variables dans une intégrale triple 99
2.8.1 Coordonnées cylindriques 100
2.8.2 Coordonnées sphériques. 101
2.9 Théorème de Stokes 104
2.10 Théorème d'Ostrogradsky ou de Gauss ou de Divergence 107

1

Les Fonctions de plusieurs variables réelles

1.1 Introduction

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent dans une grande variété d'applications dans la nature.

Par exemple :

— La température est une fonction de quatre variables $T = f(x, y, z, t), /(x, y, z)$ détermine la position et t le temps.

— Le taux d'une certaine réaction chimique qui implique quatre produits chimiques, serait une fonction des concentrations des quatre produits x_1, x_2, x_3, x_4 et de la température t, on obtient une fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4, t)$ de cinq variables.

— En économie, la relation $R = Px$ / permet de calculer le revenu à partir de x le nombre d'articles vendus au prix P.

Dans cette partie, nous allons étendre les notions de base du calcul différentiel des fonctions numériques d'une variable réelle aux fonctions numériques de plusieurs variables. Nous développerons les concepts suivants :

- *Graphes,*
- *Courbes de niveau.*
- *Sections transversales.*
- *Limites, continuité.*
- *Dérivées partielles.*
- *Différentiabilité.*
- *Dérivée partielles d'ordre supérieur.*
- *Règle de dérivation en chaîne (Composition).*
- *Gradients et Dérivées directionnelles.*
- *Extremums locaux et absolus.*
- *Détermination d'une fonction à partir de son gradient*
- *Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs.*

1.2 Fonctions numériques de plusieurs variables

Définition 1 *Une fonction numérique de n variables réelles est une règle qui à chaque point $(x_1, ..., x_n)$ d'un sous-ensemble $D(f)$ de $\mathbb{R}^n$ associe un nombre réel unique $f(x_1, ..., x_n)$.*
On note alors, $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

On appelle domaine de définition de f, le sous-ensemble $D(f)$ de $\mathbb{R}^n$, où la fonction est bien définie.
Le sous-ensemble $\{f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R} \ / \ (x_1, ..., x_n) \in D(f)\}$ est appelé :
le champ de f ou l'image de $D(f)$ par f.

Exemple 1 1. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = c$, où c est une constante.*
Le domaine $D(f)$ est le plan $\mathbb{R}^2$, le champ de f est l'ensemble $\{c\}$, la fonction est représentée par le plan d'équation $z = c$.

2. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.*
Le domaine $D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 25 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$ est l'ensemble des points du plan contenus dans le disque $x^2 + y^2 \leq 25$:

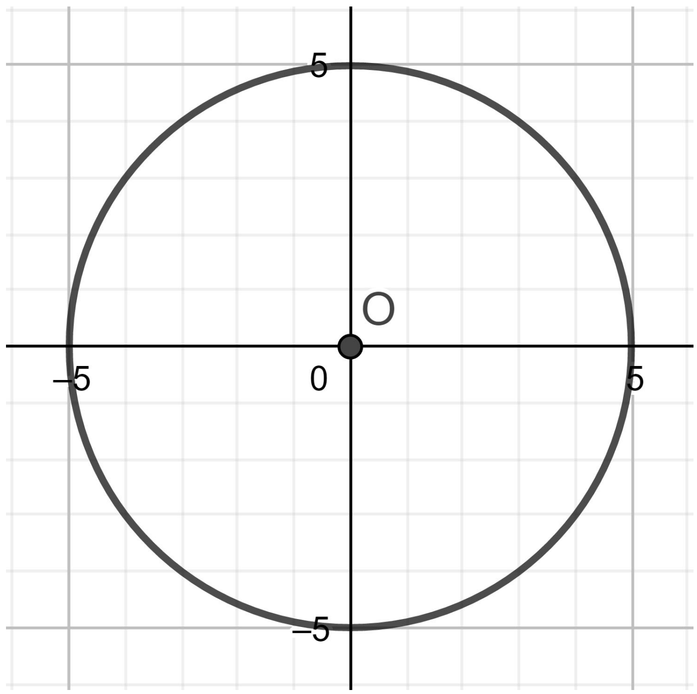


FIGURE 1.1 – Domaine de la fonction $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Le champ de f est l'ensemble $[0, 5]$.

3. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, définie par $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.*
Le domaine de f est l'espace $\mathbb{R}^3$. Le champ de f est l'ensemble $[0, \infty[$.

Remarque 1 *Si $n = 1$, on retrouve alors les fonctions numériques $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle déjà étudiées.*

Quelques Rappels, $n = 1$:

On rappellera brièvement quelques notions dans le cas $n = 1$, pour montrer l'analogie entre les notions déjà étudiées et les nouveaux concepts qu'on va développer dans le cadre de cette première partie.

Soient $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in D(f), V \subset \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de x_0 s'il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'intervalle de centre x_0 :

$I(x_0,\delta)=]\ x_0-\Delta, x_0+\delta[=\{x\in R\ /\ \ |x-x_0|<\delta\}\subseteq V.$

$$\text{———————————————}]-----x_0-----[\text{—————————}\longrightarrow R$$

$I(x_0,\delta)=\ ]\qquad x_0-\delta\qquad \rightarrow\ x_0\longleftarrow\qquad x_0+\delta\qquad [$

x_0^- *le chemin à gauche de* x_0 $\qquad$ x_0^+ *le chemin à droite de* x_0

Dans R, x_0^- et x_0^+ sont les seuls chemins possibles pour s'approcher de x_0 quand $\delta\rightarrow 0$.

Définition 2 *Soit $l\in R$, on dit que la fonction $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0, et on note $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, si et seulement si :*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\quad tel\ que\quad 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon.}$$

On a alors l'équivalence suivante :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=l\qquad\Leftrightarrow\qquad \lim_{x\to x_0^-} f\ (x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l}$$

La fonction f est dite <u>*continue*</u> en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
Le sous-ensemble de $G(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2\ /\ \ x\in D(f)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est appelé <u>*le graphe de* f</u>, qui en général représente <u>*une courbe*</u> dans $\mathbb{R}^2$.

<u>Par exemple :</u>

Considérons la fonction $f(x)=\sqrt{x+3}$, $D(f)=[-3,+\infty[$, le sous-ensemble $[0,+\infty[$ est le champ de f, et le graphe $G(f)$ de la fonction $f(x)=\sqrt{x+3}$ est déterminé par la courbe de $\mathbb{R}^2$ suivante :

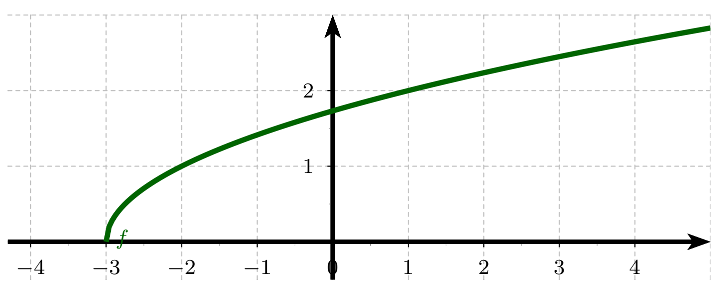


FIGURE 1.2 – Graphe de $f(x)=\sqrt{x+3}$

Définition 3 *On dit que la fonction f est <u>différentiable</u> au point $(x_0,f(x_0))$ si et seulement si la limite de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0 existe qu'on note $f'(x_0)$:*

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ =\ f'(x_0)}$$

<u>Cette définition est équivalente à la définition suivante :</u>

La fonction f est <u>*différentiable*</u> au point $(x_0,f(x_0))$ si et seulement si :

$$\boxed{\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)=\ f\ '(x_0)h+r(h),\text{avec}\quad \lim_{h\to 0}\tfrac{r(h)}{h}=0}$$

<u>Géométriquement :</u>
L'accroissement $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ est une décomposition d'une *application linéaire :*

$h \to f'(x_0)h$ dont le graphe est une droite de pente $f'(x_0)$ et d'un terme *reste* $r(h)$ *négligeable* devant h quand $h \to 0$.

Au voisinage de x_0, on peut approcher le graphe de f par *la droite tangente :*

$$\boxed{y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0).}$$

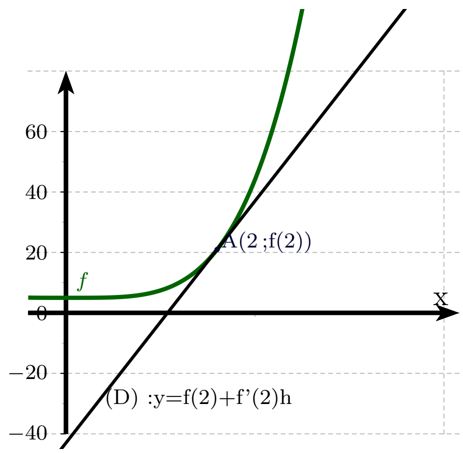


FIGURE 1.3 – Graphe de la fonction $f(x) = 5 + x^4$ et de la tangente au point $(2, f(2))$

On obtient la proposition suivante :

Proposition 1 *Si la fonction f est différentiable en x_0 alors la fonction f est continue en x_0.*

La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie, toute fonction continue n'est pas nécessairement différentiable.

Par exemple :
La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais non différentiable en 0.

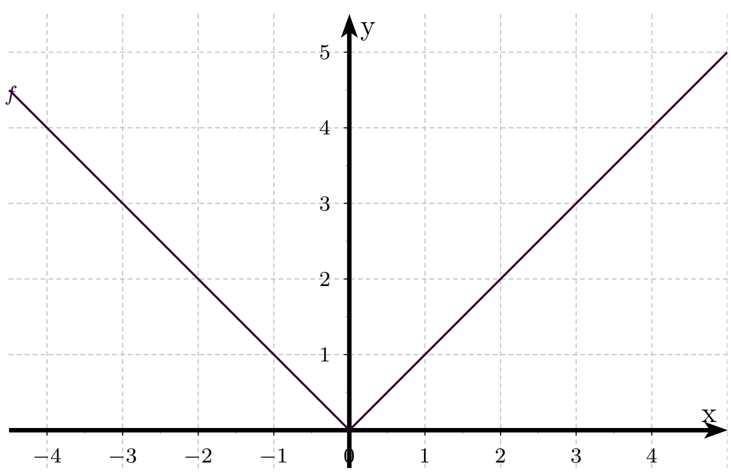


FIGURE 1.4 – Graphe de la fonction $f(x) = |x|$

Au point (0,0), la courbe n'admet pas de tangente même si la courbe est continue en ce point.

Serait-il possible d'étendre ces notions si $n > 1$? Si oui, comment et dans quelles conditions ?

1.3 Graphe d'une fonction de plusieurs variables

Définition 4 *Soit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables, le sous-ensemble $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par :*

$$G(f) = \left\{((x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ (x_1, \cdots, x_n) \in D(f)\right\}$$

est appelé graphe de f.

Exemple 2

1. Si $f(x, y)$ est une fonction de deux variables alors le graphe :
$$G(f) = \left\{(x, y, f(x, y) \in \mathbb{R}^3 / \ (x, y) \in D(f)\right\}$$
de la fonction $z = f(x, y)$ est en général *une surface* de $\mathbb{R}^3$ qu'on peut visualiser.

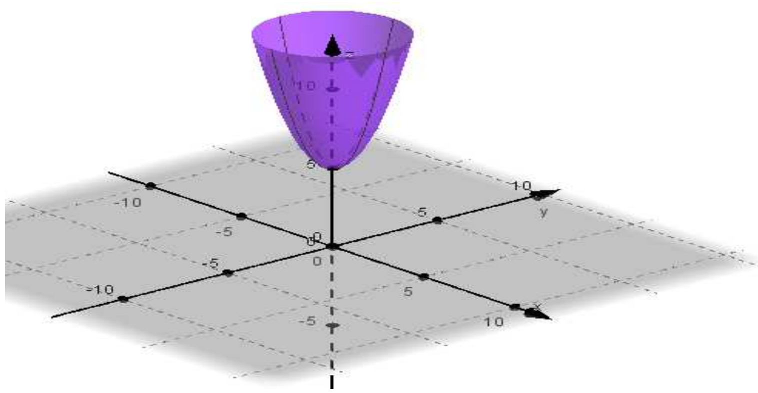


FIGURE 1.5 – Graphe de la fonction $z = f(x, y) = 5 + x^2 + y^2$; $-5 \leq x \leq 5; -5 \leq y \leq 5$

2. Si f est une fonction de trois variables $w = f(x, y, z)$ alors le graphe de la fonction :
$$G(f) = \left\{(x, y, z, f(x, y, z) \in R^4 / \ (x, y, z) \in D(f)\right\}$$
est en général une **" hypersurface de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3"** qu'on ne peut pas visualiser. Ainsi de suite, pour $n = 4, 5, \cdots$

1.4 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

On s'intéressera d'abord aux fonctions de deux variables pour profiter de la possibilité de visualiser les graphes des fonctions comme des surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3 *Le graphe de la fonction $f(x, y) = 1$ est représenté par le plan $z = 1$.*

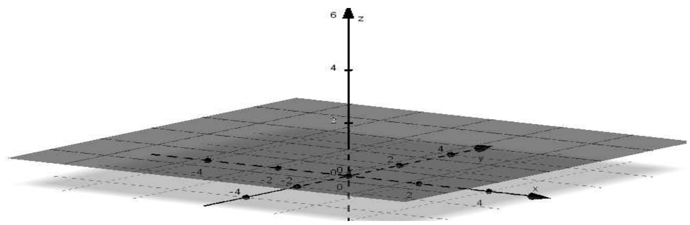


FIGURE 1.6 – Graphe de la fonction $f(x, y) = 1; -5 \leq x \leq 5; -5 \leq y \leq 5$.

Exemple 4 *Considérons la fonctions* $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.
Le graphe $G(f) = \left\{(x, y, \sqrt{25 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D(f)\right\}$ *représente la demi-sphère supérieure :*

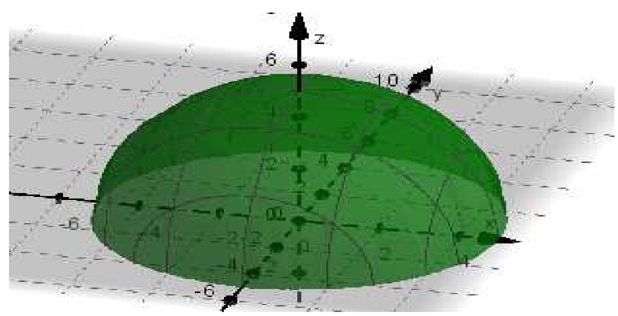


FIGURE 1.7 – Graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Exemple 5 *Considérons la fonction* $f(x, y) = \ln(xy - 1)$.
Le domaine de f : $D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ xy > 1\right\}$ *est la partie hachurée :*

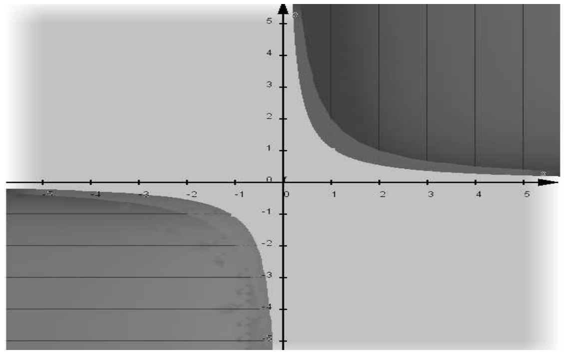


FIGURE 1.8 – Domaine de la fonction $f(x,y) = \ln(xy-1)$

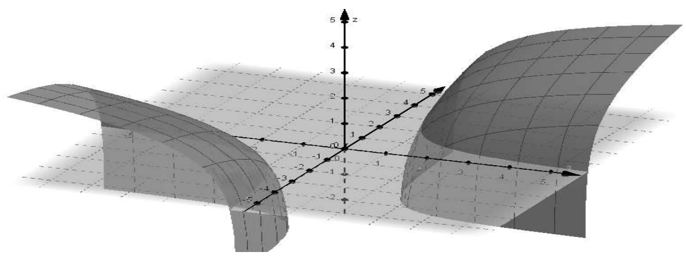


FIGURE 1.9 – Graphe de la fonction $f(x,y) = \ln(xy-1)$

Courbes de niveau.

En général, il est très difficile de tracer les graphes des fonctions de deux variables. $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *pour obtenir des renseignements sur ces graphes, on peut étudier les courbes de niveau.*

Définition 5 *Soit* $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique,* c *une constante dans* $\mathbb{R}$. *L'ensemble* $\{(x,y) \in D(f) \ / \ f(x,y) = c\}$ *est appelé* *courbe de niveau,* *c-à-d, la courbe à la hauteur* c*, déterminée par l'intersection du graphe de* f *avec le plan d'équation* $z = c$.

Exemple 6 *Considérons la fonction* $f(x,y) = 2x + y + 5$. *Les courbes de niveau* $f(x,y) = c$ *sont déterminées par des droites.*

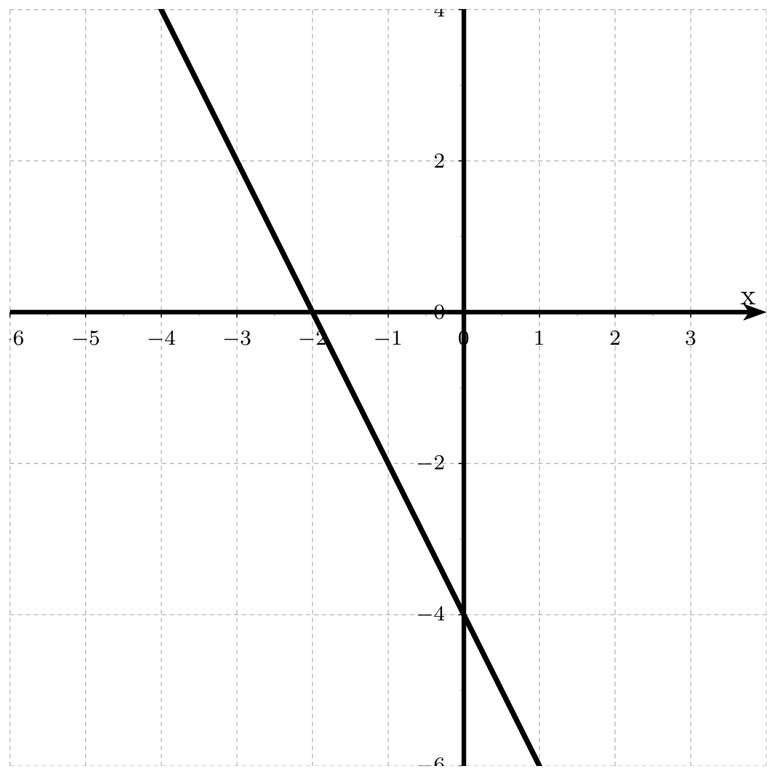


FIGURE 1.10 – $c = 1$, on obtient la droite d'équation $2x + y = -4$

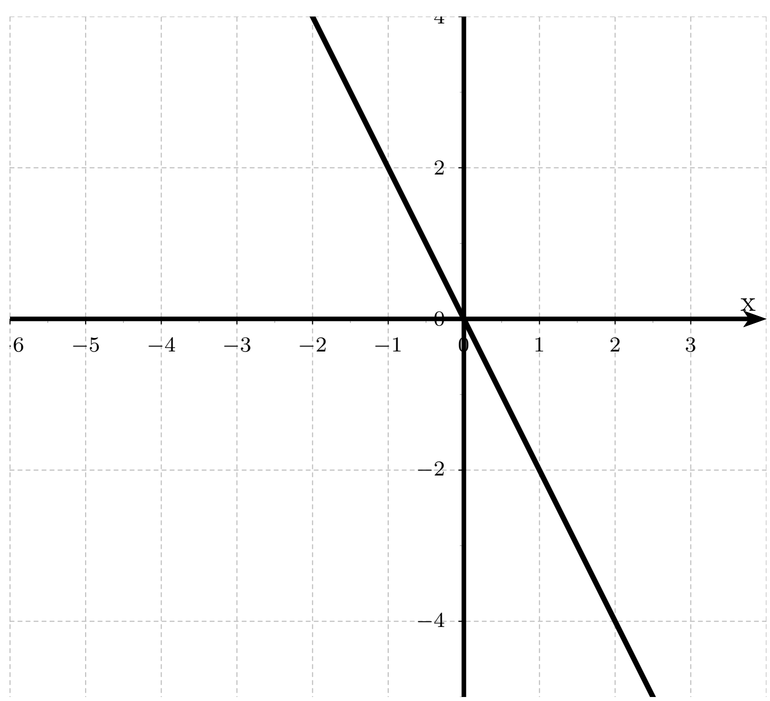


FIGURE 1.11 – $c = 5$, on obtient la droite d'équation $2x + y = 0$

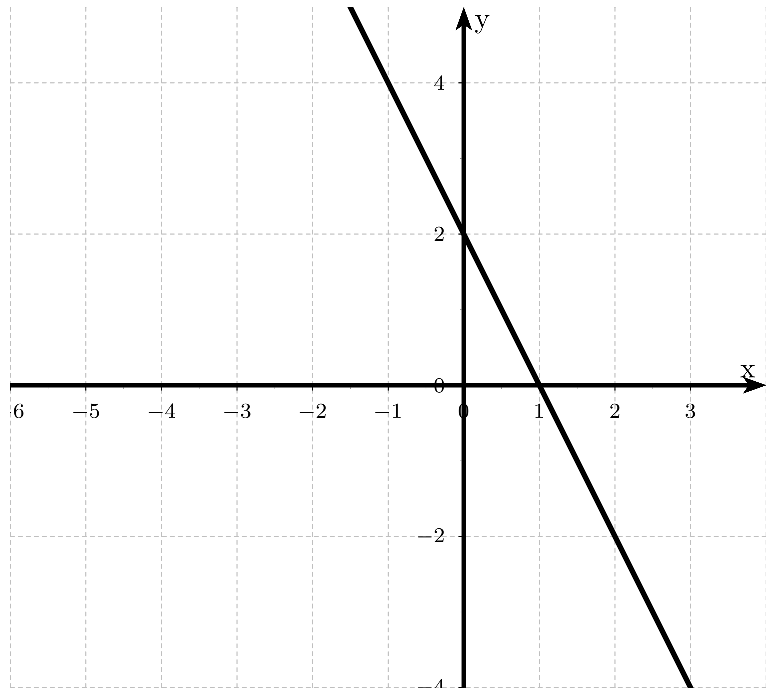


FIGURE 1.12 – $c = 7$, on obtient la droite d'équation $2x + y = 2$

En traçant toutes les courbes de niveau, on obtient une esquisse du graphe de f :

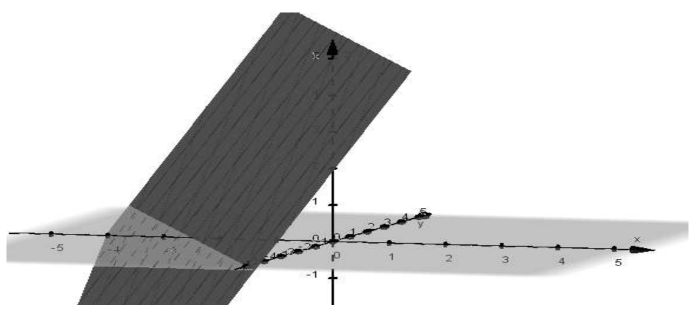


FIGURE 1.13 – Graphe de la fonction $f(x, y) = 2x + y + 5$

Exemple 7 *Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. Les courbes de niveau $f(x, y) = c$ représentent des hyperboles.*

Esquisse du graphe de la fonction $f(x, y) = xy$:

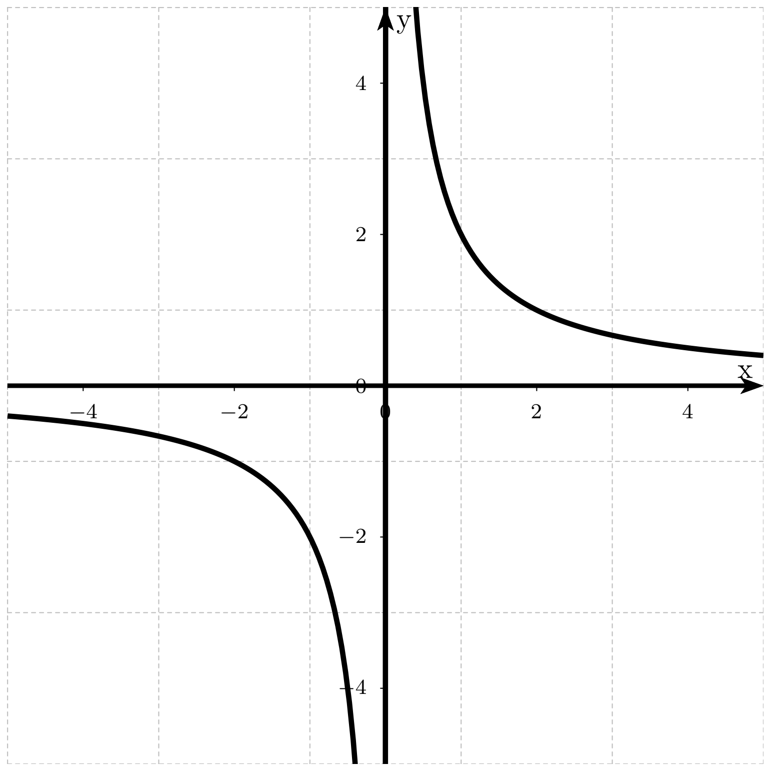


Figure 1.14 – Courbe de niveau $xy = 2$, $c = 2$

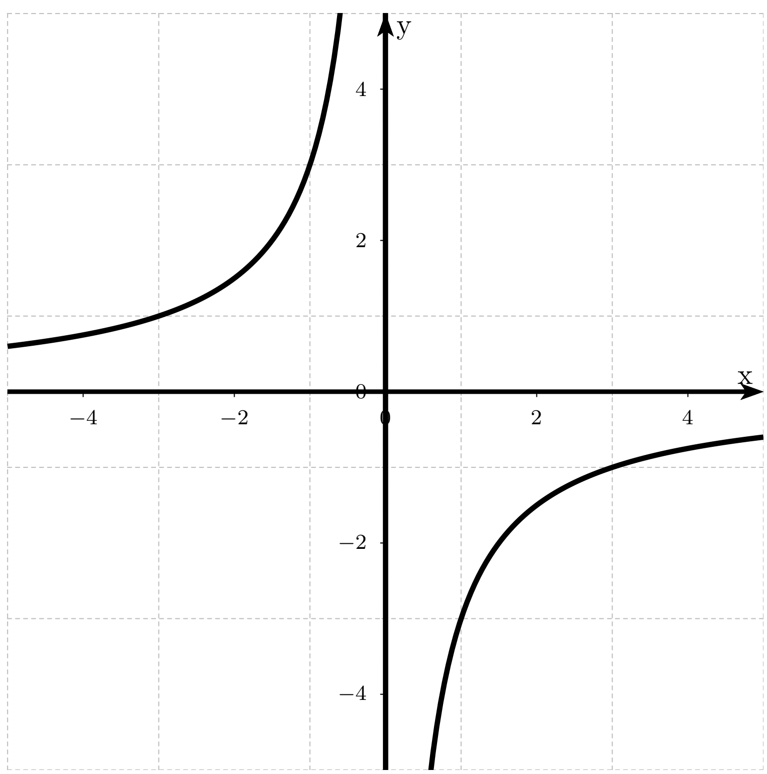


Figure 1.15 – Courbe de niveau $xy = -3$, $c = -3$

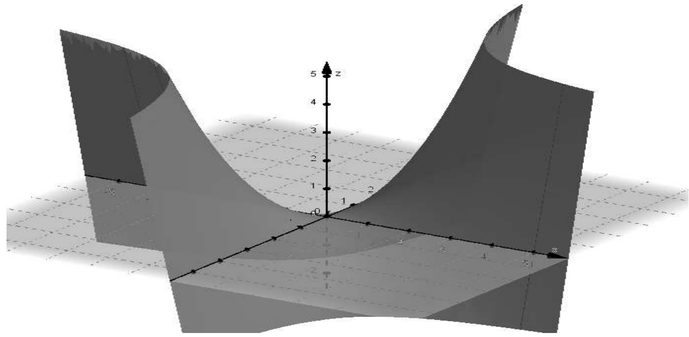


FIGURE 1.16 – Esquisse du graphe de la fonction $f(x, y) = xy$

Exemple 8 *Considérons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Déterminons les courbes de niveau de f :*

- *Si $c < 0$: Les courbes de niveau sont vides.*
- *Si $c \geq 0$: Les courbes de niveau sont représentées par les cercles de centre (0,0) et de rayon $\sqrt{c}$.*

<u>Quelques courbes de niveau :</u>

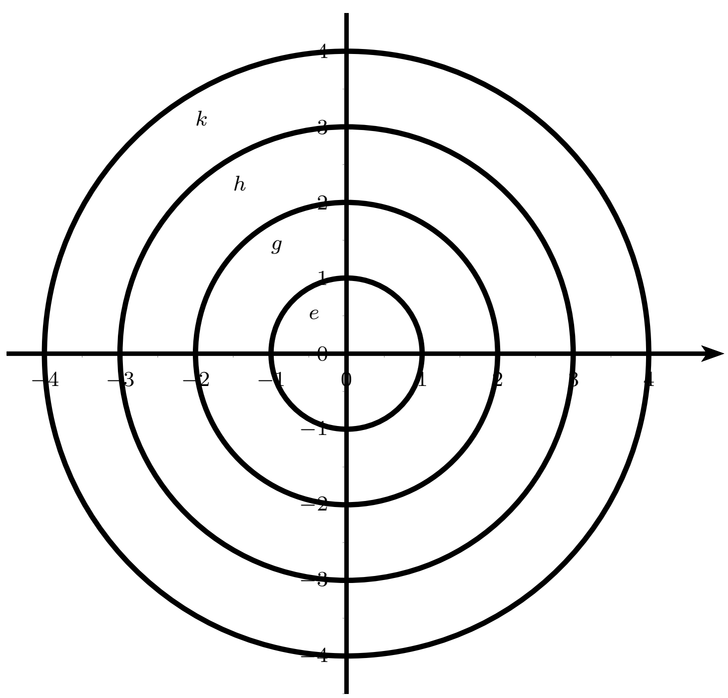


FIGURE 1.17 – $c = 1, c = 4, c = 9, c = 16$

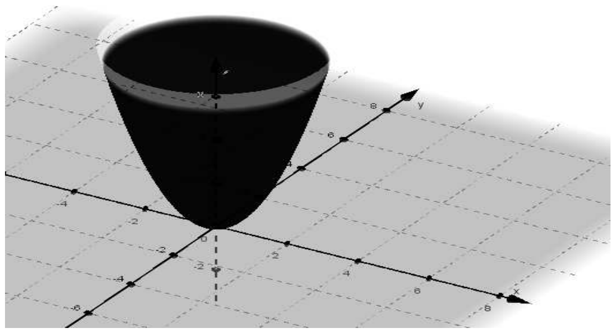


FIGURE 1.18 – Graphe de la fonction $z = x^2 + y^2$

Sections et sections transversales

Pour obtenir des renseignements supplémentaires, on peut aussi étudier les sections des graphes.

