Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire 2017-2018

Filière SMP - Semestre 3

TD + Correction du Module Analyse 3

Professeur: Zine El-Abidine Guennoun

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat–Maroc
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://http://fsr.um5.ac.ma/

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Série #1

Exercice I.

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

a) $\dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{z+2}{z-3i}$

b) $z + |z| = 8 + 4i$

c) $iz^2 + 2\overline{z} + z - i = 0$

Exercice II.

1) Exprimez sous forme algébrique et représenter dans le plan les nombres complexes $z(r, \theta)$ suivants :

$$\text{a)} \quad z = (2, -\frac{\pi}{3}) \ ; \qquad \text{b)} \quad z = (4, \frac{5\pi}{6})$$

2) Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$\text{a)} \quad z = -3 + 3i \ ; \qquad \text{b)} \quad z = \frac{2+3i}{5+4i}$$

Exercice III.

1) Calculer et représenter dans le plan les racines suivantes :

$$\text{a)} \quad z = \sqrt[4]{-4} \ ; \qquad \text{b)} \quad z = \sqrt[3]{3+4i}$$

2) Déterminer et tracer l'ensemble $M(z)$ du plan :

a) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 2$

b) $\arg(\dfrac{z-i}{z+i}) = -\dfrac{\pi}{4} \mod \pi$

c) $2 < |z-1-i| < 3$

Exercice IV.

On considère le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ à coéfficients dans $\mathbb{C}$.
Montrer que si z_0 est une racine d'ordre α de P alors $\overline{z}_0$ est une racine d'ordre α de $\overline{P}$. $\overline{P}$ étant le polynôme conjugué de P défini par :

$$\overline{P}(z) = \overline{a}_n z^n + \overline{a}_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0$$

En déduire que si les coéfficients a_i sont réels alors $\overline{z}_0$ aussi est une racine d'ordre α de P.

Exercice V.

On considère la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction f est continue en $z = 0$

b) Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en $z = 0$

c) Démontrer que la fonction f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en $z = 0$

d) Que peut-on conclure?

Exercice VI.

a) Démontrer que la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z}$ est dérivable pour tout $z \neq 0$ et déterminer la dérivée $f'(z)$, en calculant directement $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

b) Démontrer le même résultat, en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercice VII.

Démontrer que si une fonction complexe f est dérivable sur un domaine D et que le module $|f(z)|$ est constant sur D alors la fonction f est aussi constante sur D.

Exercice VIII.

Soit $f = u + iv$ une fonction complexe qui vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, en coordonnées cartésiennes de z.

a) Si on considère la forme trigonométrique :

$$f\ (z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta) \qquad z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

alors les conditions de Cauchy-Riemann sont exprimées par :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\ ; \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

b) En utilisant les coordonnées cartésiennes, démontrer que la fonction suivante :

$$f(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$$

est dérivable en tout $z \in \mathbb{C} \backslash (]-\infty, 0] \times \{0\})$. $\mathbb{C} \backslash (]-\infty, 0] \times \{0\})$ est le plan complexe privé de la demi-droite $]-\infty, 0] \times \{0\}$.

c) Démontrer le même résultat, en utilisant la forme trigonométrique :

$$f\ (z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Série #2

Exercice I.

1) Déterminer si les fonctions suivantes sont harmoniques. Si oui déterminer leurs conjugées $v(x, y)$,
a) $u(x, y) = sin(x)cosh(y)$
b) $u(x, y) = e^{-x}\sin(2y)$

2) Déterminer les fonctions conjuguées $v(x, y)$ de la fonction $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$,
Exprimer la fonction $u(x, y) + iv(x, y)$ en fonction de z.

Exercice II.

