



Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007-2008

Filière SMIA - Semestre 1

Séries + correction : Analyse *I*

Professeur : ZINE EL-ABIDINE GUENNOUN

Département de Mathématiques

Table des matières

Séries des Travaux Dirigés	3
Série No 0 (Rappels)	3
Série No 1	5
Série No 2	7
Série No 3	9
Série No 4	11
 Correction	 14
Corrigé de la série No 0.	14
Corrigé de la série No 1	17
Corrigé de la série No 2	22
Corrigé de la série No 3	28
Corrigé de la série No 4	34

Séries des Travaux Dirigés

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres réels.

- (a) Montrer que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $ab \neq 0$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
- (b) Montrer que si $a > b > 0$ alors $b^{-1} > a^{-1}$; l'hypothèse $b > 0$ est-elle nécessaire ?
- (c) Montrer que si $a < b$ alors $a < \frac{a+b}{2} < b$.
- (d) Montrer que si $0 < a < b$ alors

$$\begin{cases} a < \sqrt{ab} < b \\ \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

- (e) Montrer que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

- (f) Montrer que, si $a < b$ alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| < |x - b| \iff x < \frac{a+b}{2}.$$

- (g) Déterminer $\delta > 0$ en fonction de ε pour que l'implication, ci-suivante, soit vraie

$$|x - 5| < \delta \implies |3x - 15| < \varepsilon.$$

- (h) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x + 4| - |x - 1| < 4.$$

Exercice 2.

- (a) Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement.
- (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1, +\infty[$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.
- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < a < 1 \implies a^{\frac{1}{n}} \geq a.$$

Exercice 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, bornée inférieurement. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) $a = \inf(A)$,
- (b) $\forall x \in A$ on a $a \leq x$; et si pour tout $x \in A$, $a_1 \leq x$ alors $a_1 \leq a$.
- (c) $\forall x \in A$, on a $a \leq x$; et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$.

Exercice 4.

Soit

$$A := \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- (a) Vérifier que A est borné et déterminer $\inf(A)$.
- (b) En utilisant la définition; montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf(A)$.

Exercice 1.

- (a) Démontrer que toute suite croissante non bornée tend vers $+\infty$.
- (b) En déduire la limite de la suite géométrique $u_n = q^n$, avec $q > 1$.
- (c) Démontrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et calculer sa limite.
- (d) En utilisant la question (c), montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est majorée. (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 2.

- (a) Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$.
- (b) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Démontrer que les deux suites de terme général $x_n = \sup(u_n, v_n)$ et $y_n = \inf(u_n, v_n)$ convergent. Exprimer leur limites en fonction de celles de (u_n) et de (v_n) .

Exercice 3.

- (a) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Montrer que si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

- (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq a, \quad v_n \leq b \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = a + b.$$

En utilisant la question (a), montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$.

- (c) Vérifier la véracité des propositions suivantes, en justifiant votre réponse,
- (i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ .
- (ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0$.
- (iii) Si (u_n) et (v_n) divergent alors $(u_n + v_n)$ diverge.

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \text{ et } v_0 \geq u_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

- (a) Démontrer que $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 5.

Etudier la convergence et calculer (en cas d'existence) la limite des suites suivantes :

- (i) $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

- (iii) $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n.$$

- (iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 1.

1. En utilisant la définition, démontrer que $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x - 5 = 7$.
2. Déterminer, en cas d'existence, les limites suivantes

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} & \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \tan(\pi x) \\
 \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x) - \frac{1}{2}} & \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - x + 1} & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
 \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1)^{E(\frac{1}{x})} x;
 \end{array}$$

$E(x)$ désigne la fonction partie entière de x .

Exercice 2.

1. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq f(x) \leq 2$. Déterminer :

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x); \quad \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x f(x).$$

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin(x)}{x^2 + 1}$ n'existe pas.
3. Démontrer que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c < \ell < d$, alors $c < f(x) < d$ au voisinage de a .
4. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et soit $a \in I$. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existent alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

5. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q}$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Montrer que l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$ admet une solution réelle sur $[0, 1]$.
3. On considère une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ ($a < b$). Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est à dire, $\forall x \in A, \exists \delta > 0$ tel que $]x - \delta, x + \delta[\subset A$.
2. Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). On pose

$$m = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

la moyenne des images. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

- (i) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer toutes les fonctions f qui vérifient cette égalité.
- (iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$; puis déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette égalité.

Exercice 1.

1. Soit U une fonction dérivable qui ne s'annule pas. Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln |U(x)|.$$

2. En déduire les dérivées des fonctions suivantes

$$u(x) = \frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}, \quad \text{et} \quad v(x) = (1+x^2)^{\sin(x)}.$$

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions dérivable en a . Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}, \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h}.$$

Exercice 3.

- 1.a. Montrer que l'équation $-x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet une solution réelle unique.
 1.b. Montrer que cette solution est comprise entre 1 et 2; et donner une approximation de cette solution à 10^{-2} près.
 2.a. Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $|x_0| < 1$ tel que $f'(x_0) = 0$.

- 2.b. Soient $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a, b \in I$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tel que

$$f(c_2) = 0, \quad f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

3. On considère la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

- 3.a. Montrer que $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow f([0, \frac{\pi}{2}])$ est bijective.
 3.b. Déterminer le domaine de définition, $D_{f^{-1}}$, de f^{-1} .
 3.c. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $D_{f^{-1}}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

Exercice 4.

1. Soit $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}.$$

2. Démontrer que

$$\forall a < b, \exists c \in]a, b[\text{ tel que } \frac{a + \sqrt{1+a^2}}{b + \sqrt{1+b^2}} = e^{\frac{a-b}{\sqrt{1+c^2}}}.$$

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|} \frac{\pi}{2}.$$

4. Soit $a > 0$ fixé, démontrer que pour tout $x > \frac{1}{a}$ alors

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

Exercice 5.