Définition 6 *Soit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, une section du graphe f est une courbe définie par l'intersection du graphe et d'un plan.*
Si le plan est d'équation $x = c$ ou $y = c$, c est une constante, alors la courbe obtenue est appelée section transversale du graphe f.

Exemple 9 *Soient $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $c \in \mathbb{R}$, on considère le plan P d'équation $y = c$. On obtient la section du graphe $S = G(f) \cap P = \left\{(x, z)/\ z = f(x, c) = x^2 + c^2\right\}$, c'est une parabole dans le plan xz. Si on on considère le plan P d'équation $x = c$ alors on obtient la section du graphe $S = G(f) \cap P = \left\{(y, z)/\ z = f(c, y) = y^2 + c^2\right\}$, c'est une parabole dans le plan yz.*

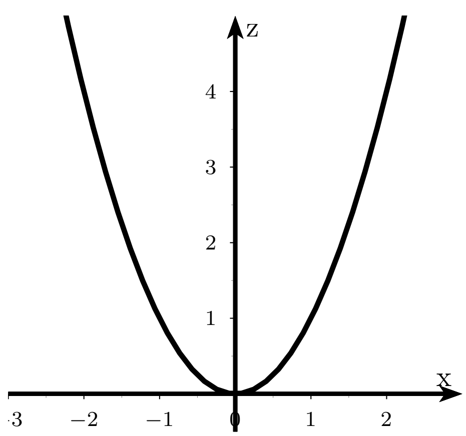


FIGURE 1.19 – Section $S_1 : z = x^2;\ \ y = 0$

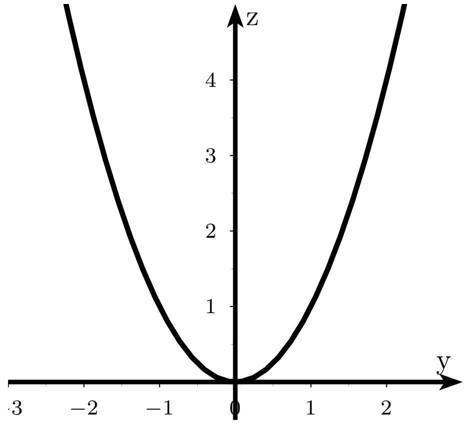


FIGURE 1.20 – Section $S_2 : z = y^2; \;\; x = 0$

Exemple 10 *Tracer les courbes de niveau de la fonction :*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, c = 0, c = 1, c = -1, c = \frac{1}{2}.$$

Si $c = 0$ *alors la courbe de niveau est déterminée par* $x = 0$, *on obtient l'axe des* y *privé de* $(0,0)$, *puisque* $(0,0) \notin D(f)$.

Si $c = 1$ *alors la courbe de niveau est déterminée par* $y = 0$, *on obtient l'axe des* x *privé de* $(0,0)$ *puisque,* $(0,0) \notin D(f)$.

Si $c = -1$ *alors la courbe de niveau est vide.*

Si $c = \frac{1}{2}$ *alors la courbe de niveau est déterminée par l'équation* ($y = x$ *ou* $y = -x$) *privé de* $(0,0)$ *puisque* $(0,0) \notin D(f)$.

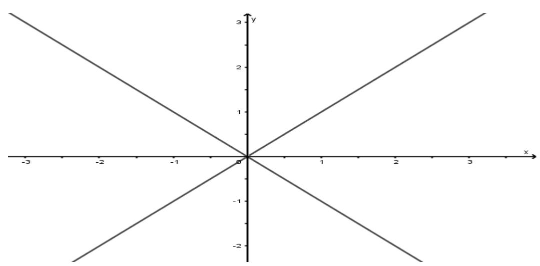
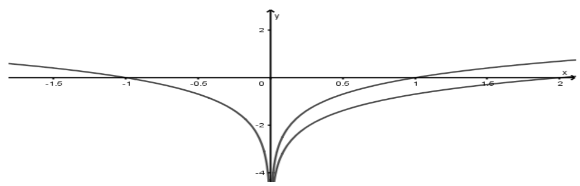


FIGURE 1.21 – Courbes de niveau $c = 0, c = 1, c = \frac{1}{2}$

Exemple 11 *Tracer les courbes de niveau de la fonction :*

$$f(x,y) = xe^{-y}, \;\; c = 1, \;\; c = -1, \;\; c = 2$$

Si $c = 1$ *alors la courbe de niveau est déterminée par* $y = \ln(x)$,
Si $c = -1$ *alors la courbe de niveau est déterminée par* $y = \ln(-x)$,
Si $c = 2$ *alors la courbe de niveau est déterminée par l'équation* $y = \ln(\frac{x}{2})$.



Exemple 12 *Représenter graphiquement la fonction* $f(x, y) = x \qquad (\, 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3).$

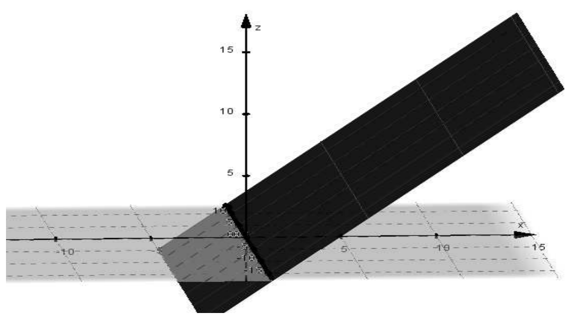


FIGURE 1.22 – Graphe de la fonction $f(x, y) = x$

Exemple 13 *Représenter graphiquement la fonction* $f(x, y) = |x|+|y|$, *On trace d'abord quelques courbes de niveau :*

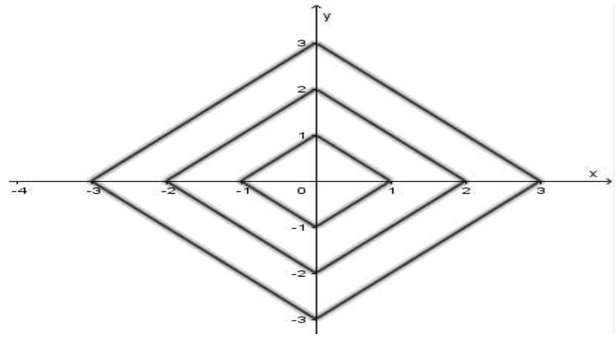


FIGURE 1.23 – Courbes de niveau : $c = 1, c = 2, c = 3$

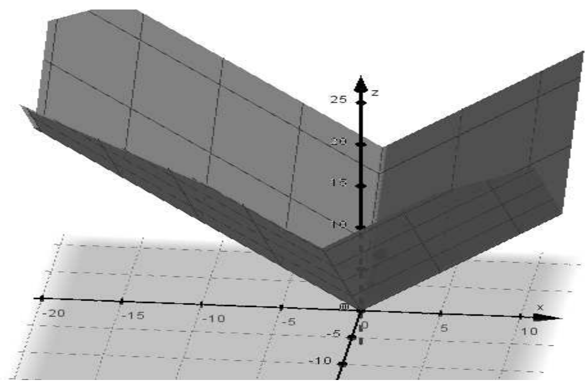


FIGURE 1.24 – Graphe de la fonction $f(x, y) = |x| + |y|$

1.5 Surface de niveau

Si $n > 2$,on ne peut pas visualiser directement le graphe de f, dans ce cas, on peut étudier les sections et les ensembles de niveau à la valeur c.

Définition 7 *Soit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.*
L'ensemble de niveauà la valeur c est l'ensemble image réciproque de c par la fonction f :

$$f^{-1}(\{c\}) = \{ \ (x_1, ..., x_n) \in D(f) \ / \ f(x_1, ..., x_n) = c\}.$$

Si $n = 2$, on retrouve les courbes de niveau.
Si $n = 3$ alors l'ensemble de niveau est appelé *surface de niveau* qu'on peut visualiser.

Exemple 14 *Considérons la fonction $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, les surfaces de niveau sont déterminées par les ensembles $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = c\right\}$.*

- *Si $c < 0$ alors c'est l'ensemble vide ; si $c = 0$, on obtient l'ensemble point $\{(0, 0, 0)\}$.*

- *Si $c > 0$ alors on obtient les sphères de centre $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.*

1) Si $c = 1$, on obtient la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) Si on Considère le plan P d'équation $z = 0$, on obtient la section S définie par :

$$S = G(f) \cap P = \left\{(x, y, w) \in R^3 / \ \ z = 0, \ w = x^2 + y^2\right\}$$

représente un paraboloïde dans l'espace x-y-w.

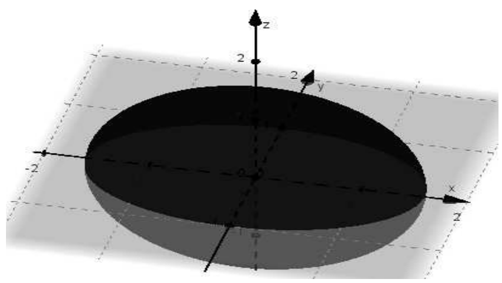
Exemple 15 *Les quadriques sont des surfaces de niveau des fonctions quadratiques d'équation de la forme :*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J \ = 0.$$

QUADRIQUES

On donnera les six quadriques types de base en position standard relativement aux axes :

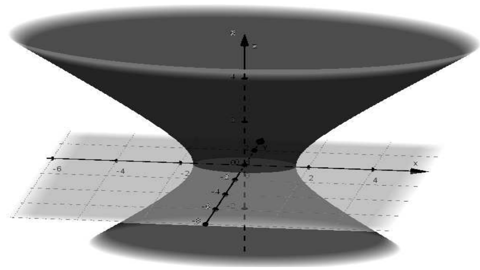
1. **Ellipsoïde :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Plan :

$z = k$ Courbes de niveau : Ellipse, point ou vide.
$x = k$ Sections transversales : Ellipse, point ou vide.
$y = k$ Sections transversales : Ellipse, point ou vide.

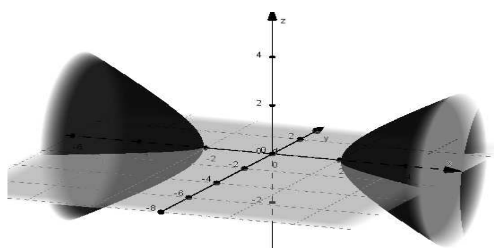
2. **Hyperboloïde à une nappe :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Plan :

$z = k$ Courbes de niveau : Ellipse.
$x = k$ Sections transversales : Hyperbole.
$y = k$ Sections transversales : Hyperbole.

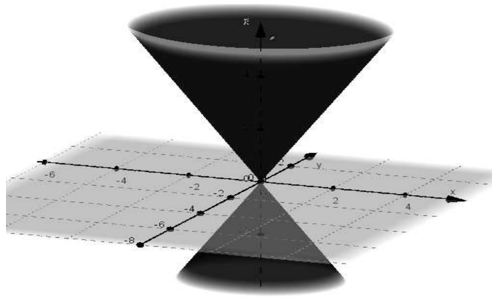
3. **Hyperboloïde à deux nappes :** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Plan :

$z = k$ Courbes de niveau : Hyperbole.
$x = k$ Sections transversales : Ellipse, point ou vide.
$y = k$ Sections transversales : Hyperbole.

4. **Cône elliptique :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$



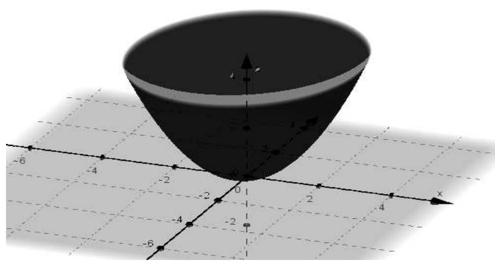
Plan :

$z = k$ Courbes de niveau : Ellipse ou point.

$x = k$ Sections transversales : Hyperbole ou intersection avec une droite.

$y = k$ Sections transversales : Hyperbole ou intersection avec une droite.

5. **Paraboloïde elliptique :** $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



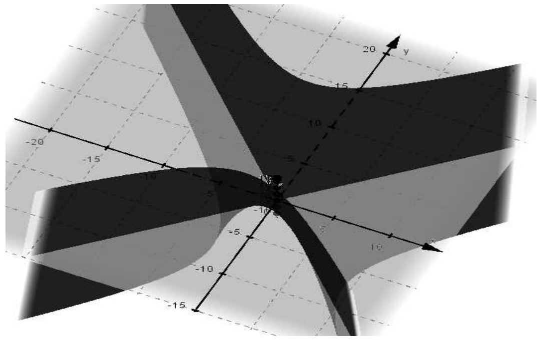
Plan :

$z = k$ Courbes de niveau : Ellipse, point ou vide.

$x = k$ Sections transversales : parabole.

$y = k$ Sections transversales : parabole.

6. **Paraboloïde hyperbolique :** $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Plan :

$z = k$ <u>Courbes de niveau</u> : Hyperbole ou intersection avec une droite.

$x = k$ <u>Sections transversales</u> : parabole.

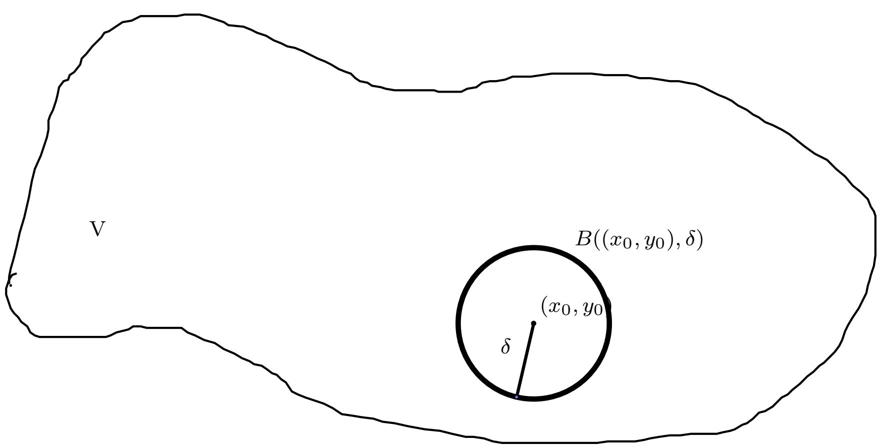
$y = k$ <u>Sections transversales</u> : parabole.

1.6 Limite d'une fonction de plusieurs variables

1.6.1 Voisinage et limite d'une fonction de deux variables

Définition 8 *On dit que V est un <u>voisinage</u> de $(x_{0,}y_0)$ s'il existe $\delta > 0$ tel que le disque :*

$$B((x_{0,}y_0), \delta) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < \delta \right\} \subseteq V$$



Remarque 2 *Contrairement à la droite réelle, dans le disque $B((x_{0,}y_0), \delta)$, il existe une infinité de chemins possibles pour s'approcher du point (x_0, y_0) quand $\delta \to 0$.*

Définition 9 *Soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction $f(x, y)$ tend vers l quand (x, y) tend vers $(x_0, y_{0)}$, et on note $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$, si et seulement si :*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \textit{tel que} \ 0 < \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon}$$

Exemple 16 *On considère la fonction $f(x,y) = 2x + 3y$, en utilisant la définition, démontrer que :*

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} f(x,y) = 11$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. On a l'inégalité suivante :

$$|f(x,y) - 11| = |2x + 3y - 11| = |2(x-1) + 3(y-3)| \leq 2|(x-1)| + 3|(y-3)|.$$

Puisque $|(x-1)| \leq \sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2}$ et $|(y-3)| \leq \sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2}$, alors on obtient :

$$|f(x,y) - 11| \leq 2\sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2} + 3\sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2} = 5\sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2}.$$

Donc, pour vérifier la définition 9, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. En effet :

$$\textit{Si } \sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \textit{ alors } |f(x,y) - 11| < 5\sqrt{|x-1|^2 + |y-3|^2} < 5\delta = 5.\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Proposition 2

1. *$\boxed{\text{Si la limite existe alors elle est unique.}}$*
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in C, \ \textit{pour tout chemin } C.}} f(x,y) = l$
3. *Si* $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in C_2}} f(x,y)$ *alors la limite n'existe pas.*

Exemple 17 *On voudrait calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.*
On remarque que : $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$, suivant le chemin $y = 0$.
et $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$, suivant le chemin $y = x$.
Les deux limites sont différentes, donc la limite n'existe pas.

Exemple 18 *Calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.*
Soit $m \neq 0$, on considère le chemin $y = mx$, on a :

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{3xm}{1+m^2} = 0.$$

En faisant varier m, on obtient une infinité de chemins. Même si la limite est égale suivant ces chemins, on ne pas conclure que la limite est égale à 0.

<u>*Il faut utiliser la définition ou enlever l'indétermination.*</u>

Dans ce cas, on va utiliser la définition, et la limite devrait être égale à 0.
Soit $\varepsilon > 0$, on a $|f(x,y) - 0| = \left|\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2}$,
car $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, donc, il suffit de prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Exemple 19 *Calculer* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Suivant les chemins $y = mx, m \neq 0$, *on a* $\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to(0,0)} \dfrac{mx}{x^2+m^2} = 0$.

Suivant le chemin $y = x^2, \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$.

Donc la limite n'existe pas, même si elle est égale à 0, suivant une infinité de chemins.

Théorème 1 *Si* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction à variable reélle continue en* l, *alors* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g \circ f(x,y) = g(l)$.

Exemple 20 $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy-1) = \ln(1) = 0$.

Théorème 2 *Si* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ *et* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l_1$ *existent alors :*

$$\boxed{\text{1) } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f+g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l + l_1.}$$

$$\boxed{\text{2) } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(fg)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = ll_1.}$$

$$\boxed{\text{3) } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(\frac{f}{g})(x,y) = \frac{l}{l_1}, \text{ si } l_1 \neq 0.}$$

1.6.2 Voisinage et limite d'une fonction de trois variables

Soient $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables, $(x_0, y_0, z_0) \in D(f), V \subset \mathbb{R}^3$.
On dit que V est un **voisinage** de (x_0, y_0, z_0) s'il existe $\delta > 0$ tel que la boule :

$$B((x_0, y_0, z_0), \delta) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} < \delta \right\} \subseteq V.$$

Dans la boule, il existe une infinité de chemins, courbes, surfaces possibles pour s'approcher de (x_0, y_0, z_0) quand $\delta \to 0$.

Définition 10 *Soit* $l \in \mathbb{R}$, *on dit que la fonction* $f(x,y,z)$ *tend vers* l *quand* (x,y,z) *tend vers* (x_0, y_0, z_0), *et on note* $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = l$, *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 + |z-z_0|^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y,z) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 21 $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} e^x(y^2 + z^2 - xy) = 2$.

Tous les résultats précédents restent valables.
De la même façon, on peut généraliser la notion de limite aux cas $n > 3$.

1.7 Continuité

Définition 11 *Soit* $f : D(f) \subseteq R^2 \to R$ *une fonction de deux variables,* $(x_0, y_0) \in D(f)$.
On dit que la fonction $f(x,y)$ *est continue en* (x_0, y_0), *si et seulement si :*

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).}$$

Si f *est continue en chaque point de* $U \sqsubseteq \mathbb{R}^2$, *alors on dit que* f *est continue sur* U.

Exemple 22 *Les fonctions polynomiales* $P(x,y)$ *à coefficients réels qui sont la somme des termes de la forme* cx^ny^m *sont continues dans* R^2.

La fonction $P(x,y) = 3x^5y^2 + 2x^2y^4 - y^3 + x^2$ est une fonction polynomiale de degré 7 ; et $lim_{(x,y)\to(1,1)} P(x,y) = P(1,1) = 5$.
Si $n \geq 3$, on peut généraliser la définition de la même façon.

Théorème 3 *Si $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en $X_0 \in D(f)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à variable réelle continue en $f(X_0)$, alors $g \circ f$ est continue en X_0.*

Théorème 4 *Soient f et g deux fonctions de n variables, continues en X_0, et $c \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions cf, $f+g$, fg sont continues en X_0, et la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en X_0 si $g(X_0) \neq 0$.*

Exemple 23 *La fonction* $f(x,y) = \dfrac{y^2 + x^3}{2 + x^2y^2}$ *est continue dans $\mathbb{R}^2$, comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur $2 + x^2y^2 \neq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

EX1) 1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(\sqrt{x+y} - \sqrt{y})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x}{x(\sqrt{x+y} + \sqrt{y})} = \frac{1}{2}.$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3 + 8y^3}{x + 2y} = \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{(x+2y)\,(x^2 - 2xy + 4y^2)}{(x+2y)} = 12$$

3. $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{e^x e^z - e^y e^z}{e^{2x} - e^{2y}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(e^x - e^y)e^z}{(e^x - e^y)\,(e^x + e^y)} = \frac{1}{2}.$$

EX2) a) $$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
et $$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$
Ces deux limites sont différentes, donc la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

b) $$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^{12}} = 0$$
et $\displaystyle\lim_{(x,x^3)\to(0,0)} \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{(x^6 + x^6)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{4x^{12}} = \frac{1}{4}$. Ces deux limites sont différentes, donc la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9 y}{(x^6 + y^2)^2}$ n'existe pas.

c) $$\lim_{(x,0,0)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$
et $\displaystyle\lim_{(0,0,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-z^2}{z^2} = -1$, la limite n'existe pas.

1.8 Dérivées partielles

Soient $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $h \in \mathbb{R}$; alors le point $(x_0 + h, y_0) = (x_0, y_0) + h(1,0)$, est situé sur la droite horizontale qui passe par le point (x_0, y_0). Quand $h \to 0$, on s'approche du point (x_0, y_0) en suivant la direction du vecteur $e_1 = (1,0)$; $(x_0, y_0 + h) \to (x_0, y_0)$.
On peut s'approcher du point (x_0, y_0) en suivant la direction du vecteur $e_2 = (0,1)$, c-à-d la droite verticale qui passe par le point (x_0, y_0).
En général :
Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $(x_0, y_0) + h(a,b) = (x_0 + ha, y_0 + hb)$ est le chemin qui s'approche de (x_0, y_0) suivant la direction du vecteur (a,b), quand $h \to 0$.

Définition 12 *Soit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $(x_{0,}y_0) \in D(f)$.*
La dérivéé partielle $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ de la fonction f au point $(x_0, y_{0)}$ par rapport à x est définie par :

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \text{ si la limite existe.}}$$

De même, La dérivée partielle $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ de la fonction f au point $(x_0, y_{0)}$ par rapport à y est définie par :

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}, \text{ si la limite existe.}}$$

Exemple 24 *Calculer les dérivées partielles par rapport à x et y de la fonction $f(x, y) = x^2y^3 + e^x + \ln(y)$ au point (1,4).*
Quand on calcule la dérivée partielle par rapport à x, on considère y comme une constante, donc, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + e^x + 0$, par conséquent, $\dfrac{\partial f(1, 4)}{\partial x} = 2.1.4^3 + e = 128 + e$.
De même, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 0 + \dfrac{1}{y}$, par conséquent, $\dfrac{\partial f(1, 4)}{\partial y} = 48 + \dfrac{1}{4}$.

Exemple 25 *Considérons la fonction* $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Calculons les dérivées partielles de f par rapport à x et y :
Si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \dfrac{(x^2 + y^2)\, y - xy2x}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}$.
De même, si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \dfrac{(x^2 + y^2)\, x - xy2y}{(x^2 + y^2)^2} = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$.
Si $(x, y) = (0, 0)$ alors $\dfrac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Par conséquent, même si les dérivées partielles de f existent partout dans R^2, la fonction n'est pas continue au point $(0, 0)$, car $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

$$\boxed{\textit{On en déduit que érivées partielles n'implique pas}}$$
$$\boxed{\textit{nécessairement la continuité de la fonction.}}$$

1.8.1 Dérivées partielles d'une fonction de trois variables

Si $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables, on définit de la même façon les dérivées partielles par rapport à x, y et z au point (x_0, y_0, z_0), par les limites:

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \text{ si la limite existe.}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 \ \ , y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \text{ si la limite existe.}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \text{ si la limite existe.}}$$

1.8.2 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Si $f : D(f) \subseteq R^n \to R$ une fonction de n variables, on définit de la même façon les dérivées partielles par rapport à $x_{i,0}$ au point $X_0 = (x_{1,0}, .., x_{i,0}, .., x_{n,0})$.

$$\boxed{\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_{i,0}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + he_i) - f(X_0)}{h}, \text{ si la limite existe,}}$$

avec $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, .., 0)$, 1 est placé à la i^{ième} place.

Remarque 3 *On avait remarqué que l'existence des dérivées partielles n'est pas une bonne généralisation de la notion de différentiabilité dans le cas d'une variable réelle, car elle n'assure même pas la continuité de la fonction.*

Dans ce qui va suivre, on va introduire la notion de différentiabilité qui est une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction d'une seule variable.

1.9 Différentiabilité

Pour $n = 2$,par analogie au cas $n = 1$,(voir page2), on va définir la notion de differentiabilité en remplaçant la partie linéaire $h \to f'(x_0)h$ par une application linéaire $(h, k) \to ah + bk$ de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a et b des constantes dans $\mathbb{R}$.

Définition 13 *Soit $f : D(f) \subseteq R^2 \to R$ une fonction de deux variables, $(x_0,y_0) \in D(f)$.*
On dit que la fonction f est <u>différentiable</u> au point $(x_0, y_{0)}$ s'il existe deux constantes réelles a, b telles que :

$$\boxed{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + r(h, k) \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.}$$

L'application $L(h, k) = ah+bk$ la partie linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (qui représente un plan) est appelée <u>*la dérivée de f*</u> au point (x_0, y_0) qu'on note par $Df(x_0, y_0)(h, k)$; la partie non linéaire $r(h, k)$ est appelée le <u>*reste*</u>.