1) Démontrer que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$\text{a) } \sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\text{b) } \cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$$

2) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les valeurs suivantes sous la forme $a + ib$:

$$\cosh(2 + i), \qquad \sinh(4 - 3i).$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

$$\text{a) } \sin(z) = 100 \qquad \text{b) } \cos(z) = 2i \qquad \text{c) } e^z = 4 - 3i$$

4)

a) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les valeurs suivantes :

$$\ln(-1); \qquad \ln(-e); \qquad \ln(4 + 3i); \qquad \ln(e^{3i})$$

b) Démontrer l'égalité suivante dans $\mathbb{C}$:

$$Arc\cosh(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

Exercice III.

Donner l'équation paramétrique de la courbe d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = 4$$

Exercice IV.

Que représente les équations paramétriques suivantes ?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (4-2t,-3+5t) & -1 < t < 2 \\ \text{b) } (2\cos(t), 5\sin(t)) & 0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{4} \end{array}$$

Exercice V.

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'équation :

$$\frac{(x)^2}{4} + y^2 = 1 \text{ au point } P(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Exercice VI.

1) Déterminer si le champ de vecteurs suivant dérive d'un potentiel f. Si oui, trouver f.

a) $F(x, y) = (x^3 - y\sin(x))i + (y^3 - \cos(x))j.$

b) $F(x, y) = (2xArc\tan(y))i + (\dfrac{x^2}{1+y^2})j.$

2) Calculer l'intégrale curviligne le long de la courbe C indiquée:

a) $\int_C yx^2dx + (x+y)dy,$ $\quad C : y = -x^3$ de l'origine au point (1,-1).

b) $\int_C 3xydx + (4x^2 - 3y)dy,$ $\quad C$: le segment reliant les points $(0, 3)$ à $(3, 9)$ et la parabole $y = x^2$ de $(3, 9)$ à $(5, 25)$.

Exercice VII.

a) Démontrer que le champ de vecteurs :

$$F(x, y, z) = (6xy^3 + 2z^2)i + 9x^2y^2j + (4xz + 1)k$$

dérive d'un potentiel $f(x, y, z)$. Déterminer f.

b) Calculer l'intégrale curviligne de F le long d'une courbe C lisse reliant les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$.

c) Vérifier ce résultat en calculant l'intégrale curviligne de F le long de la courbe C constituée par le segment reliant les points $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$, le segment reliant les points $(1, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$ et le segment reliant les points $(1, 1, 0)$ à $(1, 1, 1)$.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Série #3

Exercice I.

Donner l'équation paramétrique de la courbe suivante : $|z - 2 + 3i| = 4$

Exercice II.

Que représente les équations paramétriques suivantes :

a) $z(t) = 1 + i + e^{-\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 2$

b) $z(t) = 1 + 2t + 8it^2, \quad -1 \leq t \leq 1$

Exercice III.

Calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C indiquée :

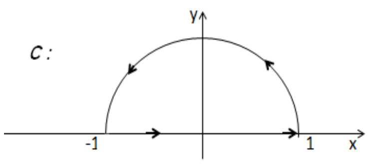
a) $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$, C est une partie de la parabole d'équation $y = x^2$ reliant le point $(-1+i)$ au point $(1+i)$.

b) $\displaystyle\int_C Im(z^2)dz$, C est le triangle de sommets $z = 0, 1, i$.

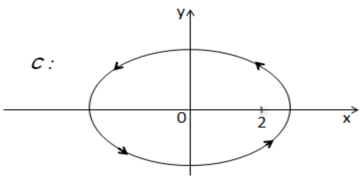
Exercice IV.

Calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C indiquée:

a) $\displaystyle\oint_C Re(2z)dz$



b) $\displaystyle\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}dz$



Exercice V.

En utilisant les formules de Cauchy, calculer l'intégrale curviligne complexe le long de la courbe C orientée positivement :

a) $\displaystyle\oint_C \frac{(1+2z)\cos(z)}{(2z-1)^2}dz,$ $\quad C$ est la courbe d'équation $|z| = 1$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z-2i)^2}dz,$ $\quad C = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 : |z-i| = 3$ et $\Gamma_2 : |z| = 1$.