Démontrer par récurrence les propositions suivantes

- (i) Si $f(x) = x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)x^{r-n}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (ii) Si $f(x) = \frac{1}{x+a}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, alors

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (iii) Si $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 6.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $x_0 \in]a, b[$, on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(x-a)(x-b).$$

- Calculer $g(a)$, $g(x_0)$ et $g(b)$. En déduire que la fonction g' s'annule au moins deux fois sur $]a, b[$.
- Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f''(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}.$$

Exercice 7.

Vérifier les identités suivantes :

(a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y).$

- (b) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \cosh(rx) + \sinh(rx).$$

- (c) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) - \sinh(x))^r = \cosh(rx) - \sinh(rx).$$

Exercice 1.

Donner le développement limité à l'ordre et au voisinage indiqués des fonction suivantes

(a) $f(x) = \cosh(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

(b) $f(x) = \sin^3(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

(c) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

(d) $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

(e) $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 2.

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 des la fonction

$$(x - \ln(1+x))(e^x - \cos(x)).$$

En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Exercice 3.

En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 4 \sin^3(x) - 3 \ln(1+x)}{(e^x - 1) \sin(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x)}{\cos(x) + \sin(x) - e^x},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - 2 \sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}.$$

Exercice 4.

En utilisant le développement limité au voisinage de ∞ , calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right).$$

Exercice 5.

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} (2 \sin(x) + e^x - \cos(x)).$$

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de f et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
2. On considère g le prolongement de f par continuité en 0,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point $(0, 3)$; ainsi que sa position par rapport à la courbe de g au voisinage de ce point.

Correction

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres réels. On rappelle que si $a \neq 0$ alors a^{-1} existe et $a^{-1} \neq 0$.

- (a) Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et supposons que $ab = 0$, alors $a^{-1}ab = 0$ ce qui implique $b = 0$ car $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$; contradiction avec $b \neq 0$. D'après la commutativité on a $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, donc d'après l'associativité

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1.$$

Par conséquent, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

- (b) Soient $a > b > 0$, alors $a^{-1} > 0$ et donc $1 = a^{-1}a > a^{-1}b > 0$. Ce qui implique $a^{-1}b < 1$, d'où $a^{-1}bb^{-1} < b^{-1}$ et par conséquent, $a^{-1} < b^{-1}$.

L'hypothèse $b > 0$ est nécessaire; prendre par exemple $2 = a > 0$ et $-3 = b < 0$: on a $a > b$ et $a^{-1} = \frac{1}{2} > b^{-1} = -\frac{1}{3}$.

- (c) Si $a < b$ on ajoute a et en suite b dans les deux côtés de l'inégalité et on trouve $a + b < 2b$ et $2a < a + b$. Donc

$$a < b \implies 2a < a + b < 2b \implies a < \frac{a+b}{2} < b.$$

- (d) Si $0 < a < b$ alors on multiplie les deux côtés de l'inégalité par a et en suite par b et on trouve $a^2 < ab$ et $ab < b^2$. Donc $a^2 < ab < b^2$ ce qui donne

$$0 < a < b \implies a < \sqrt{ab} < b.$$

D'une autre part, on a

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{b} - \sqrt{a} \right)^2 > 0 \implies \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0 \implies \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Ce qu'on appelle l'inégalité arithmético-géométrique (AM-GM).

- (e) On applique l'inégalité triangulaire et on trouve

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$$

et de même

$$|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a| \iff |a| - |b| \geq -|a - b|.$$

Par conséquent,

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

(f) Supposons que $a < b$, et soit $x \in \mathbb{R}$ alors

$$|x-a| < |x-b| \iff (x-a)^2 < (x-b)^2 \iff x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2 \iff 2x(b-a) < (b^2 - a^2).$$

Et puisque $b - a > 0$ et $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ alors

$$|x-a| < |x-b| \iff x < \frac{a+b}{2}.$$

(e) Puisque

$$|x-5| < \delta \implies 3|x-5| < 3\delta \implies |3x-15| < 3\delta \leq \varepsilon.$$

Alors pour que la proposition

$$|x-5| < \delta \implies |3x-15| < \varepsilon$$

soit vraie il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

(h) On peut utiliser le tableau des signes pour répondre à cette question. Cependant, on aimerait bien donner une réponse algébrique. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} |x+4| - |x-1| < 4 &\implies 0 \leq |x+4| < 4 + |x-1| \\ &\implies (x+4)^2 < (4 + |x-1|)^2 \\ &\implies x^2 + 8x + 16 < 16 + 8|x-1| + x^2 - 2x + 1 \\ &\implies |x-1| > \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} \\ &\implies x-1 > \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad x-1 < -\frac{5}{4}x + \frac{1}{8} \\ &\implies -\frac{1}{4}x > \frac{7}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{9}{4}x < \frac{9}{8} \\ &\implies x < -\frac{7}{4} \quad \text{ou} \quad x < \frac{1}{2} \\ &\implies x < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$ alors on a $(x-1) < -\frac{1}{2} < 0$ donc $|x-1| = 1-x$ et par conséquent,

$$x \in \left[-4, \frac{1}{2}\right[\implies |x+4| - |x-1| = x+4 + x-1 = 2x+3 < 4.$$

et

$$x < -4 \implies |x+4| - |x-1| = -x-4 + x-1 = -5 < 4.$$

Conclusion :

$$|x+4| - |x-1| < 4 \iff x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 2.

(a) Supposons que $\mathbb{N}$ est borné supérieurement, alors soit $N_0 = \sup\{\mathbb{N}\}$. Puisque $N_0 \in \mathbb{R}$ alors $N_0 - 1 \in \mathbb{R}$ et d'après le principe d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_0 - 1 < n$ ce qui implique $N_0 < n + 1$; absurde! car $n + 1 \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement.