L'application $L(h, k) = ah + bk$ la partie linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (qui représente un plan) est appelée <u>**la dérivée de f**</u> au point (x_0, y_0).
On la note la dérivée de f au point (x_0, y_0) par $Df(x_0, y_0)(h, k)$; $r(h, k)$ est appelé le <u>**reste**</u>.
Si on pose $X_0 + \Delta X = (x_0 + h, y_0 + k)$, $\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$, on obtient :

<u>Quelle est la relation entre les dérivées partielles et la différentiabilité ?</u>

Supposons que la fonction f est différentiable au point (x_0, y_0) et considérons la décomposition $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + r(h, k)$ au voisinage de f.
Prenons $k = 0$ et divisons l'égalité par $h \neq 0$,on obtient l'égalité :

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a + \frac{r(h, 0)}{h}.$$

Puisque $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$, alors $\lim_{h\to 0} \frac{r(h, 0)}{h} = 0$.
En passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient l'égalité suivante :

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a.}$$

Par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x existe, de plus :

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=a}$$

De même, la dérivée partielle par rapport à y existe, de plus :

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=b}$$

On obtient la proposition suivante :

Proposition 3 *Si la fonction f est différentiable au point (x_0,y_0) et qui admet la décomposition $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=ah+bk+r(h,k)$ au voisinage de (x_0,y_0) alors :*

1. *la fontion f est continue au point (x_0,y_0);*
2. *les dérivées partielles de f au point (x_0,y_0) existent ;*
3. *on a les égalités suivantes :*
   $$\boxed{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=a;\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=b.}$$

D'après l'exemple précédant, l'existence des dérivées partielles au point (x_0,y_0) n'implique pas nécessairement la continuité. Par conséquent, l'existence des dérivées partielles au point (x_0,y_0) n'implique pas nécessairement *la différentiabilité de la fonction* f au point (x_0,y_0) (proposition 3.1).

Proposition 4 *Soit $f:D(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue au point (x_0,y_0).*
Si les dérivées partielles de f au point (x_0,y_0) existent et sont continues au voisinage du point (x_0,y_0) alors la fonction f est différentiable au point (x_0,y_0).

Définition 14 *Soit $f:D(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction continue de deux variables. On dit que f est de classe C^1 dans un ensemble U, si ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans U.*

Pour démontrer la proposition précédente, on a besoin d'un théorème analogue au théorème des accroissements finis dans le cas $n=1$. Rappelons d'abord ce théorème.
Rappel du théorème des accroissements finis, $n=1$.

Théorème 5 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que :*

$$\boxed{f(b)-f(a)=f\,'(c)(b-a).}$$

Si on pose $[a,b]=[x,x+h]$ alors il existe un nombre θ compris entre 0 et 1 tel que :

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=hf\,'(x+\theta h).}$$

Première version du théorème des accroissements finis, $n=2$.

Théorème 6 *Soit $f:D(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables qui admet des dérivées partielles continues sur un voisinage V de $(x_0,y_0)\in D(f)$. Si les valeurs h,k sont suffisamment petites, alors il existe deux nombres θ_1 et θ_2 compris entre 0 et 1 tels que :*

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)}$$

Démonstration 1 *démonstration du théorème 6*

Les valeurs h, k sont suffisamment petites de telle sorte que les points (x_0,y_0+k), (x_0+h,y_0), (x_0+h,y_0+k) appartiennent à une boule $B(x_0,y_0)\subset V$.
On pose alors :
$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0) \quad (*)$.
On considère la fonction $g_1:[x_0,x_0+h]\to\mathbb{R}$ définie par $g_1(x)=f(x,y_0+k)$, la fonction g_1 vérifie les conditions du théorème des accroissements finis, donc il existe $0<\theta_1<1$ tel que :
$g_1(x_0+h)-g_1(x_0)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)$.
De la même façon, si on considère :
$g_2(x)=f(x_0,y)$, *alors, il existe* $0<\theta_2<1$ *tel que :*
$g_2(y_0+h)-g_2(y_0)=f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)=k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)$.
En remplaçant dans (*), on obtient la conclusion du théorème.

Démonstration 2 *de la proposition 4*

On pose $r(h,k)=\quad f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ (1).

Pour montrer que la fonction f est différentiable, il faut montrer que $\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$.
D'après, le théorème des accroissements finis, il existe deux nombres θ_1 et θ_2 compris entre 0 et 1 tels que :
$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)$.
En remplaçant dans (1), on obtient l'égalité suivante :
$r(h,k)=h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)+k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k).-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
Par conséquent :
$\left|\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\left|\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))+\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))\right|$.
En utilisant les inégalités $\left|\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq 1$ et $\left|\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq 1$,
on obtient l'inégalité (2) suivante :
$\left|\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\left|(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))\right|+\left|(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))\right|$
En utilisant la continuité des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, on obtient :
$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0))\right|=0$
$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0))\right|=0$.
Par conséquent, d'après (2), $\dfrac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$ quand $(h,k)\to(0,0)$.
On conclut que la fonction f est différentiable au point (x_0,y_0).

Définition 15 *Soit $f:D(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $(x_0,y_0)\in D(f)$.*
Si la fonction f est différentiable au point (x_0,y_0), alors le plan défini par l'équation :

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0).}$$

est appelé plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

1.9.1 Différentielle totale

Soit $z = f(x,y)$ une fonction différentiable au point (x_0, y_0),

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}$$

est appelée *l'accroissement de la fonction au point* (x_0, y_0), et l'expression :

$$\boxed{dz = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy}$$

est appelée *la différentielle totale de la fonction f* au point (x_0, y_0). On obtient alors le reste :

$$\boxed{r(h,k) = \Delta z - dz}$$

au voisinage de (x_0, y_0), on peut prendre $\Delta x \simeq dx, \Delta y \simeq dy$, on a l'approximation de l'erreur :

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \backsimeq dz = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy}$$

1.10 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Les dérivées partielles d'ordre un sont aussi des fonctions de plusieurs variables, en calculant successivement les dérivées partielles d'ordre un des fonctions dérivées partielles, on obtient des fonctions de plusieurs variables qu'on appelle les dérivées supérieures d'ordre 2.
Par exemple :
Si $z = f(x,y)$ est une fonction de de deux variables alors il existe quatre dérivées partielles d'ordre 2 qu'on note :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y)}$$

Les dérivées partielles mixtes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x,y)}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y)}$$

Par récurrence, on obtient les dérivées partielles d'ordre $n \geq 3$ d'une fonction de plusieurs variables en calculant successivement les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre $n-1$.
Par exemple :

1. Si $w = f(x,y,z)$ est une fonction de trois variables alors on peut définir une dérivée d'ordre 5 de la fonction f qu'on note par :

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = f_{zyyxy}(x,y,z).$$

On commence par calculer $\left(\frac{\partial}{\partial z} w\right)$ et ainsi de suite :

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z} w\right)\right)\right)\right).$$

2. Calculer les quatre dérivées partielles du second ordre $f(x,y) = xy^2 + 3x^2e^y$.
On calcule les deux dérivées partielles d'ordre 1, $\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = y^2 + 6xe^y$ $\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = 2xy + 3x^2e^y$, à partir de ces fonctions, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + 6xe^y\right) = 6e^y$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + 6xe^y\right) = 2y + 6xe^y$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + 3x^2e^y\right) = 2y + 6xe^y$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + 3x^2e^y\right) = 2x + 3x^2e^y.$$

On remarque que : $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(xy^2 + 3x^2e^y\right)$, mais ce résultat n'est pas toujours vrai dans le cas général.

Définition 16 *Soit f une fonction de plusieurs variables, on dit que la fonction f est de classe C^n si ses dérivées partielles d'ordre n sont continues.*

Par exemple :
1) On note par C^0 l'ensemble des fonctions continues.
2) C^1 est l'ensemble de classe C^0 tel que ses dérivées partielles sont continues.
3) C^2 est l'ensemble de classe C^0 et C^1 tel que ses dérivées partielles deux sont continues.

1.10.1 Égalité des dérivées partielles mixtes

Théorème 7 *Soit $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1, définie dans un voisinage V de $(x_0,y_0) \in D(f)$. Si les dérivées mixtes d'ordre deux $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues sur V alors :*

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x}.$$

Démonstration 3

Pour des valeurs de h, k suffisamment petites, on pose :

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

On définit respectivement deux fonctions u et v d'une variable réelle par :

$$u(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \quad \text{et} \quad v(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

Les fonctions u et v vérifient les conditions du théorème des accroissement finis.
Donc, il existe deux nombres $\theta_1$et θ_2 compris entre 0 et 1 tels que :
$u(x_0+h)-u(x_0)=hu'(x_0+\ \theta_1 h)$ et $v(y_0+k)-v(y_0)=kv'(y_0+\theta_2 k)$.
De plus

$$\Delta=u(x_0+h)-u(x_0)=v(y_0+k)-v(y_0).$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{ll}(1) & \Delta=\ h(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\ \theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0))\\ (2) & \Delta=k(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+\theta_2 k)).\end{array}$$

En fixant $x_0+\theta_1 h$ dans (1) et $y_0+\theta_2 k$ dans (2) d'après le théorème des accroissements finis, il existe deux nombres θ_3 et θ_4 compris entre 0 et 1 tels que :
$\Delta=\ hk(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\ \theta_1 h,y_0+\theta_3 k))=kh(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_2 k))$.
En simplifiant par $kh\neq 0$, on obtient :

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\ \theta_1 h,y_0+\theta_3 k))=(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_2 k)).$$

Les fonctions $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ sont continues au point $(x_{0,}y_0)$. Donc, en passant à la limite, quand (h,k) tend $(0,0)$, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$$

Remarque 4 *Ce résultat reste valable si on considère une fonction de n variables avec $n\geq 3$ et deux dérivées partielles d'ordre p où les dérivées sont effectuées par rapport aux mêmes variables, mais dans un ordre différent.*

Par exemple : $w=f(x,y,z)$, si w vérifie les conditions du théorème alors :

$$\frac{\partial^4 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial z\partial x\partial y}=\frac{\partial^4 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x\partial x\partial z\partial y}$$

1.10.2 Règle de dérivation en chaîne

Cette règle de dérivation en chaîne généralise le résultat de la dérivée des fonctions composées. Soient deux fonctions f et g d'une variable x suivant :

$$\frac{d}{dx}f(g(x)=f\ '(g(x)g'(x).$$

Si on pose $y=f(u)$ et $u=g(x)$,en utilisant les notations de Leibniz, on obtient la relation :

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

Considérons maintenant une fonction différentiable de deux variables $z=f(x,y)$, x,y deux fonctions de deux variables définies par $x=u(r,s),y=v(r,s)$.
Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial x}{\partial r}$,$\dfrac{\partial x}{\partial s}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial y}{\partial s}$ existent alors :

$$(1)\quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}} \quad \text{et} \quad (2)\quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}}$$

Exemple 26 *Considérons $z = x^2y^3$, $x = u(r, s) = r\cos(s)$, $y = v(r, s) = rsin(s)$.*
En utilisant la règle de chaîne, calculer $\frac{\partial z}{\partial r}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} &= 2xy^3\cos(s)+3x^2y^2(\sin(s))\\ &= 2(r^4\cos(s)\sin^3(s))\cos(s)+3(r^4\sin^2(s)\cos(^2(s))\sin(s)\\ &= 5r^4\cos^2(s)\sin^3(s).\end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}}.$$

Considérons maintenant une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, où $x = g(t)$, $y = h(t)$. Les fonctions h et g d'une variable réelle sont des fonctions dérivables.
La fonction $z = F(t) = f(g(t), h(t))$ est une fonction d'une variable t dont sa dérivée est donnée par l'expression :

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}g'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}h'(t).}$$

Théorème 8 *Supposons que la fonction $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est différentiable.*
Pour $i = 1, \cdots, n$, les fonctions $x_i = u_i(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ admettent des dérivées partielles $\frac{\partial x_i}{\partial yj}$ pour tout $j = 1, 2, \cdots, m$). Alors z est une fonction des variables $y_1, y_2, \cdots, y_m$, qui admet des dérivées partielles définies par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y_1}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial z}{\partial y_2}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\\ \frac{\partial z}{\partial y_m}&=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}.\end{aligned}$$

<u>La forme matricielle est donnée par</u> :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial z}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial z}{\partial y_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial z}{\partial x_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & .. & .. & \frac{\partial x_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & .. & .. & \frac{\partial x_2}{\partial y_m}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & . & . & \frac{\partial x_n}{\partial y_m}\end{pmatrix}.$$

Exemple 27 *Considérons la fonction $w = xy + xz + yz$, $x = r$, $y = r\cos(t)$ et $z = r\sin(t)$.*
Calculons les dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial r}$ et $\frac{\partial w}{\partial t}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} &= (x+y)(1)+(x+z)(\cos(t))+(x+y)(\sin(t)\\ &= 2r(\cos(t)+\sin(t))+2r(\cos(t)\sin(t)).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=r^2(\cos t-\sin(t))+r^2(\cos^2(t)-\sin^2(t)).$$

Si les n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des fonctions différentiables d'une seule variable t alors la fonction $z = F(t) = f(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ est une fonction d'une variable t dont la dérivée est donnée par :

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}}.$$

1.10.3 Gradients et dérivées directionnelles

Définition 17 *Soit f est une fonction de deux variables x, y, si les dérivées partielles premières existent alors on définit le gradient de f par le vecteur :*

$$\boxed{\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)}$$

La fonction dérivée $D(f)(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}(h,k)\to\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k$ *est définie par :*

$$\boxed{D(f)(x,y)(h,k)=\langle\nabla f(x,y),(h,k)\rangle},$$

où $\langle,\rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = (u_1, u_2)$ *un vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^2$ *, où* $u_1^2 + u_2^2 = 1$, *le point* (u_1, u_2) *appartient au cercle trigonométrique* $u_1^2 + u_2^2 = 1$, *donc u peut être représenté par un angle θ, c.à.d.* $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. *Quand on fait varier l'angle θ de 0 à 2π, on obtient toutes les directions dans le plan.*

Définition 18 *Soit* $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ *un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, la dérivée en un point (x_0, y_0) d'une fonction $f(x, y)$ dans la direction u est définie :*

$$\boxed{D_uf(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\cos(\theta),y_0+h\sin(\theta))-f(x_0,y_0)}{h}}.$$

Remarque 5 *La valeur $D_uf(x_0, y_0)$ représente le taux de variation de $f(x, y)$ correspondant à un petit déplacement suivant une droite contenant le point (x_0, y_0) et parallèlle au vecteur u. Si on considère la fonction $g(t) = f(x_0+t\cos(\theta), y_0+t\sin(\theta))$ à une variable réelle, on remarque que :*

$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\cos(\theta),y_0+h\sin(\theta))-f(x_0,y_0)}{h}=D_uf(x_0,y_0)$$

En appliquant la règle de chaîne à la fonction $g(t)$, on obtient l'égalité suivante :

$$D_uf(x_0,y_0)=\ g'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos(\theta)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin(\theta),$$

et le théorème suivant :

Théorème 9 *Si f est une fonction différentiable au point (x_0, y_0), $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ alors :*

$$\boxed{D_uf(x_0,y_0)=\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin(\theta)=\langle\nabla(f)(x_0,y_0),u\rangle}$$

où $\langle,\rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$

Remarque 6 *Si $v = (v_1, v_2)$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ quelconque, alors $u = \dfrac{v}{\|v\|}$ est un vecteur unitaire, on rappelle que $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ la norme usuelle dans $\mathbb{R}^2$.*
La dérivée en point (x_0, y_0) d'une fonction $f(x, y)$ dans la direction du vecteur v est définie :

$$\boxed{D_v f(x_0, y_0) = \frac{\langle \nabla(f)(x_0, y_0), v \rangle}{\|v\|}}.$$

Exemple 28 *Considérons la fonction $f(x, y) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9}$.*
Déterminer la dérivée au point $(4, 3)$ dans la direction $v = (1, 1)$.
La norme $\|v\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, le gradient :

$$\nabla(f)(4, 3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(4, 3), \frac{\partial f}{\partial y}(4, 3)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right).$$

Donc, $$D_v f(4, 3) = \frac{\langle \nabla(f)(4, 3), v \rangle}{\|v\|} = \frac{\left\langle (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (1, 1) \right\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{7}{12}\sqrt{2}.$$

Exercice 1 *Soit $u = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.*
Démontrer que la dérivée en un point (a, b, c) dans la direction u est donnée par :

$$D_u f(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\cos(\beta) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\cos(\gamma).$$

Exercice 2 *a) Soit $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables de classe C^2, on pose :*

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta).$$

En utilisant la règle de chaîne, montrer :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

b) Si $u = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables de classe C^2. Donner une égalité analogue, si on considère les coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 1 *Soit $u = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.*
Par définition la dérivée en un point (a, b, c) dans la direction u est donnée par :

$$D_u f(a, b, c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cos(\alpha), b + h\cos(\beta), c + h\cos(\gamma)) - f(a, b, c)}{h}.$$

Si on considère $g(t) = f(a + t\cos(\alpha), b + t\cos(\beta), c + t\cos(\gamma))$ comme une fonction de t,

$$\begin{aligned} g\prime(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a + (0 + h)\cos(\alpha), b + (0 + h)\cos(\beta), c + (0 + h)\cos(\gamma)) - f(a, b, c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cos(\alpha), b + h\cos(\beta), c + h\cos(\gamma)) - f(a, b, c)}{h}. \end{aligned}$$

Donc, $g\prime(0) = D_u f(a, b, c)$. En appliquant la règle de chaîne pour calculer $g\prime(0)$, on obtient l'égalité :

$$D_u f(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\cos(\beta) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\cos(\gamma).$$

Solution de l'exercice 2 *a) Soit $u = f(x, y)$ une fonction de deux variables de classe C^2, on pose $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$.*

En utilisant la règle de chaîne, et le fait que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ car $u = f(x, y) \in C^2$. On obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x})\cos(\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial y})\sin(\theta)$$
$$= (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\sin(\theta))\cos(\theta) + (\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin(\theta))\sin(\theta).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2(\theta) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2(\theta).$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos(\theta))$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial u}{\partial \theta}) = -\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x}(r\sin(\theta)) - (\frac{\partial u}{\partial x})r(\frac{\partial}{\partial \theta}\sin(\theta))$$
$$+\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos(\theta)) + \frac{\partial u}{\partial y}r(\frac{\partial}{\partial \theta}\cos(\theta))$$
$$= -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}r\cos(\theta))r\sin(\theta) - \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos(\theta))$$
$$+(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r\cos(\theta))r\cos(\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r(-\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r^2\sin^2(\theta)) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(r^2\sin(\theta)\cos(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2(\theta)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}(r\cos(\theta)) - \frac{\partial u}{\partial y}r(\sin(\theta)).$$

Donc, en remplaçant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ dans le deuxième terme, et en simplifiant, on obtient l'égalité :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

b) Si $u = f(x, y, z)$ une fonction de trois variables de classe C^2, les coordonnées cylindriques dans $\mathbb{R}^3$ sont données par :

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z.$$

On remarque que $\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = \dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$ et on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

1.11 Développement de Taylor

Dans cette section, on donne une généralisation de la formule de Taylor d'une fonction numérique d'une variable réelle de classe C^p.

Rappelons la formule de Taylor dans le cas $n = 1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p dans $[a,b]$, et supposons que la dérivée $(p+1)^{ième}$ existe dans $]a,b[$. Alors, il existe un nombre $c \in \,]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \dfrac{1}{2!} f\,''(a)(b-a)^2 + \dfrac{1}{3!} f\,'''(a)(b-a)^3 + \cdots + \dfrac{1}{p!} f^{(p)}(a)(b-a)^p + \dfrac{1}{p+1!} f^{(p+1)}(c)(b-a)^{p+1}$.
La formule de Taylor est une approximation d'une fonction f de classe C^p dans un voisinage d'un point donné par une fonction polynôme de degré p.
Soit $z = f(x,y)$ une fonction de deux variables de classe C^{p+1} dans un voisinage $V \subset D(f)$ d'un point (x_0, y_0), les valeurs h, k sont suffisamment petites de telle sorte que le point $(x_0 + h, y_0 + k)$ appartient à une boule $B(x_0, y_0) \subset V$, plus précisément V contient le segment de droite d'extrémités (x_0, y_0) et $(x_0 + h, y_0 + k)$. On peut obtenir la formule de Taylor au point au (x_0, y_0) en appliquant la formule de Taylor précédentes et la règle de chaîne.
On considère alors la fonction : $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ où $0 \le t \le 1$,

$$F(0) = f(x_0, y_0) \ et \ \ F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k).$$

En calculant respectivement les dérivées de F , en utilisant la règle de chaîne, et le fait que les dérivées mixtes soient égales, on obtient les égalités suivantes :

$$F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk),$$

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk),$$

$$\begin{aligned} F'''(t) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0 + th, y_0 + tk) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \\ +3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0 + th, y_0 + tk). \end{aligned}$$

Ainsi de suite, on remarque alors que :

$$\boxed{F^{(m)}(t) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0 + th, y_0 + tk),}$$

où $(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y})$ est un opérateur différentiel et $(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y})^m$ est donné par l'expression :

$$\boxed{(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^m = \textstyle\sum_{i_1+i_2=m} \dfrac{m!}{i_1! i_2!} h^{i_1} k^{i2} \dfrac{\partial^m f}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}}}$$

En appliquant la formule de Taylor à la fonction F dans $[0,1]$; on obtient la formule de Taylor d'ordre p :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) \\ +\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^3 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{p!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^p f(x_0, y_0) \\ +\frac{1}{p+1!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{p+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \end{aligned}$$

où $0 < \theta < 1$; $R_p(h,k) = \dfrac{1}{p+1!}(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y})^{p+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ est appelé le reste de Taylor et on obtient le théorème suivant :

Théorème 10 *(Formule de Taylor)*
Soit $z = f(x,y)$ une fonction de deux variables de classe C^{p+1} dans un voisinage $V \subset D(f)$ d'un point (x_0, y_0), les valeurs h, k sont suffisamment petites, alors il existe un nombre θ, tel que $0 < \theta < 1$ et :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0)$$

$$+\frac{1}{3!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^3 f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{p!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^p f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{p+1!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{p+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),$$

où $0<\theta<1$; *et* $R_{p,}(h,k)=\frac{1}{p+1!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{p+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ *est appelé le reste de Taylor. On obtient alors le développement de Taylor jusqu'à lordre* p.

Remarque 7 *Si* $p=0$ *c.à.d.* f *est de classe* C^1. *On généralise la première version du théorème des accroissements finis :*

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{\partial y}.$$

On obtient aussi une version équivalente au théorème des accroissement finis.

Théorème 11 *(Théorème des accroissement finis)*
Soient $z=f(x,y)$ *une fonction de deux variables,* $(x_0,y_0)\in D(f)$, V *un voisinage de* (x_0,y_0) *et* $(h,k)\in R^2$ *tel que* V *contient le segment de droite d'extrémités* (x_0,y_0) *et* (x_0+h,y_0+k). *Si* f *est différentiable sur le segment* $[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0+k)]$, *alors il existe* $0<\theta<1$ *tel que :*

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=h\frac{\partial f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{\partial y}}.$$

Généralisation, $n>2$ **:** Si on considère une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$, $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. On pose l'opérateur différentiel $L_h=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, on obtient : $f(a+h)=f(a)+(L_h)f(a)+\frac{1}{2!}(L_h)^2 f(x_0,y_0)+$

$$\frac{1}{3!}(L_h)^3 f(a)+\cdots+\frac{1}{p!}(L_h)^p f(a)\quad+\frac{1}{p+1!}(L_h)^{p+1}f(a+\theta h).$$

$$\boxed{(L_h)^m=\sum_{i_1+i_2+...+i_n=m}\frac{m!}{i_1!i_2!\cdots i_n}h_1^{i_1}h_2^{i_2}\cdots h_n^{i_n}\cdot\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}}.$$

Exemple 29 *Si* $p=2$, *on obtient :*

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)+k\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)+$$
$$\frac{1}{2!}(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0))$$
$$+\frac{1}{3!}(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\quad f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\quad f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$
$$+3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\quad f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\quad f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)).$$

Si on pose $(x_0+h,y_0+k)=(x,y)$ *alors* $h=x-x_0$ *et* $k=y-y_0$, *en remplaçant dans la formule, on obtient :*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)$$
$$+\frac{1}{2!}((x-x_0)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)+(y-y_0)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0))$$
$$+\frac{1}{3!}((x-x_0)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}\quad f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$$

$$+3\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)\,\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\quad f(x_0+\theta\,(x-x_0)\,,y_0+\theta\,(y-y_0))$$
$$+3\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2\,\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\quad f(x_0+\theta\,(x-x_0)\,,y_0+\theta\,(y-y_0))$$
$$+\,(y-y_0)^3\,\frac{\partial^3}{\partial y^3}\quad f(x_0+\theta\,(x-x_0)\,,y_0+\theta\,(y-y_0))).$$

Exemple 30 *Déterminer le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de la fonction* $f(x,y) = e^x\cos(y)$ *au voisinage du point* $(0,0)$. *D'après la formule de Taylor, on a :*

$$f(0+h,0+k) = f(0,0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) + k\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)\right) + \frac{1}{2!}(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0) + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0) + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0)) + reste.$$

On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de lafonction f, *on obtient :*

$f(0,0) = 1,\ \ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = e^x\cos(y), \frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = 1,$ *de même,* $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = 0,$

$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(0,0) = 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0) = 1, \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0) = -1,$ *et donc :*

$e^h\cos(k) = 1 + h + \frac{1}{2}(h^2 - k^2) + reste$ *est le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de la fonction* $f(x,y) = e^x\cos(y)$ *au voisinage du point* $(0,0)$.

Exemple 31 *Donner développement de la fonction* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$ *jusqu'à l'ordre 2 au voisinage du point (1,2).*

Donner une approximation de la valeur $\sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3}$.

Calculons la valeur et les dérivées d'ordre 1 et 2 de la fonctions $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$, *au point* $(1,2)$, *on obtient :*

$$f(1,2) = 3,\ \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}},\qquad \frac{\partial}{\partial x}f(1,2) = \frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}},\ \frac{\partial}{\partial y}f(1,2) = 2,$$

De même, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(1,2) = \frac{-2}{9},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(1,2) = \frac{8}{27},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(1,2) = \frac{2}{3}.$

On obtient le développement suivant :

$f(1+h,2+k) = 3 + \frac{1}{3}h + 2k + \frac{4}{27}h^2 - \frac{2}{9}hk + \frac{2}{3}k^2 + reste.$

$f(x,y) = 3 + \frac{1}{3}(x-1) + 2(y-3) + \frac{4}{27}(x-1)^2 - \frac{2}{9}(x-1)(y-3) + \frac{2}{3}(y-3)^2 + reste.$

Si on pose $1,02 = 1 + 0,02 = 1 + h,\quad 1,97 = 2 - 0,03 = 1 + k,$ *on obtient :*

$\sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3} \approx 3 + \frac{1}{3}0,02 + 2(-0,03) + \frac{4}{27}(0,02)^2 - \frac{2}{9}(0,02)(-0,03) + \frac{2}{3}(-0,03)^2,$ *et l'approximation :* $\sqrt{(1,02)^2+(1,97)^3} \approx 2,947159.$

1.12 Extremums d'une fonctions numériques

Définition 19 *Soit* $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique de plusieurs variables. Un point* p_0 *est appelé minimum local (ou relatif) s'il existe un voisinage* V *de* p_0 *tel que :* $f(p_0) \le f(x),\ \ \forall x \in V \subset D(f)$.

Un point p_0 *est appelé* <u>*minimum local strict*</u> *si* $f(p_0) < f(x),\ \ \forall x \in V \subset D(f)$.

Un point p_0 *est appelé* <u>*maximum local*</u> *si* $f(p_0) \ge f(x),\ \ \forall x \in V \subset D(f)$.

Un point p_0 *est appelé* <u>*maximum local strict*</u> *si* $f(p_0) > f(x), \forall x \in V \subset D(f)$.

Un point p_0 *est appelé* <u>*extremum local*</u> *si* p_0 *est un maximum local ou un minimum local.*

Un point p_0 est appelé _minimum absolu_ *sur un ensemble* $U \subseteq D(f)$ *si* $f(p_0) \leq f(x)$, $\forall x \in U$.
Un point p_0 est appelé _maximum absolu_ *sur un ensemble* $U \subseteq D(f)$ *si* $f(p_0) \geq f(x), \forall x \in U$.