Exercice VI.

1) Déterminer la nature des séries numériques suivantes :
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(\frac{1}{4})^n + 3(-\frac{1}{5})^n\right]$ $\quad$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n+2}$

2) En utilisant les tests de convergence, déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent :
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-3}{n^2+2}$ $\quad$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n^2+1}$ $\quad$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{100}}$

3) Déterminer l'ensemble de convergence de la série suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+3)^n}{n}$$

Exercice VII.

1) Déterminer si les séries complexes suivantes convergent ou divergent :
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{10-15i}{n!})^n$ $\quad$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2-2i}$ $\quad$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{(i)^n}{3^n}$

2) Déterminer l'ensemble de convergence de chacune des séries suivantes :
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^2}$ $\quad$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n}$ $\quad$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4)^n}{(1+i)^n}(z-5)^n$

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Série #4

Exercice I.

Déterminer la série de Laurent de centre z_0 des fonctions suivantes :

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ avec $z_0 = 1$;   b) $f(z) = z^3 \cosh(\frac{1}{z})$ avec $z_0 = 0$

Exercice II.

Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes et leurs résidus :

a) $\frac{\cos(z)}{z^6}$;   b) $\frac{1}{\cos(z)}$

Exercice III.

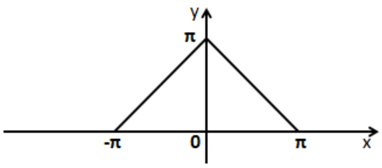
En utilisant les résidus, calculer les intégrales suivantes :

a) $\oint_{\Gamma_1} \frac{\sin(\pi z)}{z^4}$ avec $\Gamma_1 : |z - i| = 2$;

b) $\oint_{\Gamma_2} \frac{1 - 4z + 6z^2}{(z^2 + \frac{1}{4})(2 - z)}$ avec $\Gamma_2 : |z| = \frac{3}{2}$

Exercice IV

1. Déterminer le développement en série de $\mathcal{F}$ourier de la fonction périodique, de période 2π et représentée par le graphe suivant :



2. En déduire l'égalité suivante : $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$

Corrections

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Corrigé Série #1

Exercice I.

(I.a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, 3i\}$ donc

$$\begin{aligned} \tfrac{z-i}{z+i} = \tfrac{z+2}{z-3i} &\iff (z-i)(z-3i) = (z+2)(z+i) \\ &\iff (2+5i)z = -3-2i \\ &\iff z = -\tfrac{16}{29} + \tfrac{11}{29}i. \end{aligned}$$

(I.b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} z + |z| = 8 + 4i &\iff x = 8 - |z| \quad \text{et} \quad y = 4 \\ &\iff (x-8)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad y = 4 \qquad (x < 8) \\ &\iff x = 3 \quad \text{et} \quad y = 4 \\ &\iff z = 3 + 4i. \end{aligned}$$

(I.c) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ donc

$$\begin{aligned} iz^2 + 2\overline{z} + z - i = 0 &\iff x(3-2y) + i(x^2 - y^2 - y - 1) = 0 \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } y = \tfrac{3}{2}) \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 - y - 1 = 0 \\ &\iff (x = 0 \text{ et } y^2 + y + 1 = 0) \quad \text{ou} \quad (y = \tfrac{3}{2} \text{ et } x^2 = \frac{19}{4}) \\ &\iff y = \tfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad x = \pm\tfrac{\sqrt{19}}{2}. \end{aligned}$$

La première proposition n'est pas vraie puisque l'équation $y^2 + y + 1 = 0$ n'a pas de solutions réelles. Par conséquent, les solutions de l'équation demandée sont

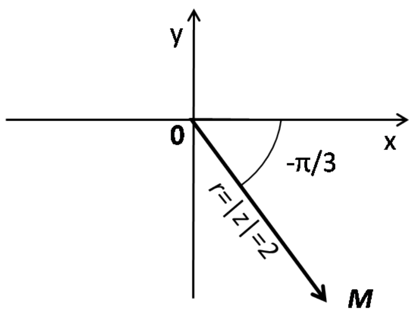
$$z = \pm\frac{\sqrt{19}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Exercice II.