(b) Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^n k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$. Supposons qu'on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Par conséquent, on a démontré par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- (c) Soit $x \geq -1$. Par récurrence, on a pour $n = 1$, $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+1 \times x$; la proposition est vraie. Supposons que pour $n \geq 1$ on a $(1+x)^n \geq 1+nx$, alors

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

et puisque $(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, car $nx^2 \geq 0$, alors

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

D'où la proposition est vraie pour $n+1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- (d) Soit n un entier positif supérieur ou égal à 2, et soit a un réel dans $]0, 1[$. Supposons que $a^{\frac{1}{n}} \geq a$ alors $a \leq a^n$ ce qui implique que $a^{n-1} \geq 1$ donc $a \geq 1$; contradiction avec $a \in]0, 1[$!
Donc pour tout $n \geq 2$ et pour tout $0 < a < 1$ on a

$$a^{\frac{1}{n}} > a.$$

Exercice 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée inférieurement.

- (a) $\implies$ (b) Soit $a = \inf(A)$ alors d'après la définition de la borne inférieure, pour tout $x \in A$ on a $x \geq a$.

S'il existe a_1 tel que, pour tout $x \in A$, $a_1 \leq x$ alors a_1 est un minorant et puisque $a = \inf(A)$ est le plus grand des minorants alors $a \geq a_1$.

- (b) $\implies$ (c) Soit $x \in A$, tel que $a \leq x$ et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \geq a + \varepsilon$ alors d'après (b) $a_1 = a + \varepsilon \leq a$ ce qui implique $\varepsilon \leq 0$ absurde ! Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$.

- (c) $\implies$ (a) On a $\forall x \in A$, $x \leq a$, alors a est un minorant donc par définition $a \leq \inf(A)$. Supposons que $a \neq \inf(A)$ c'est à dire $a < \inf(A)$ et soit $\varepsilon = \inf(A) - a$ alors $\varepsilon > 0$ et d'après (c) il existe $x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$ ce qui implique que $x < \inf(A)$ absurde ! donc $a = \inf(A)$.

Exercice 4.

Soit

$$A := \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- (a) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ alors pour tout $x \in A$ on a $x \in]0, 1]$ donc A est borné et $\inf(A) = 0$.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$ alors d'après la question (c)-Ex.3 il existe $x = \frac{1}{n_0}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$) tel que $x < \inf(A) + \varepsilon$ ce qui est équivalent à l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \inf(A) + \varepsilon.$$

Mais $\frac{1}{n} \in A$ donc $\frac{1}{n} > \inf(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\inf(A) < \frac{1}{n} < \inf(A) + \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{n} - \inf(A) < \varepsilon.$$

Conclusion : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $\left| \frac{1}{n} - \inf(A) \right| < \varepsilon$.
C'est à dire que la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf(A) = 0$.

Exercice 1.

- (a) Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée, alors pour tout $C > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > C$, et puisque (u_n) est croissante alors pour tout $n > n_0$, $u_n > u_{n_0} > C$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- (b) Soit $q > 1$. On pose $u_n = q^n$ alors on a $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n > u_n$ donc (u_n) est croissante. Montrons que (u_n) est non majorée : On pose $q = 1 + x$ pour tout $x > 0$ alors d'après la question (c)-Ex.2. on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Donc (u_n) n'est pas majorée est d'après (a) la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

- (c) Soit $v_n = \sum_{k=0}^n |q|^k$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = \frac{1 - |q|^{n+1}}{1 - |q|}.$$

Et d'après la question précédente, si $|q| > 1$ la suite $(|q|^n)$ est divergente. Si $|q| = 1$ alors $v_n = n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui est une suite croissante non majorée alors elle est divergente. Si $0 < |q| < 1$ alors $\frac{1}{|q|} > 1$; donc la suite $w_n = \frac{1}{|q|^n}$ tend vers $+\infty$ et par suite $|q|^n = \frac{1}{w_n}$ tend vers 0. Par conséquent, la suite (v_n) converge si et seulement si $|q| < 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Notez que le cas $|q| = 0$ est évidente, puisque dans ce cas $v_n = 1$ est une suite constante qui est convergente.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}.$$

Puisque pour tout $k \geq 2$ on a

$$k! = 2 \times 3 \times \cdots \times k \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{k-1},$$

alors

$$0 < u_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}.$$

Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$ alors la suite (u_n) est majorée et puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ alors (u_n) est croissante. Par conséquent (u_n) est convergente.

Exercice 2.

(a) D'après la question (e)-Ex 1- Série 0., on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$. C'est à dire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |\ell|$.

(b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. On pose

$$x_n = \sup(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad y_n = \inf(u_n, v_n).$$

Alors les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. En effet,

Puisque, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Donc

$$x_n = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2},$$

Soient a et b , respectivement, les limites de (u_n) et (v_n) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} = \sup(a, b) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{a + b - |a - b|}{2} = \inf(a, b).$$

Exercice 3.

(a) Soient (u_n) et (w_n) deux suites réelles qui convergent vers la même limite ℓ , (v_n) une suite ; telles que, pour tout $n \geq N_0 \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Donc, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \ell$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \quad \forall n > N_1, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon_1,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0, \quad \forall n > N_2, \quad |w_n - \ell| < \varepsilon_1.$$

Soit $N = \sup(N_0, N_1, N_2)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > N$ on a

$$\ell - \varepsilon u_n < \ell + \varepsilon, \quad \ell - \varepsilon w_n < \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Ce qui implique, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > N$

$$\ell - \varepsilon v_n < \ell + \varepsilon \iff |v_n - \ell| < \varepsilon;$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$.

(b) Soient les suites de terme général $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = a + b$.

On pose $x_n = a - u_n$ et $y_n = b - v_n$ alors les suites (x_n) et (y_n) sont positives ; de plus, pour tout n ,

$$0 \leq x_n \leq x_n + y_n \quad \text{et} \quad 0 \leq y_n \leq x_n + y_n$$

et puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a + b) - (u_n + v_n)) = 0$$

alors d'après la question précédente **(a)** on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b.$$

- (c) (i) **Proposition fausse!** contre-exemple : prend $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.
(ii) **Proposition vraie.** En effet, puisque (v_n) est bornée alors il existe $M > 0$ tel que $|v_n| \leq M$, pour tout $n \geq N_0$. Donc, pour tout $n \geq N_0$ on a $0 \leq |u_n v_n| \leq M|u_n|$. Par conséquent, en utilisant la question **(a)- Ex 3. et (a)-Ex 2.**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n v_n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0.$$

- (iii) **Proposition fausse!** contre exemple : prend $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n} - n$.