Définition 20 *Soit $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables.*
Un point p_0 tel que le gradient $\nabla f(p_0\ ) = 0$ ou n'existe pas (c-à-d une au moins des dérivées partielles n'existe pas) est appelé _un point critique_.
Un point critique tel que le gradient $\nabla f(p_0\ ) = 0$ est appelé _point stationnaire_.
Un point critique tel que le gradient $\nabla f(p_0\ )$ n'existe pas est appelé _point singulier_.
Un point critique qui n'est pas un extremum local est appelé un _point de selle_.

Exemple 32 *Si on considère la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, le gradient de f existe pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(p_0\ ) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 2x_0 = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = 2y_0 = 0$.*
Le point $(0,0)$ est un point critique, $f(0,0) \leq f(x,y)$, minimum local et même absolu pour $\mathbb{R}^2$.

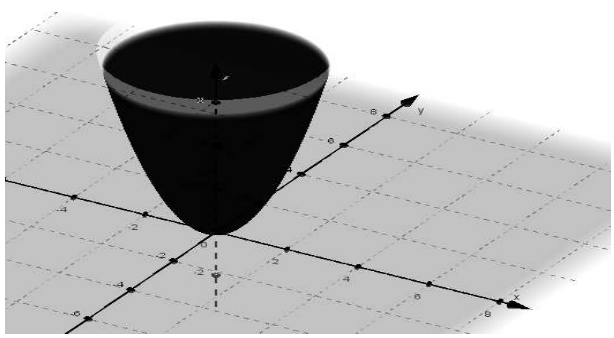


FIGURE 1.25 – Graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$

Exemple 33 *Si on considère la fonction $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$, le gradient de f existe pour tout $x \in R^2$, $\nabla f(p_0\ ) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = 2x_0 = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = -2y_0 = 0$.*
Le point $(0,0)$ est un point critique, $f(0,0) = 1, f(x,0) \geq 1$, $f(0,y) \leq 1$. On a un point de selle.

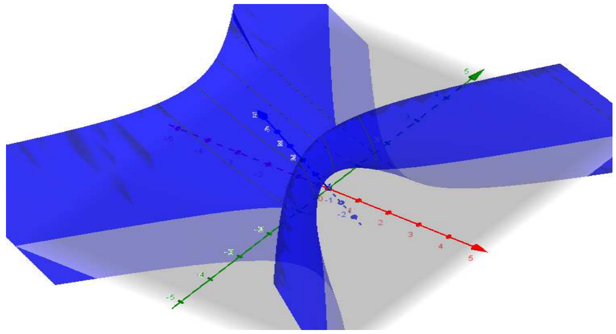


FIGURE 1.26 – Graphe de la fonction $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$

1.12.1 Classification des points stationnaires d'une fonction de deux variables

Soit (a, b) un point stationnaire d'une fonction de deux variables, pour classifier ce point comme maximum local, minimum local, ou point de selle, il faut étudier le signe de l'accroissement $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$ au voisinage du point (a, b). On peut aussi utiliser la formule de taylor au voisinage du point (a, b).

Exemple 34 *Identifier et classifier les points stationnaires de la fonction* $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. *Le gradient de* f *existe pour tout* $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 = y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -6 + 6y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Donc $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ *ou* $x = 1$. *Les points* $(0,0)$, $(1,1)$ *sont des points critiques et* $f(0,0) = 0, f(1,1) = -1$. *Au voisinage de* $(0,0)$, *on a* $\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = 2h^3 - 6kh + 3k^2$, *donc* $f(h,0) = 2h^3$ *positive si* $h > 0$ *et négative si* $h < 0$. *On a un point de selle.*
Au voisinage de $(1,1)$,*on a :*

$$\Delta f = f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 3(h-k)^2 + h^2(3+2h).$$

Si $|h| < \frac{3}{2}$ *alors* $\Delta f > 0$ *et donc* $(1,1)$ *est un minimum local.*

On remarque que si une fonction de classe C^2 donc on peut utiliser la formule de taylor jusqu'à l'ordre deux :

$$\Delta f = \frac{1}{2!}(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b)) + reste.$$

Le problème revient alors à étudier le signe de l'équation quadratique

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b) + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b)$$

au voisinage de (a,b). On obtient le théorème suivant :

Théorème 12 *(conditions du second ordre) Soit $f : D(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 dans un voisinage de (a,b) tel que $\nabla f(a,b) = 0$. On considère la matrice symétrique :*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b) \end{pmatrix}$$

appelée la matrice Hessienne.
On pose $\Delta f(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a,b) - (\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b))^2$ le déterminant de la matrice Hessienne. Alors on obtient les propositions suivantes :
1) Si $\Delta f(a,b) > 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) > 0$ alors (a,b) est un minimum relatif.
2) Si $\Delta f(a,b) > 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) < 0$ alors (a,b) est un maximum relatif.
3) Si $\Delta f(a,b) < 0$ alors (a,b) est un point de selle.
4) Si $\Delta f(a,b) = 0$ alors on ne peut pas conclure, (a,b) peut être un minimum relatif, un maximum relatif, ou un point de selle.

Donc, il faut continuer l'étude en utilisant la formule de Taylor jusqu'à l'ordre désiré si c'est possible ou utiliser une autre méthode.

Exemple 35 *Identifier et classifier les points critiques de la fonction :*

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$

Le gradient de f existe pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, de plus

$$\nabla f(p\ ) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 6x^2 - 6y = 0 \Rightarrow x^2 = y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -6x + 6y = 0 \Rightarrow x = y.$$

Donc $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$.
Par conséquent, les points $(0,0)$, $(1,1)$ sont les points critiques de f.
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 12x$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = -6$, $\frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x,y) = 6$.
Donc, $\Delta f(0,0) = 0 - 36 = -36 < 0, (0,0)$ est un point de selle.
$\Delta f(1,1) = 72 - 36 = 36 > 0$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) = 12 > 0$, *le point $(1,1)$ est un minimum relatif.*

Exemple 36 *Identifier et classifier les points stationnaires de la fonction $f(x,y) = xye^{-(\frac{x^2+y^2)}{2}}$.*
Le gradient de f existe pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, p est un point critique si :

$$\nabla f(p\ ) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y(1-x^2)e^{-(\frac{x^2+y^2)}{2}} = 0 \Rightarrow y(1-x^2) = 0 \ (1) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x(1-y^2)e^{-(\frac{x^2+y^2)}{2}} = 0 \Rightarrow x(1-y^2) = 0 \ (2) \end{cases}$$

De (1) et (2), on obtient $(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ *comme points critiques. De plus,*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = xy(x^2-3)e^{-(\dfrac{x^2+y^2)}{2}},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)e^{-(\dfrac{x^2+y^2)}{2}},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x,y) = xy(y^2-3)e^{-(\dfrac{x^2+y^2)}{2}}.$$

Donc, en calculant les valeurs aux points critiques, on obtient que :
$\Delta f(0,0) < 0$, *le point* $(0,0)$ *est un point de selle.*
$\Delta f(1,1) > 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,1) > 0$, *le point (1,1) est un minimum relatif.*
$\Delta f(-1,-1) > 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(-1,-1) > 0$, *le point (-1,-1) est un minimum relatif.*
$\Delta f(1,-1) > 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,-1) < 0$, *le point (1,-1) est un maximum relatif.*
$\Delta f(-1,1) > 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(-1,1) < 0$, *le point (-1,1) est un maximum relatif.*

1.13 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de n variables, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. On considère le problème suivant :

$$\text{Optimiser } f(X) \text{ sous la contrainte } g(X) = 0.$$

Si $n = 2$, Optimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$. On remarque que l'équation $g(x,y) = 0$ représente une courbe de niveau.
Si $n = 3$, Optimiser $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$. On remarque que l'équation $g(x,y,z) = 0$ représente une surface de niveau.

Exemple 37 *Déterminer les valeurs maximale et minimale de la fonction :* $f(x,y) = x^2 + y$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 - 9 = 0$.
Pour résoudre ce problème, on utilise le théorème suivant, on se limite au cas $n = 2$, *mais le résultat reste valable si* $n \geq 3$.

Théorème 13 *Soit* f *et* g *deux fonctions de deux variables de classe* C^1 *dans un voisinage de* (x_0, y_0). *Alors le point* (x_0, y_0) *est un minimum ou un maximum de la fonction* $f(x,y)$ *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$. *Si* $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ *alors il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ *c-à-d les vecteurs gradients* $\nabla g(x_0, y_0)$ *et* $\nabla g(x_0, y_0)$ *sont parallèles.*

Démonstration 4

La contrainte $g(x,y) = 0$ définit une courbe C dans le plan. Donc, si $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$alors $\nabla g(x_0, y_0)$ est orthogonal à la courbe C au point (x_0, y_0) contenu dans C.
Soit $(x(t), y(t))$ la représentation paramétrique de la courbe C, donc, il existe t_0 tel que

$$r(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0).$$

On considère la fonction $h : t \to f(x(t), y(t))$ à valeur réelle qui admet un extremum relatif au point $(t_0, h(t_0))$. Par conséquent $h'(t_0) = 0$, en utilisant la règle de chaîne, on obtient :

$$h'(t_0) = \frac{\partial f(r(t_0))}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial f(r(t_0))}{\partial y} y'(t_0) = 0.$$

Donc

$$\big\langle \nabla f(x_0, y_0), r'(t_0) \big\rangle = \frac{\partial f(r(t_0))}{\partial x} x'(t_0) + \frac{\partial f(r(t_0))}{\partial y} y'(t_0) = 0, r'(t_0) \neq 0$$

car $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$. On conclut que $\nabla f(x_0, y_0)$ est orthogonal à $r'(t_0)$ le vecteur tangent à la courbe C, par conséquent $\nabla f(x_0, y_0)$ et $\nabla g(x_0, y_0)$ sont tous les deux orthogonaux à la courbe C au point (x_0, y_0) et donc, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ pour certains $\lambda \in \mathbb{R}$.

On introduit alors la fonction :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

appelé le Lagrangien, λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte.
D'après le théorème 13, si (x_0, y_0) est un maximum ou minimum alors (x_0, y_0) est un point critique de $F(x, y, \lambda)$, ce qui équivalent à $\nabla F(x_0, y_0, \lambda) = 0$, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\ F(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\ F(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\ F(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial\ g(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial\ g(x,y)}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right\}$$

On remarque que les gradients de f et de g sont parallèles.
Revenons à l'exemple 37, on obtient :

$$(1)\ 2x = 2\lambda x \ \Rightarrow \ x = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

$$(2)\ 1 = 2\lambda y$$

$$(3)\ x^2 + y^2 - 9 = 0$$

Si $\lambda = 1$ alors de l'équation (2) : $y = \dfrac{1}{2}$, si on remplace dans (3), on a $x^2 = 9 - \frac{1}{4} = \dfrac{35}{4}$, et donc $x = \pm\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.
Si $x = 0$ alors de (3), $y = \pm 3$.
Les points critiques de F : $(0,3), (0,-3), (\dfrac{\sqrt{35}}{2}, \dfrac{1}{2})$, $(-\dfrac{\sqrt{35}}{2}, \dfrac{1}{2})$, $f(0,3) = 3, f(0,-3) = -3$, $f(\dfrac{\sqrt{35}}{2}, \dfrac{1}{2}) = f\ (-\dfrac{\sqrt{35}}{2}, \dfrac{1}{2}) = \dfrac{37}{4}$.
Donc $\dfrac{37}{4}$ est la valeur maximale et -3 est la valeur minimale.
Si $n = 3$, Optimiser $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$, on considère alors le Lagrangien

$$F(x, y, , z, \lambda) = f(x, y, z)\ - \lambda\ g(x, y, z).$$

on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\, F(x,y,,z,\lambda)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial\, F(x,y,z,\lambda)}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial\, F(x,y,z,\lambda)}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial\, F(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial\, f(x,y,z)}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial\, g(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\, f(x,y,z)}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial\, g(x,y,z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\, f(x,y,z)}{\partial z}=\lambda\dfrac{\partial\, g(x,y,z)}{\partial z} \\ g(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$$

Exemple 38 *Déterminer les valeurs maximale et minimale de la fonction :* $f(x,y,z)=x+2y-z$ *sous la contrainte* $x^2+y^2+z^2=1$. *On pose* $F(x,y,,z,\lambda)=x+2y-z\ -\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ *et on obtient le système :*

$$\begin{array}{l} (1)\ 1=2\lambda x \quad \Rightarrow \quad (1)'\ 1=(2\lambda x)^2 \\ (2)\ 2=2\lambda y \quad \Rightarrow \quad (2)'\ 4=(2\lambda y)^2 \\ (3)\ -1=2\lambda z \Rightarrow \quad (3)'\ 1=(2\lambda z)^2 \\ (4\ )\ x^2+y^2+z^2=1, \end{array}$$

La somme de (1)',(2)',(3)' donne $6=4\lambda^2(x^2+y^2+z^2)$, *de (4), on a* $6=4\lambda^2$, *et* $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Si $\lambda=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ *alors, des équations (1),(2), et (3), le point* $(\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{6})$ *est un point critique.*

Si $\lambda=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ *alors, des équations (1),(2), et (3), le point* $(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6})$ *est un point critique.*

Donc, $f\ (\dfrac{\sqrt{6}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{6})=\sqrt{6}$ *est la valeur maximale, et* $f(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{6})=-\sqrt{6}$ *est la valeur minimale.*

Cas général : Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonctions de n variables, $X=(x_1,x_2,...,x_n)$.
On considère le problème suivant :

(*) Optimiser $f(X)$ sous la contrainte $g_1(X)=0,g_2(X)=0,....,g_m(X)=0$, $m<n$.

On définit alors le Lagrangien :

$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,....,\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)-\lambda_1 g_1(x_1,x_2,...,x_n)-.....-\lambda_m g_m(x_1,x_2,...,x_n)$.

Donc, tous les points qui sont solutions du problème d'optimisation (*) sont nécessairement des points critiques du Lagrangien F.

Exemple 39 *Déterminer les valeurs maximale et minimale de la fonction :*
$f(x,y,z)=xz+yz$ *sous la contrainte* $x^2+z^2=2$ *et* $yz=2$.
On pose

$$F(x,y,,z,\lambda,\mu)=xz+yz-\lambda(x^2+z^2-2)-\mu(yz-2)$$

et on obtient le système :

$$(1) z-2\lambda x=0$$

$$(2) z-\mu z=0$$

$$(3) x+y-2\lambda z-\mu y=0$$

$$(4) x^2+z^2=2,$$

$$(5) yz=2.$$

L'équation (1) donne $\mu=1$ *ou* $z=0$. *De l'équation (5),* $z\neq 0$ *et de (1)* $x\neq 0$.

Si $\mu=1$ *alors de (1) on a* $\lambda=\dfrac{z}{2x}$ *et en substituant dans (3), on obtient* $x+y-\dfrac{z^2}{x}-y=0$, *et donc* $x^2=z^2$. *De (4), on obtient,* $2x^2-2=0\Rightarrow x=\pm 1$. *On obtient les points critiques :* $(1,2,1)$, $(1,-2,-1)$, $(-1,2,1)$, $(-1,-2,-1)$. *De plus,* $f(1,2,1)=3$, $f(-1,2,1)=1$, $f(1,-2,-1)=1$, $f(-1,-2,-1)=3$. *La valeur 3 est maximale et la valeur 1 est minimale.*

1.14 Détermination d'une fonction à partir de son gradient

Définition 21 *Soit f une fonction de deux variables, on dit que la fonction $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ dérive d' un potentiel f si $\nabla f(x,y)$ existe et $\nabla f(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$. On a aussi :*

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Exemple 40 *Si $f(x,y) = xe^{2y}$ alors $\nabla f(x,y) = F(x,y) = (e^{2y}, 2xe^{2y})$.*
Si $g(x,y) = xe^{2y} + c$, où c est une constante alors $g(x,y)$ est aussi un potentiel de $F(x,y)$.

Exemple 41 *Soit $F(x,y) = (3x^2 + 2y^2, 4xy)$, déterminer $f(x,y)$ tel que :*

$$(1) \quad \nabla f(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

L'égalité (1) implique : $(2)\ \dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 2y^2$

et $(3)\ \dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 4xy.$

En intégrant l'équation (2) par rapport à x, on obtient :

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (3x^2 + 2y^2)dx = x^3 + 2y^2x + h(y);$$

h est une fonction qui ne dépend que de la variable y. En dérivant par rapport à y, on obtient :

$$\frac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = 4xy + h'(y) = 4xy \Rightarrow \qquad h'(y) = 0 \Rightarrow\ h(y) = c.$$

Par conséquent : $f(x,y) = x^3 + 2y^2x + c$.
Supposons maintenant que $F(x,y) = (3y, -2x)$, on voudrait déterminer $f(x,y)$ tel que :

$$(1)\ \nabla f(x,y) = F(x,y) = (3y, -2x).$$

On obtient : $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = 3x + h'(y) = -2x \Rightarrow \quad h'(y) = 5x,$
si on dérive par rapport à x, on obtient $0 = 5$ qui donne une contradiction.
On conclut que $F(x,y) = (3y, 2x)$ ne dérive pas d'un potentiel f .
On considère une fonction f de deux variables de classe C^2 tel que :

$$(1)\ df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Donc,

$$(2)\ \frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ et } (3)\ \frac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Puisque les dérivéés mixtes sont égales, on obtient :

$$\frac{\partial\ ^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\ M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\ N(x,y)}{\partial x}$$

On obtient le théorème suivant :

Théorème 14 *Si M et N deux fonctions de deux variables définis sur une boule de $\mathbb{R}^2$.*
Si $\dfrac{\partial\ M(x,y)}{\partial y}$ *et* $\dfrac{\partial\ N(x,y)}{\partial x}$ *sont continues alors $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ dérive d'un potentiel f si et seulement si :*

$$\frac{\partial\ M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\ N(x,y)}{\partial x}$$

Exemple 42 *Soit* $F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y))$, *déterminer* $f(x,y)$ *tel que :*

$$(1)\ \nabla f(x,y) = F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y))$$

On a $\dfrac{\partial\ M(x,y)}{\partial y} = -e^{-y} = \dfrac{\partial\ N(x,y)}{\partial x}$, *donc* F *dérive d'un potentiel* f.
L'égalité (1) implique : (2) $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = e^{-y} - 2x$ *et (3)* $\dfrac{\partial\ f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} - \sin(y)$.
En intégrant l'équation (2), on obtient :

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (e^{-y} - 2x)dx = xe^{-y} - x^2 + h(y);$$

h *est une fonction qui ne dépend que de la variable* y. *En dérivant par rapport à* y, *on obtient :*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} + h'(y) = -xe^{-y} - \sin(y) \Rightarrow\ h'(y) = -\sin(y) \Rightarrow\ h(y) = \cos(y) + c.$$

Par conséquent : $\quad f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) + c$.
Considérons maintenant trois fonctions M, N, *et* R *de trois variables et que :*

$$(1)\quad df = M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Donc, on a

$$(2)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z),\quad (3)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (4)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Si $\dfrac{\partial\ M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\ N}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\ M}{\partial z}$, $\dfrac{\partial\ R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\ R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\ N}{\partial z}$ *sont continues alors :*

$$F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z))$$

dérive d'un potentiel f *si et seulement si*

$$\frac{\partial\ M}{\partial y} = \frac{\partial\ N}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial\ M}{\partial z} = \frac{\partial\ R}{\partial x}\ ,\ et\ \frac{\partial\ R}{\partial y} = \frac{\partial\ N}{\partial z}.$$

Exemple 43 *Soit* $F(x,y,z) = (e^x \sin(z) + 2yz,\ 2xz + 2y, e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2),$.
déterminer $f(x,y,z)$ *tel que :*

$$(1)\ \nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$$

M, N, *et* R *vérifient les conditions. L'égalité (1) implique :*

$$(2)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z),\ (3)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (4)\ \frac{\partial\ f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

En intégrant l'équation (2), on obtient : $f(x,y,z) = \int M(x,y)dx = e^x\sin(z) + 2yzx + h(y,z);$
h *est une fonction qui ne dépend que des variables* y *et* z. *En dérivant par rapport à* y, *on obtient :*

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^x\sin(z) + \frac{\partial\ h(y,z)}{\partial y} = 2xz + 2y \Rightarrow \frac{\partial\ h(y,z)}{\partial y} = 2y$$

$\Rightarrow\ h(y,z) = y^2 + g(z)$. *En dérivant par rapport à* z, *on obtient :*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x\cos(z) + 2xy + g'(z) = e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2 \Rightarrow g\prime(z) = 3z^2$$

$$et\ donc\ g(z) = z^3 + c.$$

Par conséquent :

$$f(x,y,z) = e^x\sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c.$$

Exercice 3 *Identifier et classifier les points critiques de la fonction suivante :*

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

1.15 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

On considère un champ de vecteurs $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y)) = M(x, y)i + N(x, y)j$ où $i = (1, 0), j = (0, 1)$ la base canonique de R^2, $M(x, y)$ et $N(x, y)$ deux fonctions numériques continues dans une boule ouverte.
En physique, le travail w d'une force constante associé à un déplacement d'un point A à un point B est déterminé par : $w = \langle F, AB\rangle$, le produit scalaire de la force F par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Soit maintenant C une courbe, $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, une représentation paramétrique de C. Si C est une courbe lisse, par exemple les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de classe C^1 et si $F(x, y)$ est une force variable, on voudrait calculer le travail de F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$.
Le long de la courbe, la force F est donnée par :

$$F(x(t), y(t)) = M(x(t), y(t))i + N(x(t), y(t))j,\ a \leq t \leq b.$$

On considère alors une partition (subdivision) de l'intervalle $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$
Soient $P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ et $P_i(x(t_i), y(t_i))$ deux points de la courbe C, on considère le vecteur :

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x(t_i) - x(t_{i-1}))i + (y(t_i) - y(t_{i-1}))j \qquad (1)$$

Les fonctions $x(t), y(t)$ sont de classe C^1, donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe c_i, d_i dans $]a, b[$ tel que :

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \text{ et } \ y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Donc, en remplaçant dans (1) on obtient :

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1})$$

D'autre part, on considère le vecteur constant :

$$F_i = M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j$$

qui est une approximation de la force $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i, pour chaque i. On obtient alors une approximation du travail de $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i, pour chaque i, par la formule :

$$\begin{aligned}\Delta w_i &= \langle M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j, (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1})\rangle \\ &= M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

On obtient alors une approximation du travail de F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$ par :

$$S_n = \textstyle\sum_{i=1}^n M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1})$$

La somme S_n est une somme de Riemann d'une fonction intégrable :

$$h(t) = \langle F(x(t), y(t)), r'(t)\rangle = M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t)$$

Quand $n \to \infty$, on obtient l'expression :

$$W = \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt$$

Définition 22 *Soit C une courbe définie sur une boule ouverte par l'équation paramétrique $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ telle que les fonctions $x'(t)$ et $y'(t)$ soient continues. On définit alors l'intégrale cuviligne de $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ la composante tangentielle de $F(x, y)$ continue le long de la courbe C par :*

$$\begin{aligned}\textstyle\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt \\ = \textstyle\int_a^b \langle F(r(t), r'(t)\rangle \, dt.\end{aligned}$$

$\langle F(r(t), r'(t)\rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 44 *Un objet se déplace le long d'une parabole du point A(-1,1) au point B(2,4). Déterminer le travail total de la force $F(x, y) = (x^2 + y^2)i + 3x^2yj$, le long de la courbe C.*

L'équation paramétrique de la courbe est donnée par $r(t) = (t, t^2)$, au point A, on a $t = -1$, $t^2 = 1$, au point B, on a $t = 2, t^2 = 4$, donc $-1 \leq t \leq 2$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^{2} \left\langle F(t, t^2), (x'(t), y'(t)\right\rangle dt \\ &= \int_{-1}^{2} ((t^2 + t^4)(1) + (3t^2t^2)(2t))dt \\ &= \int_{-1}^{2} (t^2 + t^4 + 6t^5)dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6\right]_{-1}^{2} = \frac{363}{5}. \end{aligned}$$

Si $F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ est un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, où

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0) \text{ et } k = (0, 0, 1)$$

la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont des fonctions numériques continues dans une boule ouverte de $\mathbb{R}^3$, C est une courbe déterminée par l'équation paramétrique : $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, telle que les fonctions $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ sont de classe C^1. Alors, on définit de la même façon, l'intégrale curviligne

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

la composante tangentielle de $F(x, y, z)$ continu le long de la courbe C par :

$$\begin{aligned} \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \int_a^b \left\langle F(r(t), r'(t)\right\rangle dt \\ &= \int_a^b (M(x(t), y(t), z(t))x'(t) + N(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt \end{aligned}$$

Exemple 45 *Si on considère la courbe C : $r(t) = (t, t^2, t^3), 0 \leq t \leq 1$, et le champ de vecteurs $F(x, y, z) = (e^x, xe^z, x\sin(\pi y^2))$ alors :*

$$\begin{aligned} \int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \int_0^1 (e^t + e^{t^3}(2t) + \sin(\pi t^4)(3t^3))dt \\ &= \left[e^t + \frac{2}{3}e^{t^3} - \frac{3}{4\pi}\cos(\pi t^4)\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}e - \frac{5}{3} + \frac{3}{2\pi} \end{aligned}$$

Proposition 5 *Considérons une courbe définie par morceaux de courbes lisses C_1, C_2, ..., C_n (voir figures) alors :*

$$\int_C F.dr = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F.dr$$

Exemple 46 *Calculer l'intégrale curviligne : $\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$, le long de la courbe définie par : le segment C_1 qui relie les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ et l'arc C^2 du premier quadrant du cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.*

L'équation de la droite qui passe par les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ est donnée par $x = 1 + 2y$, donc on peut représenter le segment C_1 par : $r(t) = (1 + 2t, t)$, $-2 \leq t \leq 0$.
La courbe C_2 est représentée par : $x = \cos(t) \quad y = \sin(t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
Donc, le long de C_1 on a :

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \int_{-2}^{0} (4(1+2t)(t)(2) + (2(1+t)^2 - 3(1+2t)(t)(1))dt \\
&= \int_{-2}^{0} (18t^2 + 13t + 2)dt = 26
\end{aligned}$$

le long de C_2 on a :

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos(t))\sin(t)(-\sin(t)) + (2(\cos^2(t) - 3(\cos(t)\sin(t)(\cos(t)))dt \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos(t)(1 - \sin^2(t)) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(t) - 6(\cos(t))\sin^2(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt = -1
\end{aligned}$$

D'après la proposition on a :

$$\begin{aligned}
\int_{C} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy + \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy \\
&= 26 - 1 = 25
\end{aligned}$$

1.16 Indépendance d'une intégrale curviligne par rapport au chemin

Théorème 15 *Soit F un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel f, $\nabla f = F$ dans une boule ouverte U. Alors la valeur de l'intégrale curviligne $\int_C \langle F, dr \rangle$ est la même pour toutes les courbes C dans U reliant deux points A et B :*

$$\int_C \langle F, dr \rangle = f(B) - f(A)$$

Esquisse de la démonstration dans $\mathbb{R}^2$:
Soit $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ et $f(x,y)$ tel que $\nabla(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$.

Si C est une courbe lisse qui relie le point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$ déterminée par $r(t) = (x(t), y(t)$. Si on considère la fonction $g(t) = f(x(t), y(t)$, en utilisant la règle de chaîne on obtient : $df(x(t), y(t)) = g'(t)dt$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_C N(x,y)dx + N(x,y)dy &= \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)\\ &= f(x(b), y(b) - f(x(a), y(a)\\ &= f(B) - f(A).\end{aligned}$$

Exemple 47 *Calculer* $\displaystyle\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy$, *où*, C *est un courbe lisse reliant les points* $(0,0)$ *au point* $(1,1)$.
Le champ de vecteur $(y^2 + 2x + 4)i +$ $(2xy + 4y - 5)j$ *dérive du potentiel*
$f(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$ *(à vérifier).*
Donc, $\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy = f(1,1) - f(0,0) = 8 - 5 = 3$.
Vérifier ce résultat en utilisant la courbe $y = x$.