(1.a) On a

$$z = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

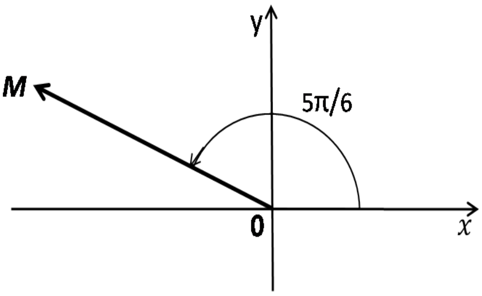
Dans le plan complexe le point $M(z)$ est représenté graphiquement par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la figure suivante



(1.b) On a

$$z = \left(4, \frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} + 2i.$$

Dans le plan complexe le point $M(z)$ est représenté graphiquement par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la figure suivante



(2.a) Soit $z = -3 + 3i$. Puisque $|z| = 3\sqrt{2}$ alors

$$z = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

(2.b) On a $z = \dfrac{2+3i}{5+4i} = \dfrac{22}{41} + \dfrac{7}{41}i$, donc

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{22}{41}\right)^2 + \left(\frac{7}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{533}}{41} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{7}{22}\right),$$

d'où

$$z = \left(\frac{\sqrt{533}}{41}, \arctan\left(\frac{7}{22}\right)\right).$$

Exercice III.

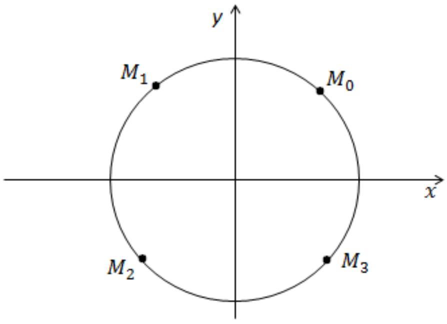
(1.a) Cherchons les solutions de l'équation $z^4 = -4$ qui est équivalente à $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$; Or les racines d'ordre 4 de -1 sont $e^{i\frac{2k+1}{4}\pi}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. D'où les solutions demandées sont

$$z_k = \sqrt{2}e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Explicitement, on a

$$z_0 = 1+i, \qquad z_1 = -1+i, \qquad z_2 = -1-i, \qquad z_3 = 1-i.$$

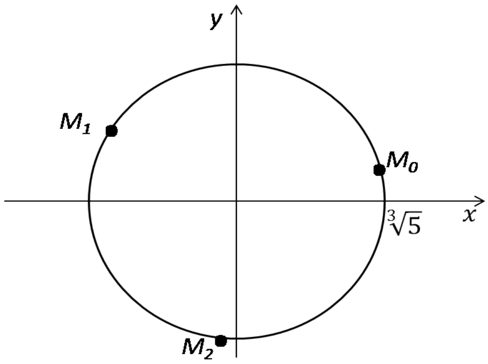
La représentation graphique des points M_k d'affixes z_k est donnée par le carré



(1.b) On a $z = \sqrt[3]{3+4i}$ et comme $3+4i = 5e^{i\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$ alors les racines d'ordre 3 de $3+4i$ sont

$$z_k = \sqrt[3]{5}e^{i\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}{3}+i\frac{2k\pi}{3}}, \qquad k = 0,1,2.$$

Les points M_k d'affixes z_k $(k = 0,1,2.)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit au cercle de centre O et de rayon $\sqrt[3]{5}$ (voir la figure ci-dessous)



(2.a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$. Remarquez que $z = \pm 1$ ne vérifient pas cette équation! Alors

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2 \Longleftrightarrow |z-1|^2 = 4|z+1|^2.$$

Posons $z = x+iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ on trouve

$$|z-1|^2 = 4|z+1|^2 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

qui représente le cercle du centre $\Omega\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{4}{3}$.