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $v_0 \geq u_0 > 0$, et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont positives (vous pouvez utiliser la récurrence).
De plus, pour $n \geq 1$ on a

$$v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1} v_{n-1}} + v_{n-1}}{2} = \frac{(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}})^2}{2} \geq 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

- (b) On a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n} (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0$$

alors (u_n) est croissante, donc en particulier, $u_n \geq u_0$. De même, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0$$

alors (v_n) est décroissante et en particulier $v_n \leq v_0$. Et puisque $u_n \leq v_n \leq v_0$ et $v_n \geq u_n \geq u_0$ alors (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0 . Par conséquent, (u_n) et (v_n) sont convergentes. Si

$$\ell_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

alors $\ell_1^2 = \ell_1 \ell_2$ et $2\ell_2 = \ell_1 + \ell_2$ ce qui implique que $\ell_2 = \ell_1$.

Exercice 5.

Etudions la convergence des suites suivantes :

- (i) $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

Soit f la fonction définie sur $I = [1, 3]$ par

$$f(x) = \sqrt{x + 6},$$

alors f est une fonction continue et strictement croissante sur I , car si $x > y$ alors $\sqrt{x + 6} > \sqrt{y + 6}$ donc $f(x) > f(y)$. Par conséquent, $f(I) \subset I$. On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [1, 3]$; c'est à dire (u_n) est bornée.

D'une autre part, on a pour tout $x \in I$,

$$f(x) - x = \sqrt{x+6} - x = \frac{-x^2 + x + 6}{\sqrt{x+6} + x} = \frac{(3-x)(x+2)}{x + \sqrt{x+6}} > 0,$$

on déduit donc que $f(u_n) > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; c'est à dire (u_n) est croissante. Par conséquent, (u_n) est majorée (par 3) et croissante donc convergente. Soit ℓ la limite de (u_n) , alors on a $f(\ell) = \ell$ ce qui implique $\ell = 3$ ou $\ell = -2$ et puisque $-2 \notin I$ alors $\ell = 3$.
Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3.$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$ alors

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n \implies \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \iff \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Or, en utilisant la question (a)-Ex 3. on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

(iii) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{7}{3}$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.
 (u_n) est suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{7}{6}q + \frac{1}{3} = 0 \iff 6q^2 - 7q + 2 = 0. \quad (E)$$

On a $\Delta = 49 - 48 = 1$, donc les racines de (E) sont

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$u_n = a \left(\frac{2}{3}\right)^n + b \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Or,

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = \frac{7}{3} \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 4 \\ \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{7}{3} \end{cases} \implies a = b = 2.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par conséquent, en utilisant la question (b)-Ex 1., on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

On a pour tout entier k ,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

donc (u_n) n'est qu'une somme télescopique ; c'est à dire,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

Exercice 1.

1. On a pour tout x , $|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3|$. Donc, soit $x \in]2, 4[$ qui est un intervalle ouvert centré en 3 (c'est à dire, un voisinage de 3) alors soit $\varepsilon > 0$,

$$|(x^2 + x - 5) - 7| \geq \varepsilon \implies |x + 4||x - 3| \geq \varepsilon \implies |x - 3| \geq \frac{\varepsilon}{|x + 4|} \geq \frac{\varepsilon}{8};$$

Car $2 < x < 4$ implique $|x + 4| = x + 4 < 8$. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \max\left(1, \frac{\varepsilon}{8}\right) > 0, \quad \text{tel que } |x - 3| < \delta \implies |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon.$$

2. Calcul des limites

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-1}{x-1} = 2.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{x}{\tan(x)} = 3.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \tan(\pi x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 2 \frac{x - \frac{1}{2}}{\cos(\pi x) - \cos(\frac{\pi}{2})} \sin(\pi x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\cos'(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x) - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{-\sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + |2x| \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \frac{\frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}} = \frac{1}{4}.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} \frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

car,

$$\forall x > 1, \quad \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

- (g) On a pour tout $0 < x < 1$,

$$\frac{1}{x} - 1 < \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

donc, pour tout $x \in]0, 1[$

$$1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

et par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(h) De même on a pour tout $x \in]0, 1[$

$$x(1 - x) < x^2E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2E\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(i) Soit $x \in]0, 1[$, alors

$$\left|(-1)^{E(\frac{1}{x})}\right| = 1$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(-1)^{E(\frac{1}{x})} = 0.$$

Exercice 2.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq f(x) \leq 2$, alors

(i) Pour tout $x \geq 0$, $\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{x}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

(ii) Pour tout $x > 1$, $x \leq xf(x) \leq 2x$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty.$$

et

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0.$$

2. Soit $f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{x^2 + 1}$, on cherche à démontrer que la limite de f quand x tend vers $+\infty$ n'existe pas. Soit $x > 0$, alors

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \sin(x) \iff \frac{x^2 + 1}{x^2} f(x) = \sin(x) \iff \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) f(x) = \sin(x).$$

et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, alors f et $\sin$ ont même comportement au voisinage de $+\infty$.

Or la fonction $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$ alors de même f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Preuve de $\sin$ n'admet pas de limite en $+\infty$. Puisque la fonction $\sin$ est bornée entre -1 et 1 , alors la limite de $\sin$ est comprise entre -1 et 1 . Supposons que $\sin$ tend vers $\ell \in [-1, 1]$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) = \ell$, et par conséquent, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \implies 2\ell^2 = 1 \implies \ell^2 = \frac{1}{2}$.