Exemple 48 *Calculer* $\displaystyle\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy$, *où* C *est une courbe lisse déterminée par :*

$$r(t) = \pi\cos(t)i + \pi\sin(t)j, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

La courbe C *relie les deux points* $r(0) = (\pi, 0)$ *et* $r(\frac{\pi}{2}) = (0, \pi)$, *le champ de vecteurs* $(e^{-y} - 2x)i - (xe^{-y} + \sin(y))j$ *dérive du potentiel :*

$$f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) \qquad \textit{(Voir exemple 42)}$$

Donc :

$$\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy = f(0,\pi) - f(\pi,0) = \cos(\pi) - (\pi - \pi^2 + 1) = \pi^2 - \pi - 2$$

Exemple 49 *Calculer* $\displaystyle\int_C (e^x\sin(z) + 2yz)dx + (2xy + 2y)dy + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)dz$, *où* C *est une courbe lisse reliant les points* $(0,0,0)$ *au point* $(1,-2,\pi)$.
Le champ de vecteurs :

$$(e^x\sin(z) + 2yz)i + (2xy + 2y)j + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)k$$

dérive du potentiel :

$$f(x,y,z) = e^x\sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c \qquad \textit{(Voir exemple 43)}$$

Donc :

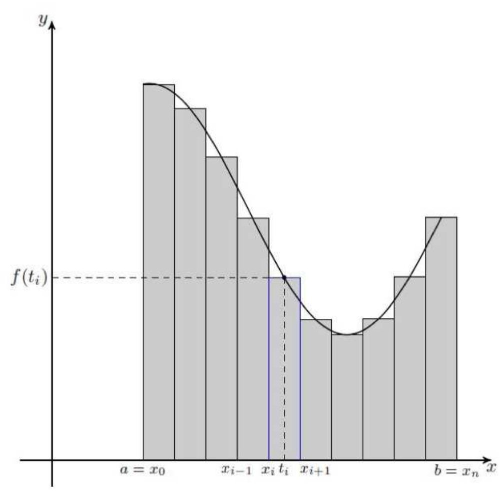
$$\begin{aligned}\int_C (e^x\sin(z) + 2yz)dx + (2xy + 2y)dy + (e^x\cos(z) + 2xy + 3z^2)dz &= f(1,-2,\pi) - f0,0,0)\\ &= \pi^3 - 4\pi + 4\end{aligned}$$

2

Intégrales multiples

2.1 Intégrale double

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction continue, positive. Le problème du calcul de l'aire d'une région bornée par l'axe des x, les droites verticales $x = a$, $x = b$ et par la courbe $y = f(x)$ nous a conduit au calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.



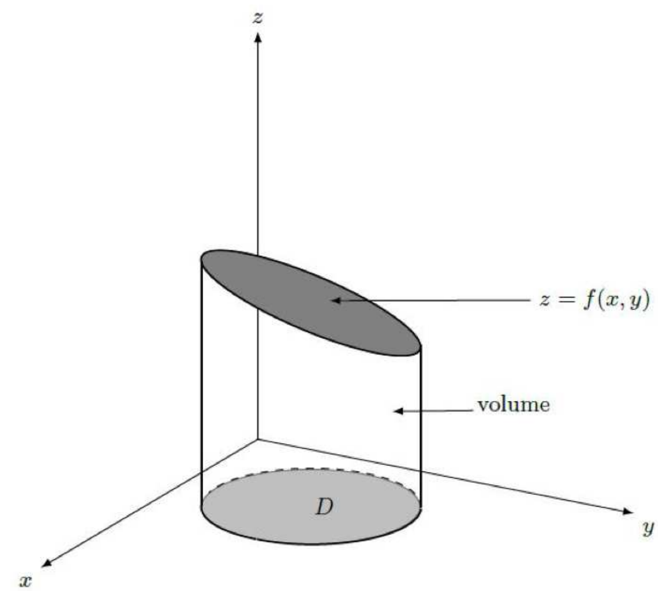
Cette intégrale est définie comme la limite de toutes les sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

t_i choisis arbitrairement dans $[x_{i-1}, x_i]$.

Si n est suffisamment grand, Δx_i suffisamment petit, alors une somme de Riemann est une valeur approchée de l'aire de la région dont chaque terme est égal à l'aire d'un rectangle de base Δx_i et de hauteur $f(t_i)$.

D'une façon analogue, si on considère une fonction $f(x, y)$ de deux variables à valeurs positives sur un domaine D, alors le calcul du volume d'un solide S borné par le plan xOy, le cylindre dont l'axe est parallèle à l'axe des z et dont la base est D, et la surface d'équation $z = f(x, y)$, nous conduit à la définition de **l'intégrale double** d'une fonction de deux variables sur une région D du plan appelée **domaine d'intégration**



Soit D un domaine borné du plan, D est contenu dans un rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

On considère une fonction $f : D \to R$ bornée, alors, il existe une constente $M > 0$ tel que :

$$|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in D.$$

Soit $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < .... < x_m = b\}$ une partition (subdivision) de $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < .... < y_n = d\}$ une partition (subdivision) de $[c, d]$ avec $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

On définit alors une partition P de $[a, b] \times [c, d]$ comme l'ensemble des mn rectangles :

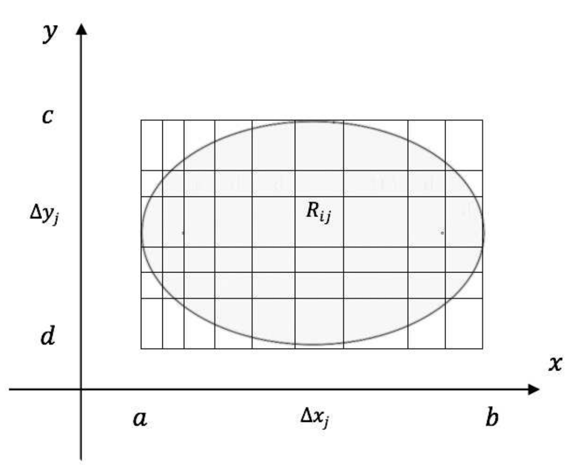
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$i = 1, .., m; j = 1, ..., n; \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ l'aire du rectangle R_{ij}.

La norme $\|P\|$ de la partition est définie par :

$$\|P\| = \max \{\Delta x_1, ..., \Delta x_m, \Delta y_1, ..., \Delta y_n\}$$

.



Soit R l'ensemble de tous les rectangles de la partition P contenu dans D. Pour chaque $R_{ij} \subset D$, on choisit un point $(x_i^0, y_j^0) \in R_{ij}$, et on définit la somme de Riemann :

$$S_{mn} = \sum_{R_{ij} \in R} f(x_i^0, y_j^0) \Delta A_{ij}.$$

Si m et n sont suffisamment grands et Δx_i, Δy_j suffisamment petits alors la somme S_{mn} est une valeur approchée du volume du solide S dont chaque terme est égal au volume du parallélépipède dont la base est le rectangle R_{ij} et dont la hauteur est égale à $f(x_i^0, y_j^0)$. Si la limite de S_{mn} existe quand $m, n \to \infty$ et $\|P\| \to 0$ et est indépendante du choix de $(x_i^0, y_j^0) \in R_{ij}$ alors on dit que la fonction f **est intégrable** sur D.

En utilisant le même procédé, on peut définir l'intégrale double d'une fonction de deux variables **à valeurs non nécessairement positives** comme limite d'une somme de Riemann.

Définition 23

Une fonction f de deux variables est dite intégrable sur un domaine D si :

$$\lim_{m,n\to\infty, \|P\|\to 0} S_{mn} = \lim_{m,n\to\infty, \|P\|\to 0} \sum_{R_{ij} \in R} f(x_i^0, y_j^0) \Delta A_{ij}$$

existe et ne dépend pas des points (x_i^0, y_j^0) choisis. La valeur de cette limite est appelée **intégrale double** de f sur D. On la note :

$$\iint_D f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty, \|P\|\to 0} S_{mn}.$$

On utilise aussi les notations :

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

ou

$$\iint_D f(x,y)dydx.$$

Par conséquent

$$\iint_D f(x,y)dA = I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |S_{mn} - I| < \varepsilon$$

pour toute partition R de D telle que :

$$\|P\| < \delta, \, \forall (x_i^0, y_j^0) \in R_{ij}.$$

Théorème 16

Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$. Alors f est intégrable et on a :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)dA &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \end{aligned}$$

Exemple 50 *Calculer l'intégrale* $\iint_D (2x^2 - 3y)dA$*, où* D *le rectangle défini par :*

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ et } 1 \leq y \leq 3.$$

D'après le théorème 1.2, on a :

$$\begin{aligned}\iint_D (2x^2-3y)dA &= \int_1^3\int_{-1}^2 (2x^2-3y)dxdy\\ &= \int_1^3 [\frac{2}{3}x^3-3yx]_{-1}^2 dy\\ &= \int_1^3 (6-9y)dy = -24.\end{aligned}$$

Si on utilise l'autre égalité on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_D (2x^2-3y)dA &= \int_{-1}^2\int_1^3 (2x^2-3y)dydx\\ &= \int_{-1}^2 [2x^2y-\frac{3}{2}y^2]_1^3 dx\\ &= \int_{-1}^2 (4x^2-12)dx = -24.\end{aligned}$$

Théorème 17

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un domaine D et L, M deux constantes. Alors la fonction $Lf+Mg$ est intégrable sur D :

$$\iint_D (Lf(x,y)+Mg(x,y))dA = L\iint_D f(x,y)dA + M\iint_D g(x,y))dA.$$

Théorème 18

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un domaine D telles que $f(x,y)\geq g(x,y)$ sur D alors :

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA.$$

Si $f(x,y)\geq 0$, alors :

$$\iint_D f(x,y)dA \geq 0$$

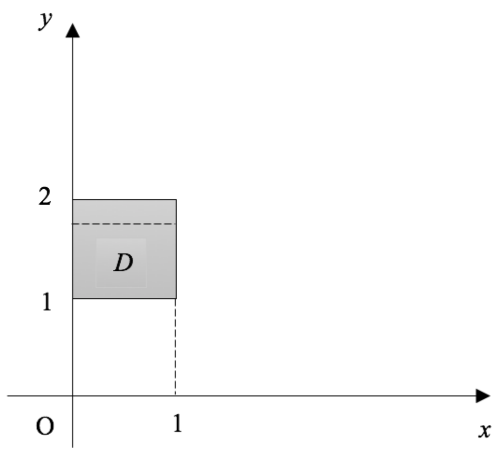
et cette intégrale est égale au volume du solide borné par le plan xOy, le cylindre dont la base est D, et la surface d'équation $z=f(x,y)$.

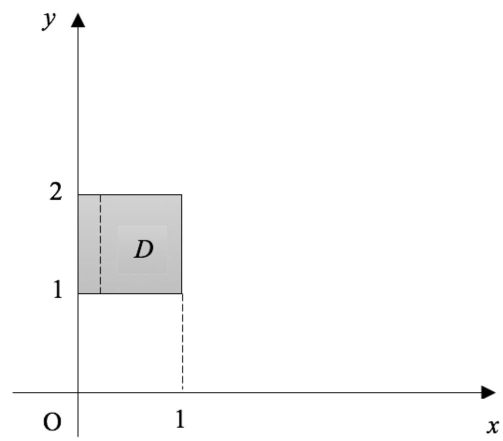
Exemple 51

Calculer le volume du solide situé directement au-dessus de la région D définie par $0\leq x\leq 1$ et $1\leq y\leq 2$ et sous la surface d'équation $z=4-x-y$.

La fonction $f(x,y)=4-x-y$ est continue et positive sur D, donc l'intégrable doublede f représente le volume du solide V :

$$\begin{aligned}V &= \iint_D f(x,y)dA\\ &= \int_1^2 (\int_0^1 (4-x-y)dx)dy\\ &= \int_1^2 [4x-\frac{x^2}{2}-xy]_0^1 dy\\ &= \int_1^2 (\frac{7}{2}-y)dy\\ &= [\frac{7}{2}y-\frac{y^2}{2}]_1^2 = 2.\end{aligned}$$





Si on inverse l'ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D f(x,y)dA \\
&= \int_0^1 (\int_1^2 (4-x-y)dy)dx \\
&= \int_0^1 [4y - xy - \frac{y^2}{2}]_1^2 dx \\
&= \int_0^1 (\frac{5}{2} - x)dx \\
&= [\frac{5}{2}x - \frac{x^2}{2}]_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

2.1.1 Quelques conséquences

1) Si f est intégrable sur D et l'aire de D est nulle alors :

$$\iint_D f(x,y)dA = 0.$$

2) En général :

$$\iint_D dA = \text{ aire de } D.$$

3) Si f est intégrable sur D alors

$$\left|\iint_D f(x,y)dA\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dA.$$

4) Si f est intégrable sur $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ou des points sur leurs frontières, alors :

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA.$$

Remarque 8

Dans certains cas, On peut calculer une intégrale double en utilisant une méthode géométrique.

Exemple 52

Si D est le rectangle défini par $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors :

$$\iint_D dA = \text{ Aire de } D = (b-a)(d-c).$$

Exemple 53

Si $D = \left\{(x,y) \in R^2 / \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ le disque fermé de rayon 1 alors :

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} dA = \text{aire de } D = \pi r^2 = \pi.$$

Exemple 54

L'intégrale $\iint_{x^2+y^2\leq 1} xdA = 0$ car le disque D est symétrique par rapport à l'axe des y et la fonction x est une fonction impaire, donc la surface $z = x$, le plan xOy, et le cylindre de base D délimitent deux régions de même volume mais de signe opposé, donc :

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2\leq 1} xdA &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 1,\ x>0\}} xdA + \iint_{\{x^2+y^2\leq 1,\ x<0\}} xdA \\ &= v - v = 0. \end{aligned}$$

Exemple 55

Calculer $I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (\sin(x) + y + 3)dA$. On a :

$$I = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sin(x)dA + \iint_{x^2+y^2\leq 1} ydA + 3\iint_{x^2+y^2\leq 1} dA$$

$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sin(x)dA = 0$ car le disque D est symétrique par rapport à l'axe des y et la fonction $\sin(x)$ est une fonction impaire.

$\iint_{x^2+y^2\leq 1} ydA = 0$ car le disque D est symétrique par rapport à l'axe des x et la fonction y est une fonction impaire. Par conséquent :

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} (\sin(x) + y + 3)dA = 3\iint_{x^2+y^2\leq 1} dA = 3\pi.$$

L'existence de l'intégrale double dépend de la nature de la fonction f et du domaine d'intégration D.

On dit que le domaine D est **régulier selon l'axe des y** si :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ a \leq x \leq b \text{ et } c(x) \leq y \leq d(x)\right\}$$

avec c et d des fonctions continues sur $[a,b]$, c-à-d D est borné par deux droites verticales$x = a$, $x = b$ et deux courbes d'équation :

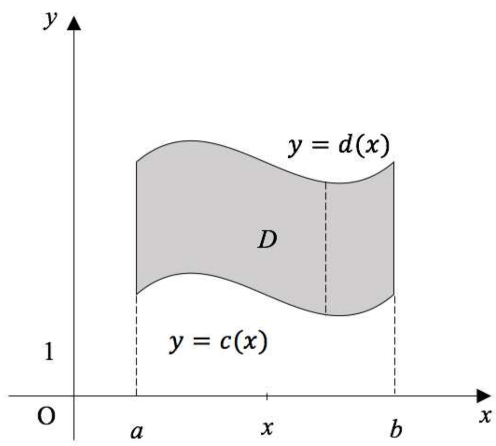
$$y = c(x) \text{ et } y = d(x).$$

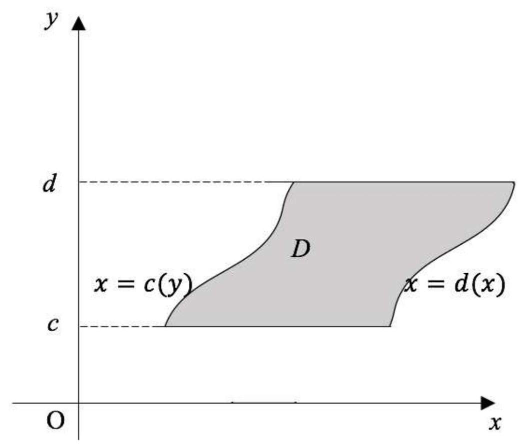
Lorsque :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 \ / \ c \leq y \leq d \text{ et } a(y) \leq x \leq b(y)\right\}$$

avec a et b des fonctions continues sur $[a,b]$

On dit que D est**régulier selon l'axe des x.**





On dit que D est **régulier** si D est **régulier selon l'axe des** x **et selon l'axe des** y.

Théorème 19

a) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier selon l'axe des y. Alors la fonction f est intégrable et :

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

b) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier selon l'axe des x. Alors la fonction f est intégrable et

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

c) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier. Alors la fonction f est intégrable et :

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemple 56

Évaluer $\iint_D xydA$, où D est la région triangulaire dont les sommets sont :

$$(0,0);\ (1,0);\ (1,1).$$

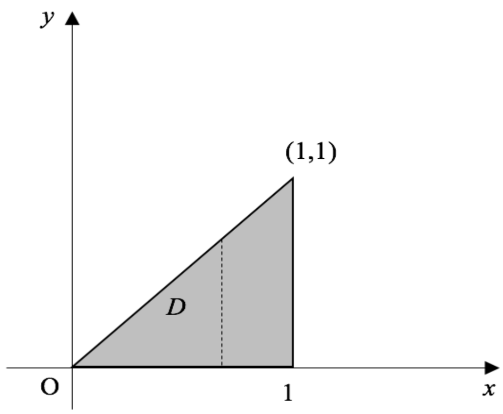
La région D est un domaine régulier définie par :

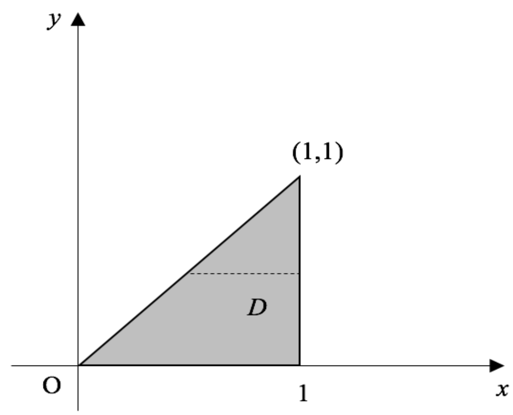
$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x$$

D est régulier selon l'axe des x

$$0 \leq y \leq 1 \text{ et } \ y \leq x \leq 1,$$

D est régulier selon l'axe des y.





Donc :

$$\begin{aligned}\iint_D xy dA &= \int_0^1 \left(\int_0^x xy dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Si on inverse l'ordre on obtient :

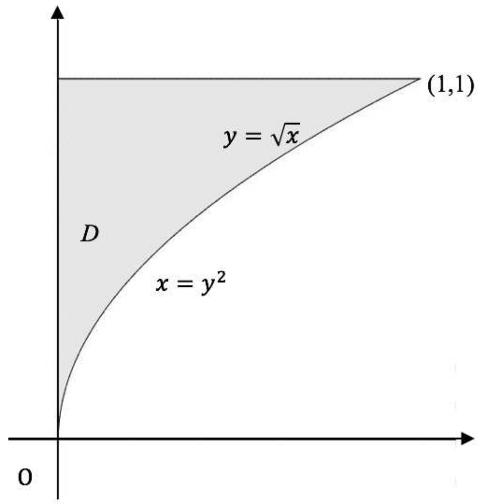
$$\begin{aligned}\iint_D xy dA &= \int_0^1 \left(\int_y^1 xy dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_y^1 dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2}(1 - y^2) dy = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Exemple 57

Évaluer

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \right) dx.$$

On ne peut pas calculer l'intégrale intérieure $\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy$ de l'intégrale double. Le domaine d'intégration D est régulier. Donc D est aussi régulier selon l'axe des y et est défini par : $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq x \leq y^2$.



Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}dy\right)dx &= \iint_D e^{y^3}dA\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{y^2} e^{y^3}dx\right)dy\\ &= \int_0^1 y^2e^{y^3}dy\\ &= \frac{e^{y^3}}{3}]_0^1 = \frac{e-1}{3}.\end{aligned}$$

Exemple 58

Évaluer l'intégrale :

$$\iint_D 4xydA,$$

où D est la région bornée par les graphes d' équations :

$$y = x+1 \text{ et } x = 1-y^2.$$

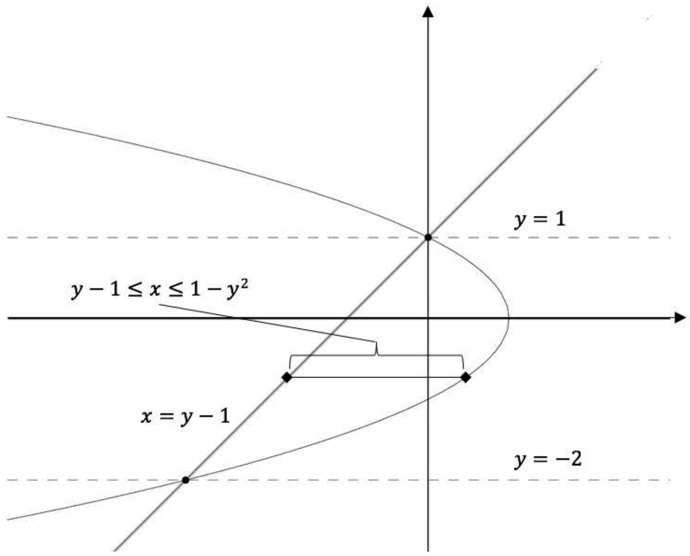
Pour situer la région D, on détermine les poins d'intersection des deux graphes $y = x+1$ et $x = 1-y^2$, en résolvant l'équation :

$$x = 1-(x+1)^2 = -x^2-2x \Rightarrow x^2+3x = 0$$

et donc $x = 0$ ou $x = -3$ correspondant aux points $(0,1)$ et $(-3,-2)$.

Par conséquent D est défini par :

$$-2 \leq y \leq 1 \text{ et } y-1 \leq x \leq 1-y^2.$$



Donc :

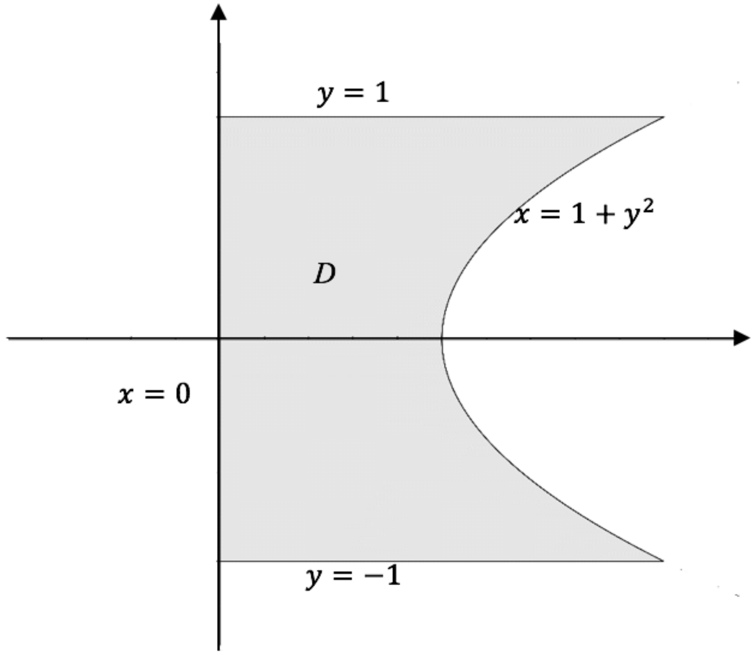
$$\begin{aligned}\iint_D 4xy\,dA &= \int_{-2}^{1}\left(\int_{y-1}^{1-y^2} 4xy\,dx\right)dy \\ &= \int_{-2}^{1}[2x^2y]_{y-1}^{1-y^2}\,dy \\ &= \int_{-2}^{1}(2y^5-6y^3+4y^2)\,dy = \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 59

Calculer le volume du solide situé directement au-dessus de la région D du plan xOy bornée par $x=0$; $y=-1$, $y=1$, et la parabole $x=1+y^2$,sous la surface d'équation $z=\frac{3}{2}-\frac{x}{7}-\frac{y}{2}$.

La fonction $f(x,y)=\frac{3}{2}-\frac{x}{7}-\frac{y}{2}$ est continue et positive sur la région D, D est défini par :

$$-1 \le y \le 1 \text{ et } 0 \le x \le 1+y^2.$$



Donc, le volume

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (\frac{3}{2} - \frac{x}{7} - \frac{y}{2}) dA \\ &= \int_{-1}^{1} (\int_0^{1+y^2} (\frac{3}{2} - \frac{x}{7} - \frac{y}{2}) dx) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{14} - \frac{xy}{2}) \right]_0^{1+y^2} dy \\ &= \int_{-1}^{1} (\frac{3(1+y^2)}{2} - \frac{(1+y^2)^2}{14} - \frac{(1+y^2)y}{2}) dy = \frac{56}{15}. \end{aligned}$$

2.2 Intégrale double en coordonnées polaires

Dans de nombreuses applications des intégrales doubles, il est plus facile d'exprimer la fonction à intégrer, ou le domaine d'intégration, ou les deux en coordonnées polaires.

Le sens positif de mesure des angles θ est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les relations suivantes permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad \frac{y}{x} = \tan(\theta), r^2 = x^2 + y^2.$$

Considérons une région D bornée par les droites $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ et les cercles $r = a,, \ r = b$.