(2.b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ alors on a

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} \mod \pi \Longleftrightarrow 2\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi,$$

et puisque $2\arg(w) = \arg(w^2) \mod 2\pi$ pour tout $w \in \mathbb{C}^*$ alors

$$\begin{aligned}
\arg\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right) \equiv -\tfrac{\pi}{4} \mod \pi \quad &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2\right) \equiv -\tfrac{\pi}{2} \mod 2\pi \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2 \in i\mathbb{R}_-^* \\
&\Longleftrightarrow \quad Re\left[\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2\right] = 0 \quad \text{et} \quad Im\left[\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2\right] < 0.
\end{aligned}$$

Posons $z = x + iy$, alors

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = X + iY,$$

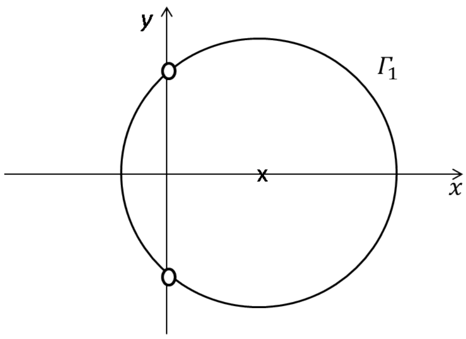
donc

$$\begin{aligned}
Re\left[\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2\right] = 0 \quad \text{et} \quad Im\left[\left(\tfrac{z-i}{z+i}\right)^2\right] < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X^2 - Y^2 = 0 \quad \text{et} \quad XY < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad X = -Y \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 2 \quad \text{et} \quad (x,y) \neq (0, \pm 1).
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points $M(z)$ tel que

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} \mod \pi$$

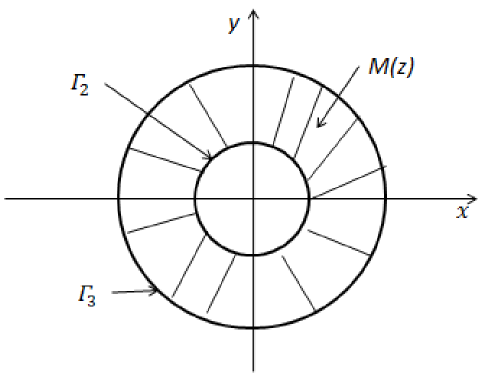
est le cercle Γ_1 du centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ privé des points $(0,\pm 1)$ (voir la figure suivante).



(2.c) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors

$$2 < |z-1-i| < 3 \Longleftrightarrow 4 < (x-1)^2 + (y-1)^2 < 9 \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 > 4 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 9 \end{cases}$$

donc $M(z)$ est la couronne ouverte limitée par les cercles Γ_2 et Γ_3 de centre commun $(1,1)$ et de rayons 2 et 3, respectivement (voir la figure).



Exercice IV.

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl}\overline{P}(\overline{z}) & = & \overline{a}_n \overline{z}^n + \overline{a}_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_0 \\ & = & \overline{a}_n \overline{z^n} + \overline{a}_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a}_0 \\ & = & \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0} \\ & = & \overline{P(z)}.\end{array}$$

Donc si z_0 est une racine d'ordre α de P alors il existe un polynôme Q de degré $n - \alpha$ (remarquez que n est le degré de P) tel que $Q(z_0) \neq 0$ et

$$P(z) = (z - z_0)^{\alpha} Q(z).$$

Par conséquent

$$\overline{P}(z) = \overline{(\overline{z} - z_0)^{\alpha} Q(\overline{z})} = (z - \overline{z_0})^{\alpha} \overline{Q(\overline{z})},$$

d'où $\overline{z_0}$ est une racine d'ordre α de $\overline{P}$; notez que $Q(z_0) \neq 0$ équivalent à $\overline{Q(z_0)} \neq 0$.