D'une autre part, on a

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \implies \ell = 2\ell^2$$

Absurde! car ℓ est unique et ne peut pas vérifier à la fois $\ell^2 = \frac{1}{2}$ et $\ell = 2\ell^2$.

3. Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ tel que $\ell \in]c, d[$ ($c < d \in \mathbb{R}$) alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall |x-a| < \delta, \quad |f(x)-\ell| < \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \forall |x-a| < \delta, \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

et puisque $\ell \in]c, d[$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \delta, a + \delta[$ on a

$$c - \varepsilon < \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon < d + \varepsilon$$

ce qui implique que au voisinage de a , on a $c < f(x) < d$.

4. Puisque f est croissante alors pour tout $h > 0$ on a $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ si les limites $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existent alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a-h)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a-h) < f(a) < \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

5. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x^n - a^n = (x-a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1}$$

alors

$$\frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \frac{x-a \sum_{k=0}^{p-1} x^k a^{p-k-1}}{x-a \sum_{k=0}^{q-1} x^k a^{q-k-1}},$$

et par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a^k a^{p-k-1}}{\sum_{k=0}^{q-1} a^k a^{q-k-1}} = \frac{pa^{p-1}}{qa^{q-1}} = \frac{p}{q} a^{p-q}.$$

Exercice 3.

1. Puisque f est continue en 0 alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) = f(0) - f(0) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = g(0)$$

alors g est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ car la fonction f et la fonction nulle sont continues.

2. Soit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x$ alors f est continue sur $[0, 1]$ et $f(0) \times f(1) = 1 \times (-1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$. C'est à dire $f(x) = 0$ admet une solution réelle sur $]0, 1[$.
3. Soit $g(x) = x - f(x)$ alors puisque f est continue sur $[a, b]$ alors g est continue sur $[a, b]$ et $g(a) = a - f(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ car $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in [a, b]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire tel que $f(c) = c$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. cette dernière est équivalente à : pour tout $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $|x| > M$ on a $f(x) \geq A$. Alors en particulier, pour $A = f(0)$ il existe un $M_0 > 0$ tel que pour tout $|x| > M_0$ on a $f(x) > f(0)$. La fonction f est continue sur $[-M_0, M_0]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ donc f atteint ses bornes dans $[-M, M]$. D'où il existe $x_0 \in [-M_0, M_0]$ tel que $f(x_0) = \min_{x \in [-M_0, M_0]} (f(x))$, et puisque $0 \in [-M_0, M_0]$ alors $f(0) \geq f(x_0)$. Par conséquent, il existe x_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0\},$$

montrons que A est un voisinage de chacun de ses points.

Soit $w \in A$, donc $f(w) \neq 0$ ce qui est équivalent à $|f(w)| > 0$. D'une autre part, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est continue en w et donc $|f|$ est continue en w ; donc d'après la définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|x - w| < \delta$ on a $||f(x)| - |f(w)|| < \varepsilon$.

Posons en particulier, $\varepsilon = \frac{|f(w)|}{2}$; alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$ on a $||f(x)| - |f(w)|| < \frac{|f(w)|}{2}$.

Soit, donc, $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$, alors on a

$$||f(x)| - |f(w)|| < \frac{|f(w)|}{2} \iff \frac{1}{2}|f(w)| < |f(x)| < \frac{3}{2}|f(w)|.$$

Et puisque $|f(w)| > 0$ alors pour tout $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$ on a $|f(x)| > 0$ (ce qui équivaut à $f(x) \neq 0$) et par conséquent, $]w - \delta_0, w + \delta_0[\subset A$. Ce qui montre que A est un voisinage de chacun de ses points.

2. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $(x_k)_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des réels dans $[a, b]$. On pose

$$m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

montrons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.

La fonction f est continue sur $[a, b]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ alors f atteint ses bornes. Posons alors,

$$\alpha = \min_{x \in [a, b]} (f(x)) \quad \text{et} \quad \beta = \max_{x \in [a, b]} (f(x)).$$

Donc puisque, $x_k \in [a, b]$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors $\alpha \leq f(x_k) \leq \beta$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et par conséquent,

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta = \beta;$$

c'est à dire, $m \in f([a, b])$. Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0.

- (i) Montrons que si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

On a pour $x = y = 0$, $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$ alors $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Cas 1. Si $f(0) = 0$, alors on pose $y = 0$ et $x \neq 0$ alors $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$. Donc f est une fonction nulle sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$ (comme une fonction constante).

Cas 2. Soit alors $f(0) = 1$. On a pour tout $x, h \in \mathbb{R}$

$$|f(x+h) - f(x)| = |f(x)f(h) - f(x)| = |f(x)||f(h) - 1|$$

et puisque f est continue en 0 alors $\lim_{h \rightarrow 0} |f(h) - 1| = \lim_{h \rightarrow 0} |f(h) - f(0)| = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0 \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Ce qui montre la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(ii) Résolvons l'équation fonctionnelle $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)$, $f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{8}\right)$, $\dots$. Donc, par récurrence, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Et puisque f est continue en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

Par conséquent, $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui montre que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) Soit l'équation fonctionnelle de Cauchy, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors pour $x = y = 0$ on a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$; donc $f(0) = 0$.

Et puisque f est continue en 0 alors $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0$ et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0;$$

c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x).$$

Ce qui montre la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation fonctionnelle (E) : $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f(x + (n-1)x) = f(x) + f((n-1)x) = f(x) + f(x) + f((n-2)x) = \dots;$$

donc, par récurrence, on trouve

$$f(nx) = nf(x) + f((n-n)x) = nf(x).$$

car $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(nx) = nf(x)$.

Posons $y = -x$ dans (E), alors on a

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$$

donc on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ ce qui montre que f est une fonction impaire et par suite on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. D'où on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(kx) = kf(x).$$

Montrons aussi que l'égalité $f(rx) = rf(x)$ reste valable pour $r \in \mathbb{Q}$. En effet, on pose $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a d'après ce qui précède

$$qf(rx) = f(qrx) = f(px) = pf(x).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(rx) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

En particulier, pour $x = 1$, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$f(r) = rf(1).$$

Finalement, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(r_n) \in \mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Donc, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = x f(1).$$

Alors les solutions de l'équation **(E)** sont les fonctions linéaires

$$f(x) = ax, \quad a = f(1) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.