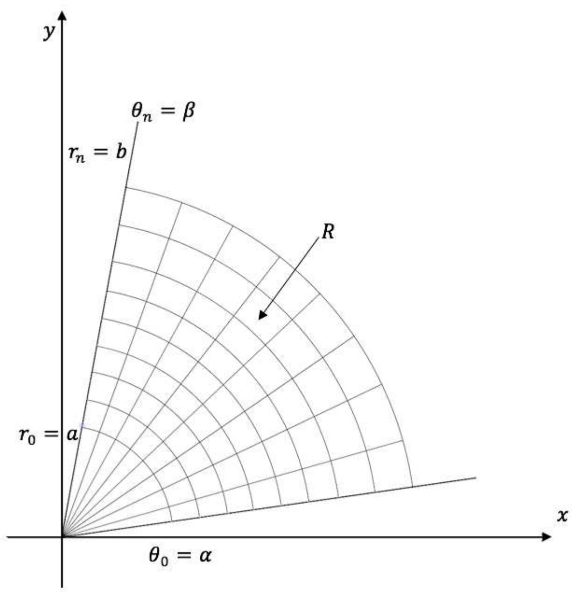
Considérons une partition Δ de cette région définie par les deux partitions :

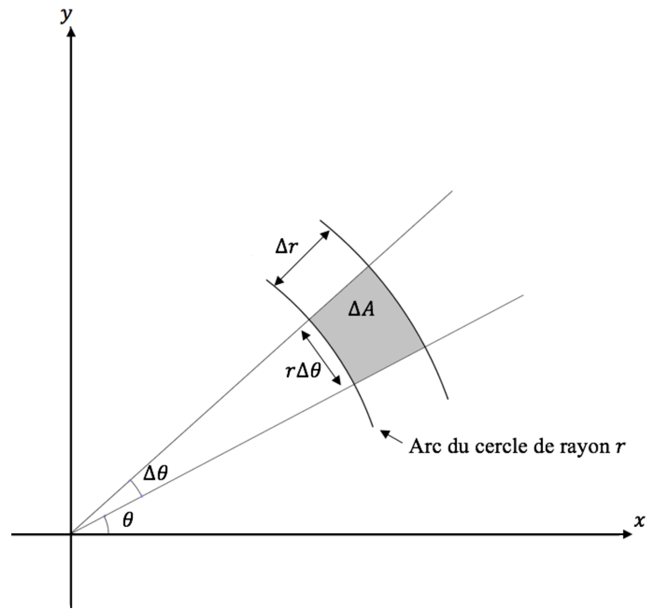
$$P_1 = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < .... < \ \theta_m = \beta\}, \Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1},$$

et

$$P_2 = \{a = r_0 < r_1 < r_2 < .... < \ r_n = b\}, \Delta r_i = r_i - r_{i-1}.$$

On définit alors la partition P comme l'ensemble des mn régions $[\theta_{i-1}, \theta_i] \times [r_{i-1}, r_i]$, ΔA_{ij} l'aire de cette région. Si $\Delta\theta$ et Δr sont assez petits, la région constitue approximativement un rectangle ayant les côtés $r\Delta\theta$ et Δr





En coordonnées polaires, l'aire est alors égale à $\Delta A_{ij} = r_i \Delta r_i \Delta\theta_i$. Par conséquent, pour exprimer une intégrale double en coordonnées polaires :

$$dA \text{ est remplacé par } r dr d\theta$$

et on obtient les résultats suivants :

Théorème 20

Soit f une fonction continue sur $D = [\alpha, \beta] \times [a, b]$ en coordonnées polaires. Alors :

$$\begin{aligned} \iint_D f(r,\theta) dA &= \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r,\theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(r,\theta) r d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

Exemple 60

Calculer le volume de la région bornée par le plan xOy et la surface d'équation :

$$z = 1 - x^2 - y^2.$$

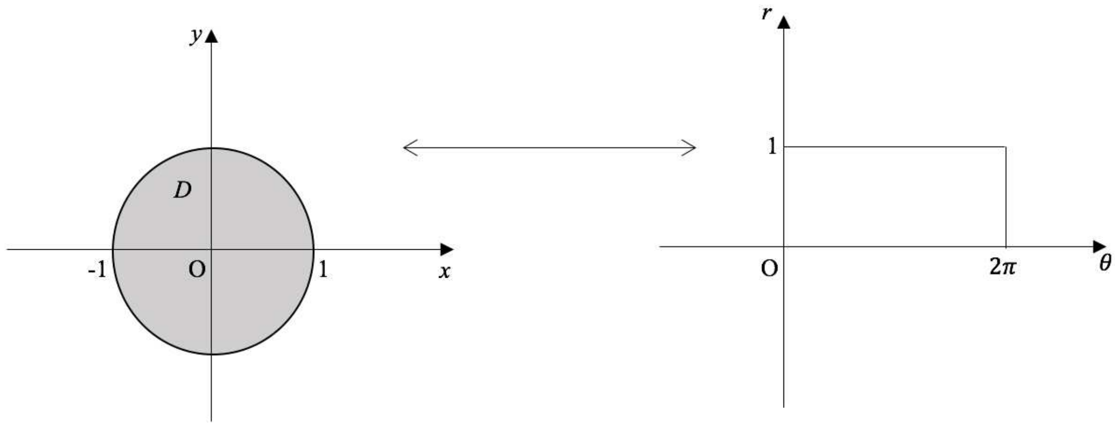
La fonction $z = 1-x^2-y^2$ est continue, positive sur le domaine D délimité par $z = 0 = 1-x^2-y^2$. Donc :

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) dA.$$

En considérant les coordonnées polaires, on obtient :

$$\iint_D (1 - r^2) dA$$

où D est définit par $0 \leq r \leq 1,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Donc :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} [\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_{-1}^2 d\theta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Théorème 21

a) Soit D est un domaine borné par le graphe d'une fonction continue $r = g(\theta)$ et les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$. Si f est une fonction continue sur D alors :

$$\iint_D f(r, \theta) dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{g(\theta)} f(r, \theta) r dr \right) d\theta$$

b) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier selon l'axe des r,

$$D = \{(r, \theta)/\alpha \leq \theta \leq \beta,\ a(\theta) \leq r \leq b(\theta),\ a, b \text{ continues}\}.$$

Alors :

$$\iint_D f(r, \theta) dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r, \theta) r dr \right) d\theta$$

c) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier selon l'axe des θ,

$$D = \{(r, \theta)/a \leq r \leq b,\ \alpha(r) \leq \theta \leq \beta(r),\ \alpha, \beta \text{ continues}\}.$$

Alors :

$$\iint_D f(r, \theta) dA = \int_a^b \left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r, \theta) r d\theta \right) dr.$$

d) Soit f une fonction continue sur un domaine régulier D. Alors :

$$\begin{aligned} \iint_D f(r, \theta) dA &= \int_\alpha^\beta \left(\int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r, \theta) r dr \right) d\theta \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r, \theta) r d\theta \right) dr. \end{aligned}$$

Exemple 61

Calculer l'aire de la région D bornée par le graphe d'une fonction continue $r = g(\theta)$ et les droites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$.

$$\begin{aligned} A = \iint_D dA &= \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{g(\theta)} r dr \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (g^2(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Exemple 62

Calculer l'aire de la région D à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 4$ et au dessus de la droite $y = 1$. Les points du cercle qui intersectent la droite $y = 1$ sont déterminées par $x = \pm\sqrt{4-1} = \pm\sqrt{3}$. Donc, la région est défini par $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ et $1 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$. Par lconséquent :

$$\begin{aligned} \text{Aire de } D &= \iint_D dA \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-x^2} - 1) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-x^2}) dx - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Calculons $\int (\sqrt{4-x^2}) dx$, en utilisant la substitution trigonométrique $x = 2\sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $dx = 2\cos(\theta) d\theta$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2(\theta)} = 2\cos(\theta)$, donc :

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{4-x^2}) dx &= 4 \int \cos^2(\theta) d\theta \\ &= 4 \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \int (\sqrt{4-x^2}) dx \\ &= 2\theta + \sin(2\theta) + c \\ &= 2\theta + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + c \\ &= 2Arc\sin(\frac{x}{2}) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Aire de } D &= 2[2Arc\sin(\frac{x}{2}) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2(2Arc\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Exemple 63 *Calculer le volume du solide dans le premier octant borné par le cône $z = r$ et le cylindre $r = 3\sin(\theta)$.*

Le domaine D est défini par $0 \leq r \leq 3\sin(\theta)$, et $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, $f(r,\theta) = r$ donc :

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D r dA \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{3\sin(\theta)} r^2 dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^{3\sin(\theta)} d\theta \\
&= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) d\theta \\
&= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)(1-\cos^2(\theta)) d\theta \\
&= -9\cos(\theta) + 3\cos^2(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.
\end{aligned}$$

Exemple 64

Calculer

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - 1 \right) dydx.$$

Que représente géométriquement cette intégrale double. Le domaine d'integration

$$D = \left\{ (x,y) \ / \ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \ -\sqrt{3-x^2} \leq y \leq \sqrt{3-x^2} \right\},$$

c'est le disque de rayon $\sqrt{3}$, par conséquent D est défini par $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, et $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en coordonnées polaires, par la suite :

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dydx &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - 1) r dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{5}{6} d\theta = \frac{5\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Cette intégrale double représente le volume solide situé au dessous de la demi-sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ qui est le graphe de la fonction $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, au dessus de D qui est défini par $x^2+y^2 = 3$. D représente l'intersection du graphe et de la région du dessous, dans ce cas $3 + z^2 = 4$, donc $z = 1$ car $z \geq 0$.

Cette intégrale double représente le volune du solide situé sous la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ et au dessus du plan $z = 1$.

Exemple 65

Calculer l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

On ne peut pas déterminer la primitive de la fonction e^{-x^2}. On peut alors exprimer cette intégrale en fonction d'une intégrale double :

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy
\end{aligned}
$$

Le passage aux coordonnées polaires nous donne :

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr \\
&= 2\pi \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right] = \pi.
\end{aligned}
$$

Par conséquent :

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.
$$

Exemple 66

Calculer le volume du solide dans le premier octant borné par le cylindre $x^2 + y^2 = a^2$ et sous le plan $z = y$.

En coordonnées polaires, le cylindre dans le premier octant est représenté par :

$$
0 \leq r \leq a, \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},
$$

la fontion $z = y = r\sin(\theta)$. Donc :

$$
\mathbf{V} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a (r\sin(\theta))\, rdr\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta) d\theta \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3}a^3.
$$

<u>Longueur d'un arc d'une courbe.</u>

On voudrait calculer la longueur L d'un arc d'une courbe déterminée par le graphe d'une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. On considère une partition P de $[a, b]$:

$$
P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b\},\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.
$$

Pour chaque $i = 1, ..., n$, on considère le point $P_i(x_i, f(x_i))$, la longueur du segment $P_{i-1}P_i$ est donnée par

$$
sqrt(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2.
$$

Quand n assez grand et la norme $\|P\|$ assez petite, cette longueur est une valeur approchée de la longueur l_i de l'arc de la courbe $y = f(x)$ du point P_{i-1} au point P_i. Donc :

$$
\lim_{\|P\|\to 0} (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2})
$$

existe et égale L, car f est de classe C^1.

Puisque f est de classe C^1, il exise $t_i \in [x_{i-1}, xi]$ tel que :

$$
f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(t_i)(x_i - x_{i-1}).
$$

Donc :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|P\|\to 0}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}) \\ &= \lim_{\|P\|\to 0}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f\prime(t_i)(x_i-x_{i-1}))^2}) \\ &= \lim_{\|P\|\to 0}(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(1+(f\,\prime(t_i))^2}\Delta x_i). \end{aligned}$$

La somme

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(1+(f\,\prime(t_i))^2}\Delta x_i$$

est une somme de Riemann de la fonction continue $\sqrt{(1+(f\,'(x))^2}$, et donc la longueur L de la courbe $y=f(x)$ du point $(a,f(a))$ au point $(b,f(b))$ est égale á :

$$\int_a^b \sqrt{(1+(f\,'(x))^2}dx.$$

Théorème 22

Si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$, alors la longueur L de l'arc de la courbe $y=f(x)$ du point $(a,f(a))$ au point $(b,f(b))$ est donnée par :

$$L=\int_a^b \sqrt{(1+(f\,'(x))^2}dx.$$

D'une façon analogue, si C est une courbe de classe C^1 d'équation paramétrique $x=f(t)$, $y=g(t),\ \ a\leq t\leq b$ alors la longueur L de l'arc de la courbe C du point $(a,f(a))$ au point $(b,f(b)$ est donnée par :

$$L=\int_a^b \sqrt{(f\,'(x))^2+(g\,'(x))^2}dx.$$

Aire d'une surface.

Pour calculer l'aire d'une surface S déterminée par le graphe d'une fonction de classe C^1 sur un domaine régulier D, on considère une partition de la région D définie par les mn rectangles R_{ij} de dimensions $\Delta x_i, \Delta y_j$ inclus dans D, S_{ij} la restriction de la surface S au rectangle D.

Soit (x_{i-1},y_{j-1}) le point de R_{ij}, la restriction T_{ij} à Rij du plan tangent à la surface S au point $(x_{i-1},y_{j-1},f(x_{i-1},y_{j-1})$ est un parallélogramme déterminé par les vecteurs :

$$u_x=\Delta x_i i+\frac{\delta}{\delta x}f(x_{i-1},y_{j-1})\Delta x_i k \text{ et } v_y=\Delta y_j j+\frac{\delta}{\delta y}f(x_{i-1},y_{j-1})\Delta y_j k.$$

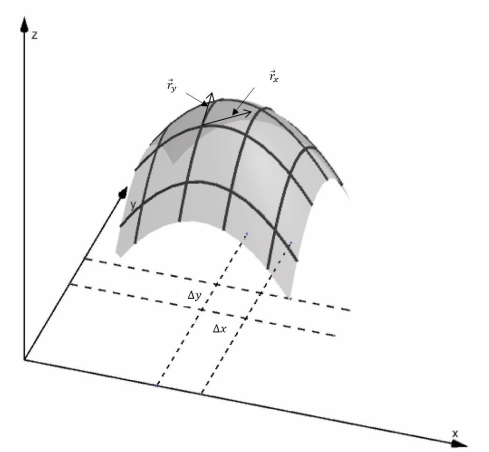


FIGURE 2.1 – Surface montrant un rectangle paramétré et les vecteurs r_x et r_y

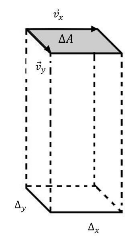


FIGURE 2.2 – Pièce en forme de la parallélogramme dans le plan tangent à la surface

De plus l'aire de T_{ij} est une valeur approchée de l'aire de S_{ij}, l'aire du parallèlogramme T_{ij} est égale à la norme du vecteur produit vectoriel $u_x \times v_y$.

$$\begin{aligned}
\text{Aire de } S_{ij} \approx \|u_x \times v_y\| &= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_i & 0 & \frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1})\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & \frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1})\Delta y_j \end{vmatrix} \right\| \\
&= \Delta x_i \Delta y_i \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \\ 0 & 1 & \frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1}) \end{vmatrix} \right\| \\
&= \left\| -\frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1}) i - \frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1}) j + k \right\| \Delta x_i \Delta y_j \\
&= \sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1}))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1})^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_j.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Aire de } S \approx \sum_{i=1,j=1}^{m,n} \sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1}))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1})^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_j,$$

et la somme

$$S_{mn} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} \sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x_{i-1}, y_{j-1}))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x_{i-1}, y_{j-1})^2 + 1} \Delta x_i \Delta y_j$$

est une somme de Riemann de la fonction continue suivante :

$$\sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x,y))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x,y)^2 + 1}$$

donc en passant à la limite quand $\|P\| \to 0$, on obtient :

$$\text{Aire de } S = \iint_D \sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x,y))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x,y)^2 + 1} dA.$$

Théorème 23

Si $f\ (x,y)$ est une fonction de classe C^1 sur un domaine régulier D, alors l'aire A_s de la surface $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, est donnée par :

$$A_S = \iint_D \sqrt{(\frac{\delta}{\delta x} f(x,y))^2 + (\frac{\delta}{\delta y} f(x,y))^2 + 1 dA}.$$

Exemple 67

Calculer l'aire de la portion de la paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ au dessus du plan xOy.

L'intersection entre le plan xOy d'équation $z = 0$ est le cercle $x^2 + y^2 = 4$ qui borne le domaine D. Donc :

$$D = \{(x,y)/ -2 \leq x \leq 2 \text{ et } -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\},\ f(x,y) = 4 - x^2 - y^2\}$$

De plus, $\frac{\delta}{\delta x} f(x,y) = -2x$ et $\frac{\delta}{\delta y} f(x,y) = -2y$ par la suite :

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_D \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1} dA \\ &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dy dx. \end{aligned}$$

On peut calculer l'intégrale en utilisant les coordonnées polaires

$$x = r\cos(\theta),\ y = \sin(\theta) 0 \leq \theta \leq 2\pi\ 0 \leq r \leq 2,$$

donc :

$$A_S = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta = \int_{-2}^{2} \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}]_0^2 d\theta = \frac{\pi}{6}((17)^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Exemple 68 *Calculer l'aire de la demi-sphère supérieure*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

La demi-sphère supérieure $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ représente le graphe de la fonction

$$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ D = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

De plus,

$$\frac{\delta}{\delta x} f(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},\ \frac{\delta}{\delta y} f(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

par la suite :

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_D \sqrt{(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}})^2 + (\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}})^2 + 1 dA} \\ &= \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA. \end{aligned}$$

En coordonnées polaires, on a : $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et donc :

$$\begin{aligned} A_S &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 2\pi a \lim_{t \to a^-} \int_0^t \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a \lim_{t \to a^-} [-\sqrt{a^2 - r^2}]_0^t = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

2.3 Green-Riemann, Stokes et Divergence dans le plan

2.3.1 Quelques rappels

Soit $F(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + R(x,y,z)k$ un champ de vecteurs, On définit la divergence de F, le champ de scalaires, qu'on note $divF$ par :

$$\begin{aligned} divF &= \langle \nabla, F \rangle \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

On définit le rotationnel de F le champ de vecteurs qu'on note $RotF$ par :

$$\begin{aligned} RotF &= \nabla \times F = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z})i + (\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})j + (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})k \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

∇ est l'opérateur différentiel $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Si $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ alors :

$$divF = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \text{ et } RotF = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})k.$$

Remarque 9

Si F dérive d'un potentiel f de classe C^2 $alors$ $RotF = 0$.

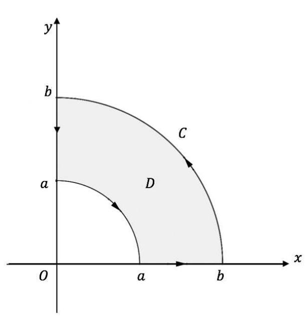
Ce théorème nous permet d'exprimer une intégrale curviligne le long d'une courbe C comme une intégrale double sur un domaine D borné par la courbe C et inversement.

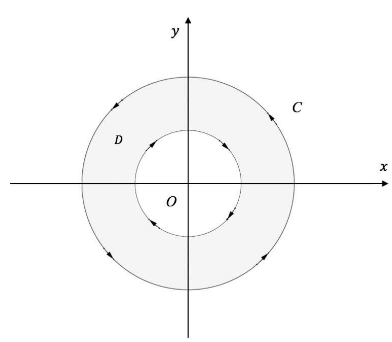
Cette formule est une version du théorème fondamental du calcul :

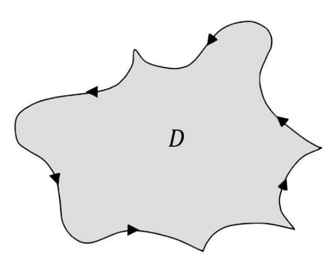
$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

L'intégrale curviligne est calculée suivant la composante tangentielle du champ de vecteurs par rapport à la courbe C, donc il faut spécifier l'orientation des courbes qui délimitent le domaine d'intégration D.

Cette orientation doit être positive, de sorte que si on parcourt C dans le sens où elle est orientée, la région D doit se se trouver à gauche de la courbe C.







Une courbe C d'équation paramétrique $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ est dite simple si $r(t_1) \neq r(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in]\, a, b[\,$, $t_1 \neq t_2$, c-à-d la fonction ne s'intersecte pas avec elle même. La courbe C est dite fermée si $r(a) = r(b)$.

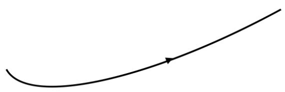


FIGURE 2.3 – courbe simple

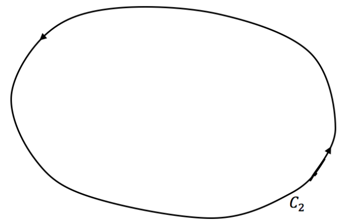


FIGURE 2.4 – courbe simple fermée

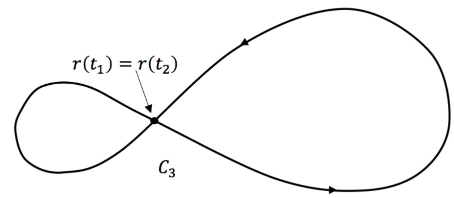


FIGURE 2.5 – courbe fermée non simple

2.3.2 Théorème Green-Riemann

Théorème 24

Soit D une région du plan xOy délimitée par une courbe C et orientée dans le sens positif formée d'une ou de plusieurs courbes simples, fermées, lisses par morceaux (C^1). La courbe C est appelée la frontière de D.

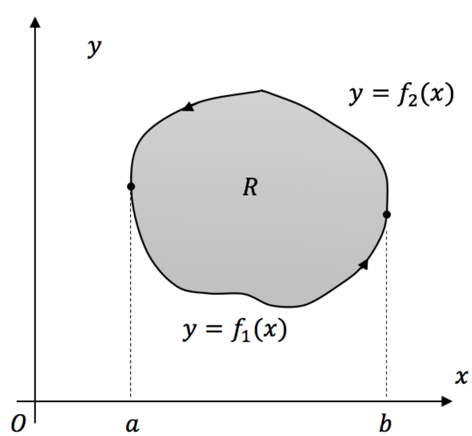
Si $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ est un champ de vecteurs, les fonctions M, N sont de classe C^1. Alors :

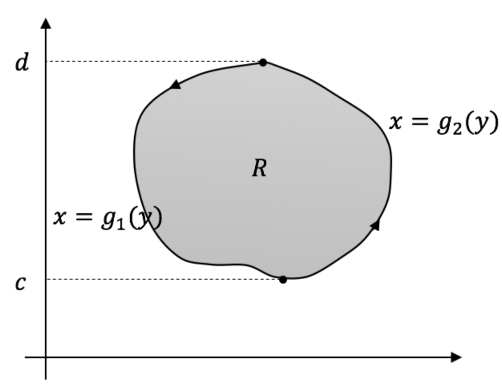
$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \iint_D (\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y})dA.$$

Démonstration 5

On considère le cas où D est un domaine régulier, on peut le représenter de deux façons différentes c-à-d :

$$D = \{(x,y) \in R^2 / a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$
$$D = \{(x,y) \in R^2 / c \leq y \leq d,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(x)\}$$





Les fonctions f_1, f_2, g_1, g_2 de classe C^1, on va démontrer les égalités suivantes :

$$\int_C M(x,y)dx = -\iint_D \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} dA \ (1)$$

$$\int_C N(x,y)dy = \iint_D \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} dA. \ (2)$$

Pour démontrer (1), on considère la première caractérisation de D
C_1 : le graphe de la fonction $y = f_1(x)$ du point $(a, f_1(a))$ au point $(b, f_1(b))$.
C_2 : le graphe de la fonction $y = f_2(x)$ du point $(b, f_2(b))$ au point $(a, f_1(a))$.

$$\begin{aligned}
\int_C M(x,y)dx &= \int_{C_1} M(x,y)dx + \int_{C_2} M(x,y)dx \\
&= \int_a^b M(x, f_1(x))dx + \int_b^a M(x, f_2(x))dx \\
&= \int_a^b M(x, f_1(x))dx - \int_a^b M(x, f_2(x))dx \\
&= \int_a^b (M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))dx.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant :

$$\iint_D \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\delta M}{\delta y} dydx,$$

d'après le théorème fondamental du calcul on a :

$$\begin{aligned}
\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} dy &= M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x) \\
&= -(M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x)).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\iint_D \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} dA = -\int_a^b (M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))dx = -\int_C M(x,y)dx.$$

Pour démontrer (2), on considère la deuxième caractérisation de D,
C_1^* : le graphe de la fonction $x = g_1(y)$ du point $(d, g_1(d)$ au point $(c, g_1(c)$.
C_2^* : le graphe de la fonction $x = g_2(y)$ du point $(c, g_2(c)$ au point $(d, g_2(d)$.

$$\begin{aligned}
\int_C N(x,y)dy &= \int_{C_1^*} N(x,y)dy + \int_{C_2^*} N(x,y)dy \\
&= \int_d^c N(g_1(y), y)dy + \int_c^d N(g_2(y), y)dy \\
&= \int_c^d (N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y)dy)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant :

$$\iint_D \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\delta N(x,y)}{\delta y} dxdy,$$

d'après le théorème fondamental du calcul on a :

$$\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\delta N(x,y)}{\delta y} dx = N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y).$$

Donc :

$$\iint_D \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} dA = \int_c^d N(g_2(y), y) - N(g_1(y), y)dy = \int_C N(x,y)dy.$$

En additionnant les deux égalités, on obtient la conclusion du théorème de Green-Riemann dans le cas où D est un domaine régulier.

Si D est une réunion finie de domaines réguliers dont les intersections ne cotiennent que les frontières, on démontre le résultat pour chaque domaine puis on additionne.

Si D vérifie les conditions générales du théorème, on considère des partitions de D comme dans la définition de l'intégrale double pour obtenir une ré union finie de domaines réguliers dont les intersections ne cotiennent que les frontières puis on passe à la limite.

Exemple 69

On considère le champ de vecteurs $F(x,y) = (y^2-7y)i+(2xy+2x)j$ et C le cercle $x^2+y^2 = 1$. On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\delta N(x,y)}{\delta x} = 2y+2 \text{ et } \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2y-7.$$

Donc

$$\iint_D ((2y+2)-(2y-7))dxdy = 9\iint_D dxdy = 9\text{aire de } D = 9\pi.$$

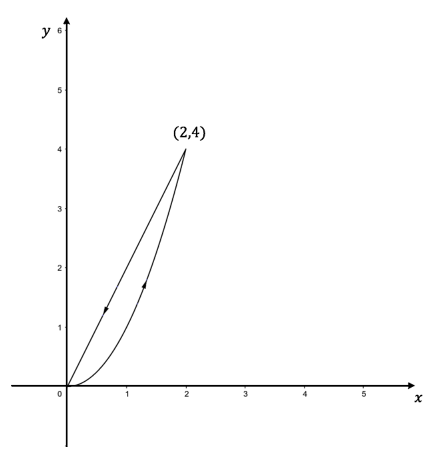
La courbe C : $r(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad r\prime(t) = (-\sin(t), \cos(t)),\ 0 \le t \le 2\pi,$

C orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Calculons l'intégrale curviligne :

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) - 7\sin(t))(-\sin(t) + (2\cos(t)\sin(t) + \cos(t))\cos(t))dt = 9\pi.$$

Exemple 70

Vérifier le théorème de Green-Riemann :
$F(x,y) = y^2 i + (4xy)j$ le long de la la courbe fermée C formée de l'arc de la parabole $y = x^2$ de l'origine au point (2,4) et le segment du point (2,4) à l'origine.



$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\delta(4xy)}{\delta x} - \frac{\delta y^2}{\delta y}\right)dA &= \int_0^2\int_{x^2}^{2x} (4y-2y)dydx \\ &= \int_0^2 y^2]_{x^2}^{2x} = \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = \frac{64}{15}.\end{aligned}$$

L'arc de la parabole est donnée par la courbe C_1 d'équation paramétrique : $(t, t^2),\ \ 0 \leq t \leq 2$, donc,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} y^2dx + 4xydy &= \int_0^2 ((t^2) + 4(t)(t^2)(2t))dt \\
&= \int_0^2 9t^4dt = \frac{288}{5}.
\end{aligned}$$

Le segment C_2 est donné par la paramétrisation $(t, 2t)$ de $t = 2$ à $t = 0$,donc,

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} y^2dx + 4xydy &= \int_2^0 ((2t)^2 + 4t(2t)2)dt \\
&= \int_2^0 20t^2dt = -\frac{160}{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_C y^2dx + 4xydy &= \int_{C_1} y^2dx + 4xydy + \int_{C_2} y^2dx + 4xydy \\
&= \frac{288}{5} - \frac{160}{3} = \frac{64}{15}.
\end{aligned}$$

Exemple 71

En uttilisant le théorème de Green-Riemann, calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_C xy^2dx + (2x^3y)dy$$

le long de la la courbe fermée C formée de l'arc du demi cercle $x^2 + y^2 = 1$ dans le sens positif et du segment du point $(-1, 0)$ au point $(1, 0)$.

Le domaine D est donné par :

$$-1 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\int_C xy^2dx + (2x^3y)dy &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (\frac{\delta(2x^3y)}{\delta x} - \frac{\delta xy^2}{\delta y})dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (6x^2y - 2xy)dydx = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Exemple 72

En utilisant le théorèmede Green-Riemann, calculer le travail du vecteurs champs $F(x, y) = (\sin(x) - y)i + (e^y - x^2)j$ le long de l'arc du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ dans le sens positif.

Par définition :

$$W = \int_C (\sin(x) - y)dx + (e^y - x^2)dy,$$

de la formule de Green-Riemann, on a :

$$\begin{aligned}
W &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (\frac{\delta(e^y - x^2)}{\delta x} - \frac{\delta(\sin(x) - y)}{\delta y})dA \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-2x + 1)dA \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} -2xdA + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dA \\
&= 0 + \text{aire de } D = \pi a^2.
\end{aligned}$$

Vérifier ce résultat en utilisant les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double.

Conséquence 1

1) Si $F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j$ est un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel f, C est une courbe fermée, on retrouve :

$$\begin{aligned}
\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy &= f(A) - f(A) \\
&= \iint_D (\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y})dA \\
&= \iint_D (0)dA = 0.
\end{aligned}$$

2) Soit D une région bornée par une courbe lisse, fermée C.
Si $F(x,y) = xj$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_C xdy &= \iint_D (\frac{\delta x}{\delta x})dA \\
&= \iint_D dA \\
&= \text{Aire de } D.
\end{aligned}$$

Si $F(x,y) = yi$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_C ydx &= \iint_D (-\frac{\delta y}{\delta y})dA \\
&= -\iint_D dA \\
&= -\text{Aire de } D.
\end{aligned}$$

On obtient la formule :

$$AiredeD = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx.$$

Exemple 73

En utilisant le résultat précédent pour calculer l'aire de la région D l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La région D est bornée par la courbe :

$$x(t) = a\cos(t),\ y = b\sin(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

D'après la formule :

$$\begin{aligned}
\text{Aire de } D &= \int_C (x)dy - (y)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos(t)b\cos(t) - b\sin(t)(-a\sin(t))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t))dt = \pi ab.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Green, nous allons exprimer le travail tangentiel et normal d'un champ de vecteurs F comme une intégrale double.

Le travail W d'un champ de vecteur F à travers une courbe C est exprimée comme une intégrale curviligne

$$W = \int_C \langle F, dr \rangle .$$

On considère la représentation paramétrique de la courbe C :

$$r(s) = x(s)i + y(s))j$$

où s est la mesure de l'arc d'un point $\mathrm{P}_0 \in C$ à un point $P \in C$, D'après le théorème 3.1, page 9, on a

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2},$$

si on prend $s = t$, on obtient :

$$1 = \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2}$$

On considère alors $T(s) = (\frac{dx}{ds})i + (\frac{dy}{ds})j$ le vecteur unitaire tangent à la coube C. De plus

$$dr = dxi + dyj = (\frac{dx}{ds}dsi + \frac{dy}{ds}dsj) = T(s)ds.$$

Donc :

$$\int_C \langle F, dr \rangle = \int_C \langle F, T(s) \rangle \, ds.$$

D'après le théorème de Green, on a :

$$\begin{aligned} \int_C \langle F, T(s) \rangle \, ds &= \int_C \langle F, dr \rangle \\ &= \iint_D (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dA \\ &= \iint_D \langle RotF, k \rangle \, dA. \end{aligned}$$

On obtient une version du théorème de Stokes dans le plan qu'on généralisera par la suite dans l'espace R^3.