De plus, si les coefficients (a_i) sont réels alors $\overline{P} = P$. Par conséquent si z_0 est une racine d'ordre α de P alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine d'ordre α de P et on écrit dans ce cas

$$P(z) = (z - z_0)^{\alpha} (z - \overline{z_0})^{\alpha} R(z),$$

où R est un polynôme de degré $n - 2\alpha$ tel que $R(z_0) \neq 0$ et $R(\overline{z_0}) \neq 0$.

Exercice V.

Soit f une fonction complexe définie par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

a) Montrons que f est continue en 0. On a

$$|f(z)|^2 = 2 \frac{x^6 + y^6}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2 \frac{(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|z|^2$$

d'où

$$0 < |f(z)| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Puisque

$$\lim_{z \to 0} 0 = \lim_{z \to 0} \sqrt{2}|z| = 0$$

alors

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 0.$$

D'où f est continue en 0.

b) Soit $z \neq 0$ alors

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right) \frac{1}{x + iy} = \frac{(x^3 - y^3) + i(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2} (x - iy).$$

Posons $y = tx$ pour un réel t, donc

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \frac{(1 - t^3) + i(1 + t^3)}{(1 + t^2)^2} (1 - it).$$

Et puisque les limites sont différentes sur des chemins différents (e.g. $y = tx$) alors f n'est pas dérivable en 0.

c) Soient u et v, respectivement, les fonctions partie réelle et partie imaginaire de la fonction complexe f. C'est à dire

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donc on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} -\frac{y^3}{y^3} = -1$$

aussi

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

ce qui montre que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en 0.

d) On conclut que la réciproque du théorème des conditions de Cauchy-Riemann n'est pas vraie en général.

Exercice VI.

Soit $f(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout nombre complexe z non nul.

a) On a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z(z + \Delta z)} = -\frac{1}{z^2} \in \mathbb{C}$$

ce qui montre que f est dérivable sur $\mathbb{C}^*$ et

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

b) On pose $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, alors

$$f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u(x,y) + iv(x,y).$$

Donc il est clair que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$ donc les dérivées partielles sont continues en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$. De plus, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Par conséquent, les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et d'après la réciproque du théorème des conditions de Cauchy-Riemann, f est dérivable en tout point $z \neq 0$ et

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{(\overline{z})^2}{(z\overline{z})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Exercice VII.

Soit D un domaine et $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction dérivable sur D telle que $|f(z)|$ est constante. Donc, la dérivabilité de f montre que les fonctions u et v sont de classe C^1 (ses dérivées partielles existent et sont continues) et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

Puisque $|f|^2$ est constante (car $|f|$ est constante) alors on a

$$\begin{cases} \frac{\partial |f|^2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial |f|^2}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(u^2+v^2\right) &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans la première équation par (2) et la deuxième par (1) on obtient,

$$\begin{cases} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u^2\frac{\partial u}{\partial x} - uv\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ vu\frac{\partial u}{\partial y} + v^2\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Donc, si $u^2+v^2 = 0$ c'est à dire si $|f|^2 = 0$ alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in D$ et par conséquent f est constante (ce qui montre le résultat souhaité). Cependant, si $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ alors $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et par conséquent u est constante. En utilisant (1) et (2) on prouve que v est constante et on conclut que f est constante.

Exercice VIII.

On considère la forme trigonométrique suivante

$$f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta) \qquad \text{avec} \qquad z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

a) On vérifie que les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires s'expriment par

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

On ponse $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Soient

$$u(x,y) = U(r,\theta) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = V(r,\theta)$$

En utilisant la règle de la chaîne on a

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Puisque les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées alors

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} = r\Big(\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = r\frac{\partial U}{\partial r}.$$

De même on a

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial v}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\Big(\sin(\theta)\frac{\partial v}{\partial y} + \cos(\theta)\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = -r\frac{\partial V}{\partial r}.$$

b) On pose $\Omega = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \times \{0\}$. Démontrons que la fonction f définie par $f(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ est dérivable en tout point $z \in \Omega$.