1. Soit U une fonction dérivable qui s'annule pas sur $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln |U(x)| - \ln |U(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\ln \left| \frac{U(x)}{U(x_0)} \right|}{\frac{U(x)}{U(x_0)} - 1} \right) \left(\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \right) \frac{1}{U(x_0)}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{U(x)}{U(x_0)} = 1$ car $U(x_0) \neq 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln \left| \frac{U(x)}{U(x_0)} \right|}{\frac{U(x)}{U(x_0)} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln(y)}{y - 1} = 1;$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{U(x_0)} = \frac{U'(x_0)}{U(x_0)}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln |U(x)| - \ln |U(x_0)|}{x - x_0} = \frac{U'(x_0)}{U(x_0)}.$$

On déduit que la fonction f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

2. On a pour tout $x \in I$ avec $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{4\}$,

$$\ln |u(x)| = \ln \left| \frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}} \right| = \frac{1}{2} \ln |x+13| - \ln |x-4| - \frac{1}{3} \ln |2x+1|;$$

car $\ln \left| \frac{a^r}{bc} \right| = r \ln |a| - \ln |b| - \ln |c|$. Donc, en passant à la dérivée on trouve

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2x+26} - \frac{1}{x-4} - \frac{2}{6x+3} = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{6(x-4)(x+13)(2x+1)}$$

et par conséquent,

$$u'(x) = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{6(x-4)(x+13)(2x+1)} u(x) = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{(x-4)^2 \sqrt{x+13} \sqrt[3]{(2x+1)^4}}.$$

De la même manière, on démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\ln |v(x)| = \sin(x) \ln(1 + x^2)$$

Donc,

$$v'(x) = \left(\cos(x) \ln(1 + x^2) + \frac{2x \sin(x)}{1 + x^2} \right) v(x) = \left(\cos(x) \ln(1 + x^2) + \frac{2x \sin(x)}{1 + x^2} \right) (1 + x^2)^{\sin(x)}.$$

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions dérivables en a . Alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h^2) - f(a + h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a + h^2) - f(a)) - (f(a + h) - f(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(a + h^2) - f(a)}{h^2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= 0 \times f'(a) - f'(a) = -f'(a). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a) - f(a)g(a + h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a + h) - f(a))g(a) - (g(a + h) - g(a))f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} g(a) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} f(a) \\ &= f'(a)g(a) - g'(a)f(a) \end{aligned}$$

Exercice 3.

1.a. Soit $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynômiale. Deplus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1 < 0,$$

car $\Delta < 0$ et $-3 < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque,

$$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [=] -\infty, +\infty [= \mathbb{R},$$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ unique tel que $f(x_0) = 0$.

1.b. Puisque f est continue, $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) = -4 < 0$, alors la solution x_0 est dans $]1, 2[$. Pour approximer x_0 , on va utiliser la dichotomie; en effet, on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$ donc $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$. Encore, on a $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{23}{64} > 0$ donc $x_0 \in]\frac{5}{4}, \frac{3}{2}[$. Ainsi, puisque $f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{43}{512} < 0$ alors $x_0 \in]\frac{5}{4}, \frac{11}{8}[$. Par suite, puisque $f\left(\frac{21}{16}\right) = \frac{611}{4096} > 0$ alors $x_0 \in]\frac{21}{16}, \frac{11}{8}[$ et puisque $f\left(\frac{43}{32}\right) = \frac{1165}{32768} > 0$ alors $x_0 \in]\frac{43}{32}, \frac{11}{8}[$. Finalement, puisque $f\left(\frac{87}{64}\right) < 0$ alors

$$\frac{43}{32} \leq x_0 \leq \frac{87}{64} \implies 1.3437 \leq x_0 \leq 1,3593.$$

Si on continue notre algorithme pour plusieurs étapes on aura $x_0 \approx 1.3532$.

Remarque.

Vous pouvez trouver l'expression explicite de x_0 en utilisant l'algorithme de **Cardan** pour la résolution des équations polynômiales de troisième degré et vous allez trouver que

$$x_0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{47 + 3\sqrt{249}}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{47 + 3\sqrt{249}}{2}}.$$

2.a. Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Cette dernière condition est équivalente à :

pour tout $A > 0$ ils existent $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que pour tout $x \in]-1, -1 + \delta_1[\cup]1 - \delta_2, 1[$ on a $f(x) > A$.

Soit en particulier $A = f(0)$, alors il existent $\delta'_1, \delta'_2 \in]0, 1[$ tels que $f(x) > f(0)$. Or l'intervalle $[-1 + \delta'_1, 1 - \delta'_2]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et f est continue alors elle atteint sa borne inférieure en $x_0 \in [-1 + \delta'_1, 1 - \delta'_2]$. Et puisque $0 \in [-1 + \delta'_1, 1 - \delta'_2]$ alors $f(0) \geq f(x_0)$. On déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$ il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $|x| < 1$.

Il nous reste à démontrer que $f'(x_0) = 0$. Soit g la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

Donc, puisque f est dérivable sur $] -1, 1[$ alors g est continue sur $] -1, 1[$ et puisque $g(x) > 0$ pour tout $x > x_0$ et $g(x) < 0$ pour tout $x < x_0$ alors $g(x_0) = 0$. Et par conséquent, $f'(x_0) = 0$.

Conclusion. Il existe $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'(x_0) = 0$

2.b. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et soient $a < b$ deux réels dans I tels que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} & \text{si } x \in]a, b[\\ \frac{f'(a)}{a-b} & \text{si } x = a \\ \frac{f'(b)}{b-a} & \text{si } x = b \end{cases}.$$

Alors h est continue sur $[a, b]$ et puisque $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$ (car $f'(a), f'(b) > 0$) alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que $h(c_2) = 0$; c'est à dire, il existe $c_2 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) = 0$.