2.3.3 Stokes dans le plan

Théorème 25 *Si $F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$, C, D*

vérifient le théorème de Green-Riemann, $T(s)$ le vecteur unitaire tangent à la coube C, s est la mesure de l'arc d'un point $P_0 \in C$ à $P \in C$, alors :

$$\int_C \langle F, T(s) \rangle \, ds = \iint_D \langle RotF, k \rangle \, dA.$$

Exemple 74 *Vérifier le théorème de Stokes si $F(x, y) = 2yi + 5xj$, C est la courbe $x^2 + y^2 = 1$.*

On a :

$$x(s) = \cos(s),\ y(s) = \sin(s),\ 0 \leq s \leq 2\pi,\ r(s) = \cos(s)i + \sin(s))j$$

et

$$T(s) = -\sin(s)i + \cos(s))j.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \langle F, T(s)\rangle\, ds &= \int_0^{2\pi} \langle (2\sin(s)i + 5\sin(s)j), -\sin(s)i + \cos(s))j\rangle\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2(s) + 5\cos^2(s))ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2(\frac{1-\cos(2s)}{2} + 5\frac{1+\cos(2s)}{2})ds \\
&= \frac{3}{2}s + \frac{7}{4}\sin(2s)]_0^{2\pi} = 3\pi.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle RotF, k\rangle &= \left\langle (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})k, k\right\rangle \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 5 - 2 = 3.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\iint_D \langle RotF, k\rangle\, dA &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} 3dA \\
&= 3\text{aire de } D = 3\pi.
\end{aligned}$$

Intuitivement, le Rotationnel d'un champ de vecteur F en un point P indique dans quelle mesure le champ tourne autour de P.

On considère maintenant le vecteur unitaire

$$N(s) = -\frac{dy}{ds}i + \frac{dx}{ds}j,$$

donc :

$$N(s)ds = dyi - dxj$$

et

$$\langle F(x,y), N(s)\rangle\, ds = M(x,y)dy - N(x,y)dx.$$

On obtient :

$$\int_C \langle F, N(s)\rangle\, ds = \int_C M(x,y)dy - N(x,y)dx$$

En appliquant le théorème de Green-Riemann on a :

$$\begin{aligned}
\int_C M(x,y)dy - N(x,y)dx &= \iint_D (\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial(-M)}{\partial y})dA \\
&= \iint_D (\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y})dA \\
&= \iint_D divF dA.
\end{aligned}$$

On obtient une version du théorème de divergence dans le plan qu'on généralisera par la suite dans l'espace R^3.

2.3.4 Divergence dans le plan

Théorème 26

Si

$$F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j,\ C\ , D$$

vérifient le théorème de Green-Riemann, $N(s)$ le vecteur unitaire normal à la coube C, s est la mesure de l'arc d'un point $P_0 \in C$ à $P \in C$, alors :

$$\int_C \langle F, N(s)\rangle\, ds = \iint_D divF dA.$$

Exemple 75

Vérifier le théorème de divergence si $F(x,y) = 2yi + 5xj$, C est la courbe $x^2 + y^2 = 1$.

On a :

$$x(s) = \cos(s),\ y(s) = \sin(s),\ 0 \leq s \leq 2\pi,\ r(s) = \cos(s)i + \sin(s))j$$

et

$$N(s) = -\cos(s)i - \sin(s))j.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \langle F, T(s)\rangle\, ds &= \int_0^{2\pi} \langle (2\sin(s)i + 5\sin(s)j), (-\cos(s)i - \sin(s)j\rangle\, ds \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin(s)\cos(s) - 5\sin(s)\cos(s))ds \\
&= -7\int_0^{2\pi} \sin(s)\cos(s)ds \\
&= -\frac{7}{2}\sin^2(s)]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

On a :

$$divF = (\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}) = 0.$$

Donc :

$$\iint_D divF dA = 0.$$

Intuitivement, la valeur de la divergence d'un champ de vecteur F en un point P est une mesure du rythme auquel le champ s'étend à partir d'un point P.

2.4 Intégrale Triple

On considère une fonction $w = f(x, y, z)$ de trois variables à valeurs positives sur une région D de R^3, alors la généralisation du concept d'une intégrale triple sur D est analogue à l'extention d'une intégrale simple à une intégrale double. On note cette intégrale triple par sur une région D de l'espace R^3appelée **domaine d'intégration :**

$$\iiint_D f(x, y, z)dv \text{ ou } \iiint_D f(x, y, z)dxdydz \text{ ou } \iiint_D f(x, y, z)dydxdz \text{ etc...}$$

Soit D un domaine borné de R^3, D est contenu dans un parallélépipède B défini par :

$$[a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1].$$

On définit alors une partition P de B comme l'ensemble des mnp parallélépipèdes rectangulaires

$$R_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

tels que

$$i = 1, .., m;\ j = 1, ..., n;\ k = 1, ..., p,\ \Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_{ji} \Delta z_k \text{ le volume de } R_{ikj}.$$

La norme $\|P\|$ de la partition est définie par :

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_m, \Delta y_1, ..., \Delta y_n, \Delta z_1, ..., \Delta z_p\}.$$

Soit R l'ensemble de tous les parallélépipèdes rectangulaires R_{ijk} de la partition P contenu dans D. Pour chaque $R_{ijk} \subset D$, on choisit un point $(x_i^0, y_j^0, z_k^0) \in R_{ikj}$, et on définit la somme de Riemann :

$$S_{mn}p = \sum_{R_{ijk} \in R} f(x_i^0, y_j^0, z_k^0)\Delta V_{ijk}.$$

Si la limite de S_{mnp} existe quand $m, n, p \to \infty$, $\|P\| \to 0$ et est indépendante du choix de $(x_i^0, y_j^0, z_k^0) \in R_{ijk}$ alors on dit que f **est intégrable** sur D. En utilisant le même procédé, on peut définir l'intégrale triple d'une fonction de trois variables **à valeurs non nécessairement positives** comme limite d'une somme de Riemann

Définition 24

Une fonction f de trois variables est dite intégrable sur un domaine D si :

$$\lim_{m,n,p\to\infty, \|P\|\to 0} S_{mnp} = \lim_{m,n,p\to\infty, \|P\|\to 0} \sum_{R_{ijk} \in R} f(x_i^0, y_j^0, z_k^0)\Delta V_{ijk}$$

existe et ne dépend pas des points (x_i^0, y_j^0, z_k^0) choisis. La valeur de cette limite est appelée **intégrale triple** de f sur D. On note :

$$\iiint_D f(x, y, z)dA = \lim_{m,n,p\to\infty, \|P\|\to 0} S_{mnp}.$$

Toute fonction continue sur un domaine borné fermé est int égrable sur D. Si $f(x, y, z) = 1$ en tout point du domaine alors l'intégrale triple de de f sur D est égale au volume de D.

$$\iiint_D dV = \text{ volume de } B.$$

Théorème 27

Soit f une fonction continue sur $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Alors f est intégrable et

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)dV &= \int_a^b \left(\int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dzdy\right) dx \\ &= \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy\right) dz = ...\end{aligned}$$

Soit f une fonction continue sur

$$D = \left\{(x,y,z) \in R^3 \ / \ x \in [a,b], h_1(x) \leq y \leq h_2(x), g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\right\}.$$

Alors f est intégrable et

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dzdy\right) dx.$$

On a le même résultat si on interchange les variables x, y, z.

Théorème 28

Soient f *et* g deux fonctions intégrables sur un domaine D, et L, M *deux* constantes. Alors la fonction $Lf + Mg$ est intégrable sur D et

$$\iint_D (Lf(x,y,z) + Mg(x,y,z))dV = L \iint_D f(x,y,z)dV + M \iint_D g(x,y,z))dV.$$

Théorème 29

Soient f *et* g deux fonctions intégrables sur un domaine D telles que :

$$f(x,y,z) \geq g(x,y,z) \text{ sur } D.$$

Alors

$$\iint_D f(x,y,z)dV \geq \iint_D g(x,y,z))dV.$$

Exemple 76

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (2 + x + \sin(z))dV = \frac{8}{3}\pi a^3$$

est 2 volume de la boule de rayon a.

Le domaine d'intégration D est la boule de rayon a, centrée à l'origine. Les fonctions x et $sin(z)$ sont impaires pour chaque variables, donc :

$$\begin{aligned}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (2 + x + \sin(z))dV &= 2\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} dV + \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} xdV + \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \sin(z)dV \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (2 + x + \sin(z))dV \\ &= 2 \text{ volume de } D + 0 + 0 \\ &= \frac{8}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

Exemple 77

Calculer $\iiint_D xy^2z^3dv$,où D est définie par :

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c.$$

$$\begin{aligned}\iiint_D xy^2z^3dv &= \int_0^a \int_0^b (\int_0^c (xy^2z^3)dz)dydx \\ &= \int_0^a xdx \int_0^b y^2dy \int_0^c z^3dz \\ &= \frac{a^2}{2}\frac{b^3}{3}\frac{c^4}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 78

Calculer

$$\iiint_D xy\sin(yz)dv$$

où D est le parallélépipède rectangulaire borné par les plans $x = \pi, y = \frac{\pi}{2}, z = \frac{\pi}{3}$, et les plans de coordonnées $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

$$\begin{aligned}\iiint_D xy\sin(yz)dv &= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{3}} (xy\sin(yz)dz)dydx \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-x\cos(yz)]_0^{\frac{\pi}{3}} dydx \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x(1-\cos(\frac{\pi}{3}y)dydx \\ &= \int_0^{\pi} (x(y - \frac{3}{\pi}\sin(\frac{\pi}{3}y)]_0^{\frac{\pi}{3}} dx \\ &= \frac{\pi}{4}(\pi^2 - 6\sin(\frac{\pi^2}{6})).\end{aligned}$$

Exemple 79

Évaluer

$$\iint_D ydV$$

où D est tétraèdre dont les sommets sont :

$$(0,0,0);\ (1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1).$$

La région D est un domaine régulier définie par :

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y :$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\iiint_D ydA &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (\int_0^{1-x-y} ydz)dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} y(1-x-y)dydx \\
&= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Si on inverse l'ordre $dzdydx$ à $dzdxdy$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iiint_D ydA &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (\int_0^{1-x-y} ydz)dxdy \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Si on inverse l'ordre $dzdydx$ à $dxdzdy$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iiint_D ydA &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (\int_0^{1-y-z} ydx)dzdy \\
&= \frac{1}{24} etc..
\end{aligned}$$

Exemple 80

Calculer

$$\iiint_D 2xydv,$$

où D est la région à l'intérieur du cylindre $x^2+y^2=1$ borné au dessus par le plan $x+y+z=4$, et au dessous par le plan $z=-1$.

La région D est déterminée par :

$$-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq z \leq 4-x-y.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\iiint_D 2xydV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{4-x-y} 2xydzdydx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [2xyz]_{-1}^{4-x-y} dydx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (10xy - 2x^2y - 2xy^2)dydx \\
&= \int_{-1}^1 -\frac{4}{3}x(4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 0.
\end{aligned}$$

Le domaine et la fonction sont symétriques par rapport au plan $x=y$, ce qui explique le résultat obtenu.

Exemple 81

Calculer le volume du solide borné par les paraboloïdes $y = 4 - x^2 - z^2$ et $y = x^2 + z^2$.

Pour situer la région D, on détermine l'intersection des deux graphes $y = 4 - x^2 - z^2$ et $y = x^2 + z^2$, on obtient le cercle $x^2 + z^2 = 2$, de plus $x^2 + z^2 \le y \le 4 - x^2 - z^2$.

Par conséquent D est défini par :

$$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ -\sqrt{2 - x^2} \le z \le \sqrt{2 - x^2},\ \text{et } x^2 + z^2 \le y \le \mathbf{4} - \mathbf{x}^2 - z^2.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
V = \iiint_D dV &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+z^2}^{4-x^2-z^2} dydzdx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} [y]_{x^2+z^2}^{4-x^2-z^2}\, dzdx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (4 - 2x^2 - 2z^2) dzdx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[(4 - 2x^2)z - \frac{2z^3}{3}) \right]_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{3}(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{8}{3}(2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 4\pi.
\end{aligned}$$

En utilisant des substitutions trigonométriques, on obtient :

$$\int (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{4}x \left(\sqrt{(2 - x^2)} \right)^3 + \frac{3}{4}x\sqrt{(2 - x^2)} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2}x.$$

Exemple 82

Calculer le masse du solide borné par le paraboloïde cylindrique $z = 2 - \dfrac{1}{2}x^2$ et les plans $z = 0$, $y = x$, et $y = 0$, en supposant que la densité $\rho(x, y, z)$ est proportionnelle à z. La masse m est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_D \rho(x, y, z) dV \\
&= \iiint_D kz dV \\
&= k \int_0^2 \int_0^x \int_0^{2-\frac{x^2}{2}} zdzdydx \\
&= \frac{4}{3}k.
\end{aligned}$$

2.5 Intégrale de surface

En général, une surface S dans l'espace R^3 est représentée par :

$$z = f(x, y), \text{ ou } g(x, y, z) = 0.$$

Par exemple : L'équation

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

la demi-sphère supérieure .

Il existe alors une relation entre les variables x, y, z comme pour les les courbes, on peut déterminer la surface à partir d'une représentation paramétrique en utilisant seulement deux paramétrés, cette représentation est de la forme :

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k, \ (u, v) \in D$$

où $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont des fonctions numériques de deux variables et D est une région du plan R^2.

Exemple 83

Le cylindre circulaire

$$x^2 + y^2 = a^2, \ -1 \leq z \leq 1,$$

de rayon a et de hauteur 2 est déterminé par la représentation paramétrique :

$$r(u, v) = a\cos(u)i + a\sin(u)j + vk, \ 0 \leq u \leq 2\pi, \ -1 \leq v \leq 1.$$

Exemple 84

Une représentation de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ est donnée :

$$r(u, v) = a\cos(u)\sin(v)i + a\sin(u)\sin(v)j + a\sin(v)k, \ 0 \leq u \leq 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si u est constant ou si v est constant alors, on obtient les méridiens. Cette représentation est surtout utilisée en géographie.

On peut aussi donner une représentation de la sphère :

$$r(u, v) = a\cos(u)\cos(v)i + a\sin(u)\cos(v)j + a\cos(v)k, \ 0 \leq u \leq 2\pi, \ 0 \leq v \leq \pi.$$

Cette représentation est utilisée en mathématiques.

Exemple 85

On peut représenter le cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$ par :

$$r(u, v) = v\cos(u)i + v\sin(u)j + vk, \ 0 \leq u \leq 2\pi, \ 0 \leq v \leq h.$$

Plan tangent et vecteur normal à une surface.

Soit S est une surface représentée par l'équation paramétrique :

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k,\ (u,v) \in D.$$

Supposons que la fonction r est de classe C^1, et soit P un point de la surface, les vecteurs suivants :

$$\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} = (\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}) \text{ au point } P;$$
$$\frac{\partial r(u,v)}{\partial v} = (\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}) \text{ au point } P$$

sont tangents à la surface S au point P. S'ils sont linéairement indépendants, alors le plan tangent au point P est engendré par les vecteurs $\frac{\partial r(u,v)}{\partial u}$, $\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}$ et le vecteur produit vectoriel $N = \frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \neq 0$ est un vecteur normal à la surface S au point P.

Le vecteur $n = \frac{N}{\|N\|}$ est un vecteur unitaire normal à la surface S au point P ; le vecteur $-n$ est aussi un vecteur unitaire normal à S au point P. Déterminons les composantes de N :

$$\begin{aligned} N &= \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} - j\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= i\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant :

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} N &= i\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + j\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + k\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \text{ ou} \\ N &= (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}). \end{aligned}$$

En utilisant une approche similaire pour calculer l'aire d'une surface S déterminée par $z = f(x,y)$,

Si la surface S est une surface représentée par l'équation paramétrique :

$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k,\ (u,v) \in D.$$

Alors on obtient la relation :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2} dudv \\ &= \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2} dudv \\ &= \|N(u,v)\|\, dudv. \end{aligned}$$

Exemple 86

Si la surface S est représentée par le graphe $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.
On considère alors la paramétrisation $r(x, y) = xi + yj + f(x, y)k$,

$$\frac{\partial r(x,y)}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}), \text{ et } \qquad \frac{\partial r(x,y)}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}).$$

Par la suite :

$$N = (-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, 1),$$

on retrouve le résultat suivant qu'on a déjà démontré

$$ds = \sqrt{(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + (1)^2} dxdy,$$

de plus, l'aire de la surface est donné par :

Définition 25

Soit $f(x, y, z)$ un champ de scalaire continu défini sur une surface S de R^3, la surface S est représentée par l'équation paramétrique :

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k, \ (u, v) \in D.$$

On définit alors l'intégrale de f sur S par :

$$\begin{aligned} \iint_S f ds &= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|N(u,v)\| \, dudv \\ &= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)})^2} dudv. \end{aligned}$$

Exemple 87

Si la surface S est représentée par la paramétrisation :

$$x = r\cos(\theta), \ y = r\sin(\theta), \ z = \theta, \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ 0 \le r \le 1.$$

Calculer

$$\iint_S f ds,$$

où

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

On calcule les dérivées partielles ;

$$dfrac\partial(x,y)\partial(r,\theta) = r, \ \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin(\theta), \ \frac{\partial(x,z)}{\partial(r,\theta)} = \cos(\theta)$$

donc d'après la définition :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(r)^2 + (\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2} drd\theta \\ &= \sqrt{r^2 + 1} drd\theta. \end{aligned}$$

De plus :

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta) = \sqrt{r^2+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\iint_S f ds &= \iint_D \sqrt{r^2+1}\sqrt{r^2+1}drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)drd\theta = \frac{8\pi}{3}.\end{aligned}$$

Remarque 10

Si la surface est représentée par $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, alors :

$$\iint_S f ds = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + 1dxdy}$$

Exemple 88

On considère la surface S définie par :

$$z = x^2 + y,\ D = \{(x, y)/\ 0 \leq x \leq 1,\ \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Calculer $\iint_S xds$.

Par définition :

$$\begin{aligned}\iint_S xds &= \iint_D x\sqrt{(2x)^2+1+1}dxdy \\ &= \iint_D x\sqrt{4x^2+2}dxdy \\ &= \int_{-1}^1\int_0^1 x\sqrt{4x^2+2}dxdy \\ &= \frac{1}{6}(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) \\ &= \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Remarque 11

L'intégrale de surface $\iint_S f ds$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation de S.

Exemple 89 *Calculer*

$$\iint_S z^2 ds$$

où S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Si on considère la représentation paramétrique de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ donnée par :

$$r(u,v)=\cos(u)\sin(v)i+\sin(u)\sin(v)j+\cos(v)k,\ 0\leq u\leq 2\pi,\ 0\leq v\leq \pi.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} - & \sin(u)\sin(v) & \cos(u)\cos(v) \\ & \cos(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v)\end{pmatrix} \\
&= -\sin v\cos v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \cos(u)\sin(v) & \sin(u)\cos(v) \\ 0 & -\sin(v)\end{pmatrix} \\
&= -\cos u\sin^2 v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} - & \sin(u)\sin(v) & \cos(u)\cos(v) \\ & 0 & -\sin(v)\end{pmatrix} \\
&= \sin u\sin^2 v.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|N\| &= \sqrt{(-\sin v\cos v)^2+(-\cos u\sin^2 v)^2+(\sin u\sin^2 v)^2} \\
&= |\sin(v)|\,,
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 ds &= \iint_D \cos^2(v)\sin(v)dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(v)\sin(v)dudv \\
&= 2\pi\left[-\frac{\cos^3(v)}{3}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Si on considère la représentation paramétrique de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ donnée par :

$$r(u,v)=a\cos(u)\cos(v)i+a\cos(u)\sin(v)j+a\sin(v)k,$$
$$0\leq u\leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leq v\leq\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}-\quad\sin(u)\cos(v) & -\cos(u)\sin(v)\\ \cos(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v)\end{pmatrix}\\ &= \cos(v)\sin(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\cos(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v)\\ 0 & \cos(v)\end{pmatrix}\\ &= \cos u\cos^2 v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}-\quad\sin(u)\cos(v) & -\cos(u)\sin(v)\\ 0 & \cos(v)\end{pmatrix}\\ &= -\sin u\cos^2 v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|N\| &= \sqrt{(\sin v\cos v)^2+(-\cos u\cos^2 v)^2+(\cos u\cos^2 v)^2}\\ &= |\cos(v)|\,,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\iint_S z^2 ds &= \iint_D \cos(v)\sin^2(v)dudv\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2(v)\sin(v)dudv\\ &= 2\pi\left[\frac{\sin^3(v)}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

2.6 Intégrale de surface d'une fonction vectorielle.

Définition 26

Soit
$$F(x,y,z) = F_1(x,y,z)i + F_2(x,y,z)j + F_3(x,y,z)k$$
un champ de vecteurs défini sur une surface S de R^3 représentée par l'équation paramétrique :
$$r(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k,\ (u,v) \in D.$$
On définit alors l'intégrale de f sur la surface S par :
$$\begin{aligned}\iint_S F.ds &= \iint_D \langle F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), N(u,v)\rangle\, dudv \\ &= \iint_D \left\langle F(r(u,v)), \frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \right\rangle dudv.\end{aligned}$$
Cette intégrale est appelée le **flux** de F à travers S.

Exemple 90

Calculer
$$\iint_S (xi + yj + zk).ds,$$
où S est la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Si on considère la représentation paramétrique de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donnée par :
$$r(u,v) = \cos(u)\sin(v)i + \sin(u)\sin(v)j + \cos(v)k,\ 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le \pi.$$
Le vecteur normal est donné par :
$$\begin{aligned}N &= (\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}) \\ &= (-\cos(v)\sin(v), -\cos(u)\sin^2(v), -\sin(u)\sin^2(v)).\end{aligned}$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned}\langle F, N\rangle &= \big\langle(\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v)), (-\cos(u)\sin^2(v), -\sin(u)\sin^2(v), -\cos(v)\sin(v))\big\rangle \\ &= -\cos^2(u)\sin^3(v) - \sin^2(u)\sin^3(v) - \cos^2(v)\sin(v) \\ &= -\sin(v).\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\iint_S (xi + yj + zk).ds &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -\sin(v)dvdu \\ &= 2\pi\left[\cos(v)\right]_0^{\pi} \\ &= -4\pi.\end{aligned}$$

Remarque 12 *L'intégrale de surface d'un champ de vecteur ne dépend pas de la paramétrisation de la surface S. L'intégrale de surface d'un champ de vecteurs dépend du choix du vecteur normal N choisi.*

Surface orientée

Une surface orientée est une surface qui admet deux côtés, l'un positif et l'autre négatif. Si n est un vecteur normal unitaire à S , $-n$ est aussi un vecteur unitaire de S. En choisissant un vecteur unitaire, on détermine le côté positif de la surface comme le côté d'où sort le vecteur normal n choisi. Dans ce cas, l'autre côté est le côté négatif. On définit ainsi l'orientation de S.

Il existe aussi des surfaces non orientables comme par exemple une surface de Möbius formée d'une bande de papier dont on joint les extrémités après avoir renversé l'une d'elles.

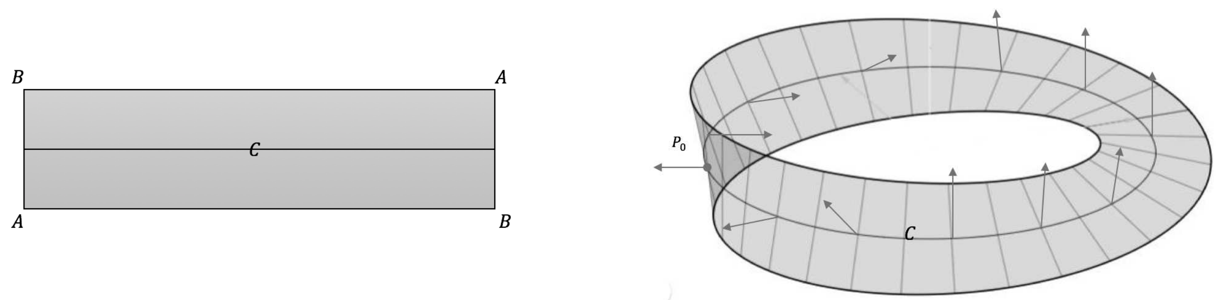


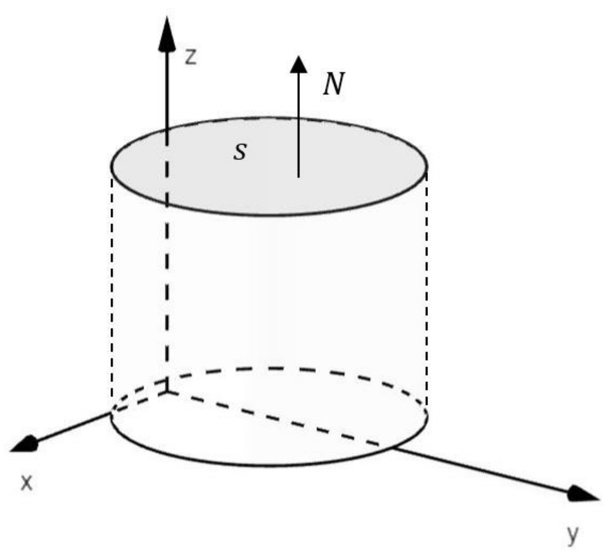
FIGURE 2.6 – Möbius

Exemple 91

Si on considère la surface $z = f(x, y)$ de classe C^1, si on choisit

$$N = (-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, 1),$$

alors le côté positif est le côté supérieur.



Soit S une surface orientable, si on choisit la normale N, par définition l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned}
\iint_S F.ds &= \iint_D \langle F(r(u,v)), N(u,v)\rangle \, dudv \\
&= \iint_D \left\langle F(r(u,v)), \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|} \right\rangle \|N(u,v)\| \, dudv \\
&= \iint_S \langle F, n\rangle \, ds
\end{aligned}$$

On peut exprimer l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F omme une intégrale de surface du champ scalaire $\langle F, n\rangle$, où $\langle F, n\rangle$ est la composante normale de F.

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 6

L'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F est aussi appelée **le flux de F à travers la surface S.**

$$\iint_S F.ds = \iint_S \langle F, n\rangle \, ds$$

Exemple 92

Calculer le flux total de $F = xi + yj + zk$ à travers le côté extérieur du cylindre défini par

$$x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h$$

. La surface du cylindre est composée d'une face supérieure $z = h$ dont la représentation paramétrique est donnée par :

$$r(u,v) = v \cos u i + v \sin u j + hk, \; 0 \leq u \leq 2\pi, \; 0 \leq v \leq a.$$

Donc :

$$N = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos u & -v \sin u & 0 \\ \sin u & v \cos u & 0 \end{pmatrix} = vk$$

vers l'extérieur, et donc $\langle F, N\rangle = vh$. Par conséquent $\iint_{face\,\sup} F.ds = \int_0^{2\pi} \int_0^a vhdvdu = 2\pi h \dfrac{a^2}{2} = \pi h a^2$.

D'une surface inférieure $z = -h$ dont la représentation est donnée par :

$$r(u,v) = v \cos u i + v \sin u j - hk, \; 0 \leq u \leq 2\pi, \; 0 \leq v \leq a,$$

de même $N = vk$ est dirigé vers l'intérieur, donc il faut prendre $-N$, et on

$$\langle F, -N\rangle = (-v)(-h) = vh.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\iint_{fac\inf} F.ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^a vhdvdu \\
&= 2\pi h \frac{a^2}{2} \\
&= \pi h a^2.
\end{aligned}$$

D'une face latérale dont la représentation paramétrique est donnée par :

$$r(u,v) = a\cos ui + a\sin uj + vk, \quad avec \quad 0 \le u \le 2\pi \quad et \quad -1 \le v \le 1$$

Donc :

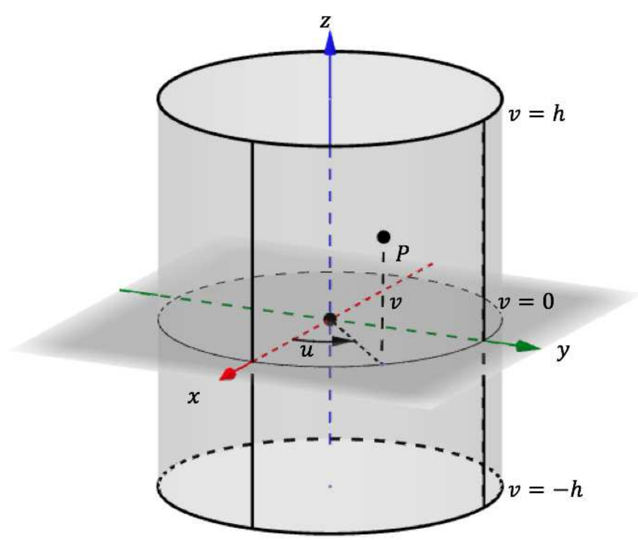
$$N = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -a\sin u & a\cos u & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a\cos ui + a\sin uj + 0k$$

vers l'extérieur, et donc $\langle F, N\rangle = \langle a\cos ui + a\sin u + vk, a\cos ui + a\sin uj\rangle = a^2$. Par conséquent

$$\iint_{faclat} F.ds = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} a^2 dvdu = 2\pi 2ha^2 = 4\pi ha^2.$$

Donc le flux total de F à travers le côté extérieur du cylindre S est la somme des trois flux ;

$$\iint_S F.ds = 6\pi ha^2.$$



Proposition 7

Soit S une surface orientée définie par le graphe $z = f(x,y)$,

$(x,y) \in D$ et n un vecteur normal unitaire à S sortant du côté supérieur (vers le haut).

Si f est de classe C^1 et si $F(x,y,z) = F_1(x,y,z)i + F_2(x,x,y,z)j + F_3(x,y,z)$ est un champ de vecteurs continu alors :

$$\iint_S F.nds = \iint_D (-F_1\frac{\partial f}{\partial x} + -F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3)dxdy$$

Le vecteur $N = (-\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, -\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, 1)$ est un vecteur normal à S à travers le côté supérieur, donc $n = \dfrac{N}{\sqrt{(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + 1}}$ est le vecteur normal unitaire à S.

Par définition :

$$\iint_S F.nds = \iint_S (-F_1\frac{\partial f}{\partial x} + -F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3)\frac{ds}{\sqrt{(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + 1}}$$

et

$$ds = \sqrt{(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + 1}dxdy,$$

par conséquent que

$$\iint_S F.nds = \iint_D (-F_1\frac{\partial f}{\partial x} + -F_2\frac{\partial f}{\partial y} + F_3)dxdy.$$

Soit S une surface orientable, si on choisit la normale N, par définition l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned}
\iint_S F.ds &= \iint_D \langle F(r(u,v)), N(u,v)\rangle\, dudv \\
&= \iint_D \left\langle F(r(u,v)), \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|}\right\rangle \|N(u,v)\|\, dudv \\
&= \iint_S \langle F, n\rangle\, ds
\end{aligned}$$

On peut exprimer l'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F comme une intégrale de surface du champ scalaire $\langle F, n\rangle$, la composante normale de F. On obtient alors la proposition suivante :

L'intégrale de surface d'un champ de vecteurs F est aussi appelée <u>le flux de F à travers la surface S</u>.

Exemple 93

Calculer le flux $\iint_S F.nds$ du champ de vecteurs $F = -yi + xj + 9k$ à travers la surface

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ 0 \le x^2 + y^2 \le 4.$$

On a :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{z},$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \frac{-y}{z}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\iint_S F.nds &= \iint_D (-y\frac{-x}{z} + x\frac{-y}{z} + 9)dxdy \\
&= 9\iint_D dxdy = 9\text{aire de } D \\
&= 9(\pi 2^2) = 36\pi
\end{aligned}$$

Proposition 8 *Soit S une surface orientée définie par le graphe $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ et n un vecteur normal unitaire à S sortant du côté inférieur (vers le bas).*
Si f est de classe C^1 et si $F(x, y, z) = F_1(x, y, z)i + F_2(x, x, y, z)j + F_3(x, y, z)$ est un champ de vecteurs continu alors :

$$\iint_S F.nds = \iint_D (F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} - F_3)dxdy.$$

Exemple 94

Calculer l'intégrale de surface $\iint_S F.nds$, où $F = 2xi + yj + zk$, S est la surface du paraboloïde $z = x^2 + y^2$, borné par les plans $z = 0$, $z = 4$, à travers l'extérieur de S. Le côté extérieur du paraboloïde est dirigé vers le bas, donc d'après la proposition,

$$\begin{aligned}
\iint_S F.nds &= \iint_D (F_1\frac{\partial f}{\partial x} + F_2\frac{\partial f}{\partial y} - F_3)dxdy \\
&= \iint_D (4x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)dxdy \\
&= \iint_D (3x^2 + y^2)dxdy
\end{aligned}$$

où D est le disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

En passant aux coordonnées polaires, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\iint_S F.nds &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(3\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 (3\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)drd\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} (3\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} (3(1 + \cos(2\theta)) + 1 - \cos(2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (8 + 4\cos(2\theta))d\theta = 16\pi
\end{aligned}$$

2.7 Changement de variables dans une intégrale double

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y où les variables sont définies comme des fonctions de deux variables u et v par les équations : $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$.

Exemple 95 *Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires*

$$x = x(r, \theta) = r\cos(\theta)$$

$$y = y(r, \theta) = r\sin(\theta)$$

On considère alors une transformation $T : R^2 \to R^2$ du plan cartésien uOv sur le plan cartésien xOy définie par $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Une transformation T d'un sous-ensemble S du plan

uOv sur un sous-ensemble D du plan xOy est bijective si :

i) $\forall (u,v) \in S$, $\exists (x,y) \in D$ tel que $T(u,v) = (x,y)$;
ii) $\forall (x,y) \in D$, $\exists (u,v) \in S$ unique tel que $T(u,v) = (x,y)$.

On suppose que la transformation $T : S \to D$ est bijective, les fonctions $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$ de classe C^1, le jacobien de x et de y par rapport à u et v défini par :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de T.

On voudrait transformer l'intégrale double $\iint_D f(x,y)dA$ en une intégrale double dont le domaine d'intégration est $S = T^{-1}(D)$, la fonction à intégrer est donnée par :

$$f(x(u,v), y(u,v))$$

Il suffit d'exprimer $dA = dxdy$ en fonction de $dudv$.

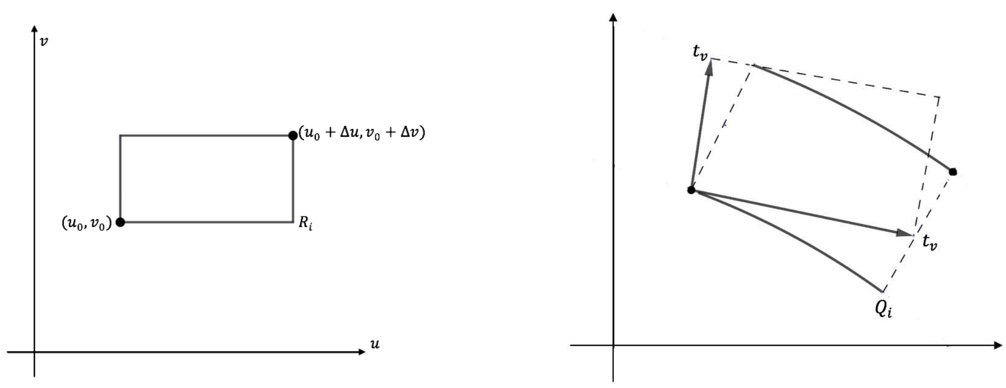
Si $v = c$ constante, on obtient des courbes en u définies par $(x(u,c), y(u,c))$,

Si $u = c$ constante, on obtient des courbes en v définies par $(x(c,v), y(c,v))$

On considère alors la surface ΔA bornée par les courbes en u correspondant à des valeurs voisines de $P(x(u,v), y(u,v))$ et de $Q(x(u+\Delta u, v), y(u+\Delta u, v))$, et par les courbes en v correspondant à des valeurs voisines de $P(x(u,v), y(u,v))$ $R(x(u, v+\Delta v), y(u, v+\Delta v))$. Les courbes sont de classe C^1,

si Δu et Δv suffisamment petits, on peut approcher ΔA par une surface d'un parallélogramme défini par le plan tangent.

$$\Delta A \approx \|PQ \times PR\|$$



En passant à la limite, on obtient $PQ = dxi + dyj$, tel que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \quad et \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

Le long de l'arc PQ, $dv = 0$, et donc

$$PQ = \frac{\partial x}{\partial u}dui + \frac{\partial y}{\partial u}duj$$

De même, le long de l'arc PR, $du = 0$, donc

$$PR = \frac{\partial x}{\partial v} dv i + \frac{\partial y}{\partial v} dv j$$

Donc

$$\begin{aligned} dA &= \left\| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} k \right\| dudv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \end{aligned}$$

car

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Théorème 30

Soit $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ une transformation bijective d'un domaine S du plan uOv sur un domaine D du plan xOy, T *est* de classe C^1.

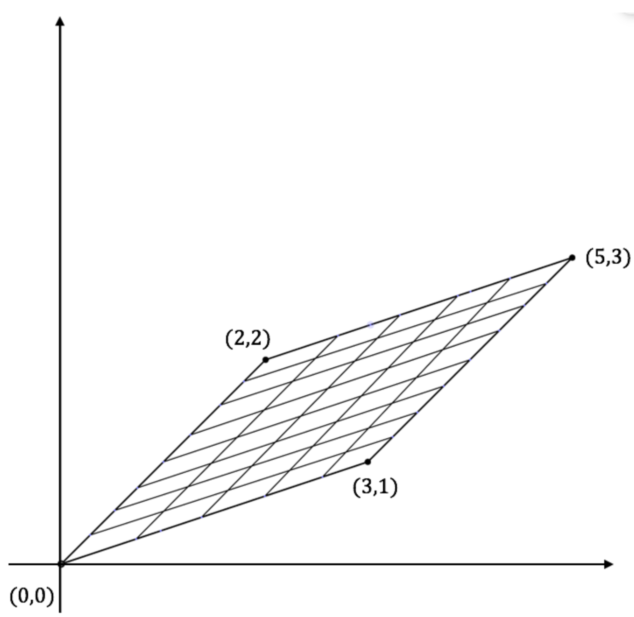
Si le jacobien de T, noté $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, est différent de 0 et si $f(x,y)$ est intégrable sur D alors la fonction $f(x(u,v), y(u,v))$ est intégrable sur S , de plus :

$$\iint_D f(x,y) dxdy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Exemple 96

On considère le parallélogramme D de sommets $(0,0), (3,1), (5,3)$, et $(2,2)$.

En utilisant les changement de variables $x = 3u + v$, et $y = u + v$, calculer $\iint_D xydxdy$.



Le rectangle $S = \{(u,v) \ / \ \ 0 \leq u \leq 1 \ \ et \ 0 \leq v \leq 2\}$ est l'image réciproque de T.
Le jacobien de T est :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

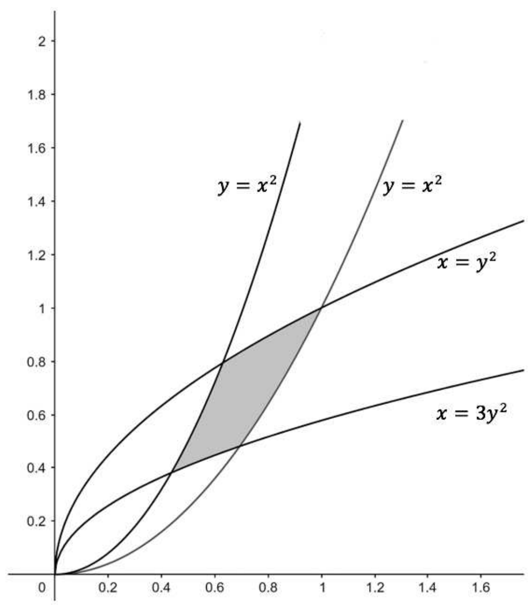
par conséquent, on obtient le changement de variable :

$$\iint_D xydxdy = \iint_S (3u+v)(u+v)2dudv = 2\int_0^2\int_0^1 (3u+v)(u+v)dudv = \frac{52}{3}$$

Exemple 97

Calculer l'aire de région bornée par les quatre paraboles d'équations

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad x = y^2, \quad x = 3y^2$$



On considère le changement de variables $u = \dfrac{y}{x^2}$, $v = \dfrac{x}{y^2}$, La région D correspond au rectangle

$$S = \{(u,v) \ / \ \ 1 \leq u \leq 2 \ \ et \ 1 \leq v \leq 3\}.$$

Puisque :

$$x = u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}},$$
$$y = u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}},$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} &= \det\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{9}u^{-2}v^{-2} - \frac{1}{9}u^{-2}v^{-2} \\ &= \frac{1}{3u^2v^2}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\text{l'aire de} &= \iint_D dxdy \\
&= \iint_s \frac{1}{3u^2v^2} dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{u^2}\int_1^3 \frac{dv}{v^2} \\
&= \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

2.8 Changement de variables dans une intégrale triple

On considère la transformation bijective $T : S \to D$ définie par :

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(x,y,w))$$

On suppose que T est de classe C^1. On définit le jacobien :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

On suppose que le jacobien est différent de zéro, on a :

$$dv = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

La démarche est analogue à celle d'une intégrale double et on obtient le théorème suivant :

Théorème 31

Soit $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(x,y,w))$ une transformation bijective d'un domaine S de R^3 sur un domaine D de R^3, T de classe C^1.

Si le jacobien de T, noté $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$, est différent de 0.

si $f(x,y,z)$ est intégrable sur D alors la fonction $f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ est intégrable sur S , de plus :

$$\iint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Exemple 98

Calculer le volume de l'intérieur D de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Si on considère le changement de variables : $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, donc, le domaine D correspond à la boule $S : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, le jacobien

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$. En utilisant le théorème de changement de variables :

$V = \iiint_D dxdydz = \iiint_S abcdudvdw = abc\iiint_S dudvdw = abc$ (volume de S) $= \frac{4}{3}\pi abc$.

2.8.1 Coordonnées cylindriques

On considère la transformation en coordonnées cylindriques :

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z.$$

Le jacobien est donné par :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

L'expression en coordonnées cylindriques du volume dV d'une portion d'un solide est donnée par :

$$dV = rdrd\theta dz$$

Théorème 32

a) Soit D une région de R^3 définie par :

$$D = \left\{(r,\theta,z) \in R^3 \ / \ a \le \theta \le b \text{ et } h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\ g_1(r,\theta) \le z \le g_2(r,\theta)\right\},$$

les fonctions h_1, h_2, g_1, g_2 sont continues. Si f une fonction continue sur la région D alors :

$$\iiint_D f(r,\theta,z)dV = \int_a^b \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta$$

b) Soit D une région de R^3 définie par :

$$D = \left\{(r,\theta,z) \in R^3 \ / \ a \le r \le b \text{ et } h_1(r) \le \theta \le h_2(r),\ g_1(r,\theta) \le z \le g_2(r,\theta)\right\}$$

les fonctions h_1, h_2, g_1, g_2 sont continues. Si f une fonction continue sur la région D alors :

$$\iiint_D f(r,\theta,z)dV = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzd\theta dr.$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

Exemple 99

Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

Le solide est déterminé par les inéquations :

$$-2\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le 2\sqrt{1-x^2-y^2},\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1,$$

donc,le volume donné par :

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-2\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdydv$$

En considérant les coordonnées cylindriques $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$,

on a obtient :

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -2\sqrt{1-r^2} \le z \le 2\sqrt{1-r^2}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-2\sqrt{1-r^2}}^{2\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 [rz]_0^{2\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr d\theta \\
&= \frac{8}{3}\pi.
\end{aligned}$$

2.8.2 Coordonnées sphériques.

On considère la transformation en coordonnées sphériques :

$$x = R\sin(\varphi)\cos(\theta),\ y = R\sin(\varphi)\sin(\theta),\ z = R\cos(\varphi);$$

$$\text{et} \quad 0 \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

Remarquons que :

$$x^2 + y^2 = R^2\sin^2(\varphi),\ r = \sqrt{x^2+y^2} = R\sin(\varphi).$$

Le jacobien est donné par :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & -R\sin(\varphi)\sin(\theta) & R\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & R\sin(\varphi)\cos(\theta) & R\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -R\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= \left| -\left(\sin^3\varphi\cos^2\theta\right)R^2 - \left(\sin^3\varphi\sin^2\theta\right)R^2 - R^2\sin\varphi\sin^2\theta\cos^2\varphi - R^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin\varphi\right| \\
&= \left| -(\sin\varphi)R^2\right| = R^2(\sin\varphi).
\end{aligned}$$

On obtient l'expression :

$$dV = dxdydz = R^2(\sin\varphi)\,dRd\theta d\varphi.$$

Théorème 33

a) Soit D une région de R^3 définie par :

$$D = \left\{(R,\theta,\varphi) \in R^3 \ /\ a \le \theta \le b \text{ et } h_1(\theta) \le \varphi \le h_2(\theta),\ g_1(\theta,\varphi) \le R \le g_2(\theta,\varphi)\right\},$$

les fonctions h_1, h_2, g_1, g_2 sont continues. Si f une fonction continue sur la région D alors :

$$\iiint_D f(R,\theta,\varphi)dV = \int_a^b \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(\theta,\varphi)}^{g_2(\theta,\varphi)} f(R,\theta,\varphi)R^2(\sin\varphi)\,dRd\varphi d\theta.$$

b) Soit D une région de R^3 définie par :

$$D = \left\{(R,\theta,\varphi) \in R^3 \ /\ a \le \varphi \le b \text{ et } h_1(\varphi) \le \theta \le h_2(\varphi\ ),\ g_1(\theta,\varphi) \le R \le g_2(\theta,\varphi)\right\},$$

les fonctions h_1, h_2, g_1, g_2 sont continues. Si f une fonction continue sur la région D alors :

$$\iiint_D f(R,\theta,\varphi)dV = \int_a^b \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} \int_{g_1(\theta,\varphi)}^{g_2(\theta,\varphi)} f(R,\theta,\varphi)R^2 (\sin\varphi)\, dRd\theta d\varphi$$

c)

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_D f(R\sin(\varphi)\cos(\theta), R\sin(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\varphi))R^2 (\sin\varphi)\, dRd\theta d\varphi$$

Exemple 100

Calculer le volume de la sphère de rayon a, en utilisant les coordonnées sphériques. La sphère es déterminée par l'équation : $x^2+y^2+z^2=a^2$. En coordonnées sphériques, le solide est déterminé par :

$$x = R\sin(\varphi)\cos(\theta),\ y = R\sin(\varphi)\sin(\theta),\ z = R\cos(\varphi)$$

$$0 \leq R \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Donc le volume est donné par :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq a^2} dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(R^2\sin(\varphi))dRd\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^3\sin(\varphi))}{3}d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{-\ a^3\cos(\varphi))}{3}]_0^{\pi}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2a^3}{3}d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

Exemple 101

On considère la région de R^3 définie par :

$$D = \{(x,y,z)/\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

Déterminer la masse M de D si la densité au point (x,y,z) donnée par la fonction :

$$\rho(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En coordonnées sphériques, le solide est déterminé par :

$$x = R\sin(\varphi)\cos(\theta),\ y = R\sin(\varphi)\sin(\theta),\ z = R\cos(\varphi)$$

$$0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

La densité est exprimée par $\rho(R,\theta,\varphi) = e^{-(R)^3}$.

Donc la masse est donnée par :

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_D \rho(x,y,z)dV \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 e^{-(R)^3}(R^2\sin(\varphi))dRd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\frac{1}{e})\sin(\varphi)d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}(-\frac{e-1}{3e})\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{e-1}{3e}d\theta = \frac{2\pi(e-1)}{3e}.
\end{aligned}$$

Exemple 102

Calculer le volume de la sphère de rayon a, en utilisant les coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques, l'intérieur de la sphère est déterminé par les inéquations :

$$0 \leq R \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Donc le volume est donné par :

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a (R^2\sin(\varphi))dRd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^3\sin(\varphi))}{3}d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{-\ a^3\cos(\varphi))}{3}]_0^{\pi}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{2a^3}{3}d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Exemple 103

On considère

$$D = \{(x,y,z)/\, x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Déterminer la masse de D si la densité au point (x,y,z) donnée par la fonction :

$$\rho(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En coordonnées sphériques, le solide est déterminé par les inéquations :

$$0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

La densité est exprimée par

$$\rho(R,\theta,\varphi) = e^{-(R)^3}.$$

Donc la masse est donnée par :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 e^{-(R)^3}(R^2\sin(\varphi))dRd\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(1-\frac{1}{e})\sin(\varphi)d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(-\frac{e-1}{3e})\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{e-1}{3e}d\theta \\ &= \frac{2\pi(e-1)}{3e}. \end{aligned}$$

2.9 Théorème de Stokes

La formule de Stokes est une généralisation de la formule de Green-Riemann : elle permet de transformer une intégrale curviligne à travers une courbe C frontière d'une surface S, en une intégrale double sur cette surface S. La démonstration est analogue au théorème Green-Riemann dans le plan et utilise ce théorème au lieu du théorème fondamental d'analyse.

Théorème 34 *Soit S une surface orientée de l'espace, n est le champ de vecteurs normal unitaire à S. La frontière de la surface S est formée d'une ou plusieurs courbes lisses par morceaux dont l'orientation est déterminée par S.*

Si $F(x,y,z) = F_1(x,y,z)i + F_2(x,x,y,z)j + F_3(x,y,z)$ est un champ de vecteurs de classe C^1 alors :

$$\int_C F.dr = \iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS.$$

$\int_C F.dr$ est l'intégrale curviligne de F à travers la courbe frontière C.

Exemple 104

Vérifier le théorème de Stokes si $F = yi - x^2j + 2z^2k$ et S est la portion du paraboloïde $z = 4 - x^2 - y^2$ au dessus du plan xOy, et n est le champ de vecteurs normal dirigé vers l'extérieur.

La courbe C est déterminée par $z = 0$, c'est la frontière du disque $x^2 + y^2 \leq 4$.

Par conséquent, $C = \{(x,y,0)/\ x^2+y^2 = 4\}$ dont la paramétrisation est donnée par :

$$x(t) = 2\cos(t),\ y(t) = 2\sin(t),\ z(t) = 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Calculons l'intégrale curviligne à travers la courbe C est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_C F.dr &= \int_0^{2\pi}(2\sin(t)(-2\sin(t)) - (2\cos(t))^2(2\cos t))dt \\ &= \int_0^{2\pi}(-4\sin^2(t) - 8\cos^3(t))dt \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale de surface :

$$\iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS.$$

$$RotF = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x^2 & 2z^2 \end{pmatrix} = -(2x+1)k.$$

La surface S est déterminée par le graphe

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ D = \{(x,y)\,/x^2+y^2 \leq 4\},$$

en utilisant la proposition 8.7 , on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS &= \iint_S \langle (-2x-1)k, n\rangle\, dS \\ &= \iint_D -(2x+1)dxdy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-2r\cos(\theta)-1)rd\theta dr \\ &= \int_0^2 \left[2r^2\sin(\theta) - r\theta\right]_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^2 -2\pi r dr = -4\pi. \end{aligned}$$

Exemple 105

En utilisant le théorème de Stokes, calculer

$$\int_C y^3dx - x^3dy - z^3dz,$$

où C est l'intersection du cylindre $x^2+y^2=1$ et le plan $x+y+z=1$,

l'orientation de C est positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La courbe C ainsi définie est la frontière de la surface S définie par $z = 1-x-y$ sur

$$D = \{(x,y)\,/\,x^2+y^2 \leq 1\}.$$

On pose

$$F = y^3i - x^3j - z^3k$$

, les hypothèses du théorème de Stokes sont vérifiées on a :

$$\int_C y^3dx - x^3dy - z^3dz = \iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS$$

$RotF = (3x^2+3y^2)k$, en utilisant la proposition 8.7, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS &= \iint_D (3x^2+3y^2)dxdy \\ &= 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Vérifier le résultat en calculant directement l'intégrale curviligne.

La projection de la courbe C sur le plan xOy est donnée par

$$x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$$

dont la paramétrisation

$$x = \cos(t),\ y = \sin(t)\ z(t) = 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Par conséquent l'équation paramétrique de la courbe :

$$x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t)\ z(t) = 1 - \sin(t) - \cos(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Donc :

$$\int_C y^3dx - x^3dy - z^3dz = \int_0^{2\pi} (-\sin^3(t)(-\sin(t) + (\cos^3(t)(\cos(t) - (1 - \sin(t) - \cos(t))^3(-\cos(t) + \sin(t))dt$$

En simplifiant, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} (\sin^4(t) + (\cos^4(t)dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin(t) - \cos(t))^3(-\cos(t) + \sin(t))dt.$$

Le deuxième terme est égal à 0, car

$$\int_0^{2\pi} (1 - \sin(t) - \cos(t))^3(-\cos(t) + \sin(t))dt = \frac{1}{4}(1 - \sin(t) - \cos(t))^4]_0^{2\pi} = 0.$$

En utilisant deux fois les formules trigonométriques de linéarisation :

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2},\ \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_C y^3dx - x^3dy - z^3dz &= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 4t dt \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Exemple 106

En utilisant le théorème de Stokes, calculer :

$$\int_C (x^2 - 3y^2)dx + (z^2 + y)dy - (x + 2z^2)dz,$$

où C est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 9$ et le plan $x - 2y + z = 5$.

l'orientation de C est positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

On pose $F = (x^2 - 3y^2)i + (z^2 + y)j - (x + 2z^2)k$, on considère la surface S à l'intérieur de la courbe C, cette surface est définie par $z = 5 - x + 2y$ sur la boule $x^2 + y^2 \leq 9$, *de plus* $RotF = -2zi - j + 6yk$.

Donc, d'après le théorème de Stokes, la proposition 8.7 :

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - 3y^2)dx + (z^2 + y)dy - (x + 2z^2)dz &= \iint_S \langle RotF, n\rangle\, dS \\ &= \iint_D (2x + 2y - 8)dxdy = -72\pi. \end{aligned}$$

2.10 Théorème d'Ostrogradsky ou de Gauss ou de Divergence

La formule d'Ostrogradsky est l'analogue de la formule de Green-Riemann dans l'espace R^3,elle permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale triple. Cette formule joue un rôle très important en physique.

Théorème 35

Soit D un domaine de R^3 borné par une surface S fermée et de classe C^1 par morceaux .On suppose que D est entièrement situé d'un même côté de S, et que la surface S est orientée par le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur.

Si

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z)i + F_2(x, y, z)j + F_3(x, y, z)k$$

est un champ de vecteurs de classe C^1 sur S, alors on obtient la formule suivante :

$$\iiint_D divFdv = \iint_S \langle F, n\rangle \, dS.$$

Exemple 107

Calculer le flux du champ du vecteur de vecteurs :

$$F(x, y, z) = (x - y^2)i - 3yj + (x^3 - z)k$$

à travers l'extérieur de la sphère

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Les hypothèses du théorème de divergence sont vérifiées, en utilisant ce théorème, on obtient :

$$\begin{aligned} Flux = \iint_S \langle F, n\rangle \, dS \\ &= \iiint_D divFdv \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 9} 3dxdydz. \end{aligned}$$

car $divF = 3$ et la sphère S délimite le volume $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ et donc :

$$\begin{aligned} Flux &= 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 9} dxdydz \\ &= 3vol(\ D) \\ &= 3(\frac{4}{3}\pi 3^3) = 108\pi. \end{aligned}$$

Exemple 108 *Calculer le flux du champ du vecteur de vecteurs :*

$$F(x, y, z) = (y^2z^3)i - 4x^2yz^2j + (x^2z^3)k$$

à travers l'extérieur de la sphère :

$$Sx^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Les hypothèses du théorème de divergence sont vérifiées, en utilisant ce théorème on obtient :

$$\begin{aligned} Flux &= \iint_S \langle F, n \rangle \, dS \\ &= \iiint_D divF dv. \end{aligned}$$

La divergence $divF = 7x^2z^2$ et la sphère S délimite le volume $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ et donc :

$$Flux = 7 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^2 z^2 dxdydz.$$

En utilisant les coordonnées sphériques, on obtient :

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^2 z^2 dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (R\cos(\theta)\sin(\varphi))^2 (R\cos(\varphi))^2 R^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta dR.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} Flux &= 7 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (R^6 \cos^2(\theta) \sin^3(\varphi) \cos^2(\varphi)) d\varphi d\theta dR \\ &= \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$