Et puisque f est continue sur $[a, c_2]$ et sur $[c_2, b]$ et est dérivable sur $]a, c_2[$ et sur $]c_2, b[$. Et puisque $f(a) = f(c_2) = 0$ et $f(b) = f(c_2) = 0$ alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a, c_2[$ et $c_3 \in]c_2, b[$ tels que $f'(c_1) = 0$ et $f'(c_3) = 0$.

3. Soit la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

3.a. Puisque f est continue et dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$; et puisque

$$f'(x) = -2 \sin(x) \cos(x) = -\sin(2x) < 0, \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

car pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin(\alpha) > 0$, alors f est strictement décroissante et est donc bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$.

3.b. Puisque f est une bijection et à valeurs dans $[0, 1]$ alors $D_{f^{-1}} = [0, 1]$.

3.c. Soient $x_0 \in]0, 1[$, alors il existe $y_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Donc,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}.$$

Par conséquent, f^{-1} est dérivable sur l'ensemble

$$\{x \in D_{f^{-1}} = [0, 1], \quad f'(x) \neq 0\} =]0, 1[.$$

Pour $x_0 = \frac{1}{2} \in]0, 1[$, on a $y_0 = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{y - \frac{\pi}{4}}{f(y) - f(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

Exercice 4.

1. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Alors pour tout $x > 0$, on a

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} - \frac{\ln(x)}{3\ln(a)} + \frac{\ln(x)}{4\ln(a)} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{11}{12} \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Donc,

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4} \iff \frac{11}{12} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{3}{4} \iff \ln(x) = \frac{9}{11} \ln(a) \iff \ln(x) = \ln\left(a^{\frac{9}{11}}\right)$$

Par conséquent,

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4} \iff x = \sqrt[11]{a^9}.$$

2. Soit la fonction $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors, puisque la fonction argsh est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\operatorname{argsh}(b) - \operatorname{argsh}(a) = \operatorname{argsh}'(c)(b - a).$$

C'est à dire

$$\ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}}\right) = \frac{b - a}{\sqrt{c^2 + 1}}.$$

Par conséquent, il existe $c \in]a, b[$

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 1}}{a + \sqrt{a^2 + 1}} = e^{\frac{b-a}{\sqrt{c^2+1}}}.$$

3. Soit $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, alors f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Par conséquent, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, on prend par exemple, $x = 1$ on aura

$$f(x) = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \text{ Si } x < 0, \text{ on prend par exemple } x = -1 \text{ et on aura}$$

$$f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Notez que $\frac{x}{|x|} = \operatorname{signe}(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|} \frac{\pi}{2}.$$

4. Soit $a > 0$ fixé. On considère la fonction f définie sur $I_a =]\frac{1}{a}, +\infty[$ par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) - \arctan(x).$$

f est une fonction continue et dérivable sur I_a et

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}{1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2 + (a+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Donc f est une fonction constante sur I_a . Par conséquent,

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la question précédente, on trouve pour tout $x > \frac{1}{a}$

$$f(x) = \arctan(a) - \pi.$$

Donc, pour tout $x \in I_a$

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

Exercice 5.

(i) Soient $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^r$. Pour $n = 1$ on a $f^{(1)}(x) = f'(x) = rx^{r-1}$, supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)x^{r-n}$$

et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n)x^{r-n-1}.$$

Or on a

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(x^{r-n})' = r(r-1)\cdots(r-n)x^{r-n-1}.$$

D'où le résultat souhaité.

(ii) De la même manière, on a pour $n = 0$ la proposition est vraie. Supposons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}},$$

alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}\right)' = \frac{-(-1)^n n!(n+1)(a+x)^n}{(a+x)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(a+x)^{n+2}}.$$

Donc la proposition est vraie pour $n+1$. D'où le résultat souhaité.

(iii) La proposition est vraie pour $n = 0$, supposons donc qu'elle est vraie pour n . Donc

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Notez que, $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.

Donc la proposition est aussi vraie pour $n+1$.

Exercice 6.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soient $x_0 \in]a, b[$ et g une fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x - a)(x - b)$$

1. Alors $g(a) = f(a) = 0$, $g(x_0) = 0$ et $g(b) = f(b) = 0$.

La fonction g est continue sur $[a, x_0]$ et dérivable sur $]a, x_0[$ et puisque $g(a) = g(x_0) = 0$ alors d'après le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]a, x_0[$ tel que $g'(c_1) = 0$.

De même, $g(b) = g(x_0) = 0$ montre l'existence de $c_2 \in]x_0, b[$ tel que $g'(c_2) = 0$.

2. La fonction g' est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ (car f est deux fois dérivable sur $[a, b]$) et $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$ alors d'après théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $g''(c) = 0$. Or

$$g''(x) = f''(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x^2 - (a + b)x + ab)'' = f''(x) - 2 \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Donc

$$g''(c) = 0 \implies f''(c) = 2 \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Exercice 7.

- (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^{x+y} + 2e^{-x-y}) \\ &= \cosh(x + y). \end{aligned}$$

- (b) Soit $r \in \mathbb{R}$ alors

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^r = e^{rx}.$$

Et puisque

$$\cosh(rx) + \sinh(rx) = \frac{e^{rx} + e^{-rx}}{2} + \frac{e^{rx} - e^{-rx}}{2} = e^{rx},$$

alors

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \cosh(rx) + \sinh(rx).$$

De la même manière, on démontre que,

- (c) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) - \sinh(x))^r = \cosh(rx) - \sinh(rx).$$

Exercice 1.

Le développement limité,

(a) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh^{(2n)}(x) = \cosh(x) \quad \text{et} \quad \cosh^{(2n+1)}(x) = \sinh(x),$$

alors $\cosh^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\cosh^{(2n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc en appliquant la formule de Taylor on trouve le développement limité de à l'ordre 5 au voisinage de 0,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5).$$

(b) On a démontré dans le cours que au voisinage de 0 on a $\sin(x) = x + o(x^2)$ donc au voisinage de 0 on a

$$\sin^3(x) = o(x^2).$$

(c) Le développement limité de la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ au voisinage de 1 est le développement de la fonction $X \mapsto \frac{\ln(X+1)}{(X+1)^2}$ au voisinage de 0. Et puisque, au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(X+1)^2} = (1+X)^{-2} = 1 - 2X + 3X^2 + o(X^2),$$

et puisque

$$\left(X - \frac{X^2}{2}\right)(1 - 2X + 3X^2) = X - 2X^2 + 3X^3 - \frac{X^2}{2} + X^3 - \frac{3}{2}X^4 = X - \frac{5}{2}X^2 + 4X^3 - \frac{3}{2}X^4$$

alors

$$\frac{\ln(1+X)}{1+X} = X - \frac{5}{2}X^2 + o(X^2).$$

Et par conséquent, au voisinage de 1 on a

$$\frac{\ln(x)}{x} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

(d) Soit $f(x) = \ln(1+x+\sqrt{1+x})$, on cherche le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4. On a pour tout $x > -1$

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right) + \ln(2)$$

et puisque, au voisinage de 0 on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)$$

alors

$$\frac{1+\sqrt{x+1}}{2} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} - \frac{5}{256}x^4 + o(x^4) = 1 + Q(x) + o(x^4)$$

au voisinage de 0.

Or on a au voisinage de 1

$$\ln(X) = (X-1) - \frac{(X-1)^2}{2} + \frac{(X-1)^3}{3} - \frac{(X-1)^4}{4} + o((X-1)^4) = P(X) + o((X-1)^4)$$

Donc,

$$P(1+Q(x)) = Q(x) - \frac{Q^2(x)}{2} + \frac{Q^3(x)}{3} - \frac{Q^4(x)}{4},$$

On prend le terme polynomial de degré inférieur ou égal à 4 et on trouve, au voisinage de 0,

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 - \frac{35}{1024}x^4 + o(x^4)$$

Finalement, puisque au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

alors au voisinage de 0,

$$f(x) = \ln(2) + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{7}{32}x^3 - \frac{163}{1024}x^4 + o(x^4).$$

(d) Soit $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x+1}} = \exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{x+1}\right)$. Déterminons le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

On a au voisinage de 0,

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

alors, après la simplification on trouve que pour tout x au voisinage de 0 on a

$$\frac{\ln(1+2x)}{1+x} = 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)$$

Finalement, puisque au voisinage de 0 on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

alors

$$f(x) = 1 + 2x - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 2.

Soit la fonction définie au voisinage de 0 par,

$$f(x) = (x - \ln(1+x))(e^x - \cos(x)).$$

Alors d'après le cours, on a au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Donc, au voisinage de 0 on a

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

et

$$e^x - \cos(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Or puisque

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) \left(x + x^2 + \frac{x^3}{6}\right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

alors

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

On déduit d'après la formule de Taylor que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = \frac{1}{2} \times 3! = 3$ et $f^{(4)}(0) = \frac{1}{6} \times 4! = 4$.

Exercice 3.

(a) Soit x au voisinage de 0 et soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin(x)}.$$

alors puisque

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

et puisque

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

alors

$$\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

Et puisque, au voisinage de 0 on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

alors

$$(e^x - 1) \sin(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3}{x^2 + \frac{x^3}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Soit la fonction g définie au voisinage de 0 par

$$g(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x)}{\cos(x) + \sin(x) - e^x}.$$

Alors puisque, au voisinage de 0 on a

$$1 - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + o(x^3) = -\frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

et

$$\cos(x) + \sin(x) - e^x = -x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12}}{-x^2 - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{12}.$$

(c) Soit au voisinage de 0 la fonction suivante

$$h(x) = \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}.$$

Donc, puisque

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x) = 2x^3 + o(x^3).$$

et

$$\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2 = -\frac{13}{6}x^3 + o(x^3)$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-\frac{13}{6}x^3} = -\frac{12}{13}.$$

Exercice 4.

(a) Soit $x > 1$. On pose

$$f(x) = x \left(e^{-1} - \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \right)$$

On a

$$f(x) = xe^{-1} - x \exp \left(x \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) \right) = xe^{-1} - x \exp \left(-x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

Pour déterminer le développement limité en $+\infty$ de f il fallait déterminer le développement limité de $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0, donc

$$g(x) = \frac{1}{xe} - \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = \frac{1}{xe} \left(1 - \exp\left(1 - \frac{1}{x} \ln(1+x)\right)\right);$$

et puisque, au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

et pour X au voisinage de 0 on a

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2).$$

donc au voisinage de 0 on a

$$\exp\left(1 - \frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o(x^2).$$

Par conséquent,

$$g(x) = -\frac{1}{2e} + \frac{5}{24e}x + o(x)$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{1}{2e}.$$

(b) Soit x un réel suffisamment grand, on pose

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1},$$

Pour déterminer le développement limité au voisinage de $+\infty$ il suffit de trouver le développement de la fonction $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0. On a au voisinage de 0

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{1 - x - x^2} \right)$$

Or,

$$\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$$

et

$$\sqrt{1 - x - x^2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

Donc

$$g(x) = \frac{5}{6} + \frac{37}{72}x + o(x).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{5}{6}.$$

Exercice 5.

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2 \sin(x) + e^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.

On a au voisinage de 0,

$$2 \sin(x) + e^x - \cos(x) = 2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + o(x^3)$$

c'est à dire

$$2 \sin(x) + e^x - \cos(x) = 3x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc

$$g(x) = 3 + x - \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3.$$

- (b) D'après la question précédente, on a $y = x + 3$ est l'équation de la tangente au point $(0, 3)$ et puisque $g(x) - y = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ et $-\frac{x^2}{6} \leq 0$ alors la courbe de g est au dessous de la tangente y .