On a démontré dans le cours (voir **Conséquence 3.3.1**) que pour tout $z = x + iy \in \Omega$ que

$$\mathrm{Arg}(z) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + |z|}\right) = 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Donc pour tout $z = x + iy \in \Omega$, f peut être écrite sous sa forme cartésienne par

$$\begin{array}{rcccc} f(z) & = & \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) & + & i\,2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ & = & u(x, y) & + & i\,v(x, y). \end{array}$$

Comme u et v sont composées des fonctions de classe C^1 sur $\Omega' = \mathbb{R}^2\backslash(-\infty, 0] \times \{0\}$ alors u et v ont des dérivées partielles continues; par conséquent, il suffit de démontrer que cettes dérivées partielles vérifient les conditions de Cauchy-Riemann. Donc d'une part on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

et d'une autre part

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y\frac{\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}{1 + \left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + y^2} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$$

et puisque $x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)$ alors on déduit la première condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Aussi

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}{1 + \left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = 2\frac{\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

D'où la deuxième condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

On conclut que f est dérivable en tout point de Ω.

c) Posons $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ pour tout $(r, \theta) \in W = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$, alors on a

$$f(z) = \ln(r) + i\theta = U(r, \theta) + iV(r, \theta).$$

Donc il est clair que U et V sont de classe C^1 sur W, en plus

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

On déduit la dérivabilité de f en tout point $(r, \theta) \in W$.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Corrigé Série #2

On rappelle que l'opérateur Laplacien d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 est défini par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit f est harmonique si $\Delta f = 0$.

Exercice I.

1.a Soit $u(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$ donc u est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin(x)\cosh(y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \sin(x)\cosh(y)$$

donc $\Delta u = 0$ ce qui montre que u est harmonique. Soit $v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une conjuguée de u alors les dérivées partielles de u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En intégrant l'équation à gauche par rapport à y on trouve

$$v(x, y) = \cos(x)\sinh(y) + h(x)$$

où h est une fonction numérique de classe C^1. L'autre condition de Cauchy-Riemann nous montre que

$$\sin(x)\sinh(y) = \sin(x)\sinh(y) + h'(x)$$

Donc $h'(x) = 0$ et par conséquent h est constante. D'où les fonctions conjuguées de u sont

$$v(x, y) = \cos(x)\sinh(y) + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

1.b Soit $u(x, y) = e^{-x}\sin(2y)$ donc u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^{-x}\sin(2y) = u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -4e^{-x}\sin(2y) = -4u.$$

Alors $\Delta u = -3u \neq 0$ d'où u n'est pas harmonique.

2.a Soit $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ donc u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6x \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -6x.$$

Alors $\Delta u = 0$ d'où u est harmonique. Soit v une fonction conjuguée de u, alors la première condition de Cauchy-Riemann nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

On intègre par rapport à y on trouve

$$v(x,y) = -y^3 + 3yx^2 + h(x),$$

où h est une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. La deuxième condition de Cauchy-Riemann nous donne

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy - h'(x).$$

On déduit que $h'(x) = 0$ donc h est constante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent les fonctions conjuguées de u sont

$$v(x,y) = -y^3 + 3yx^2 + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ avec $z = x + iy$ alors

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3iyx^2 - iy^3 + ic = x^3 + 3x(iy)^2 + 3(iy)x^2 + (iy)^3 + ic$$

donc

$$f(z) = (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

Exercice II.

1.a. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On sait que

$$e^{iz} = e^{ix}e^{-y} = e^{-y}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right) \quad \text{et} \quad e^{-iz} = e^{-ix}e^{y} = e^{y}\left(\cos(x) - i\sin(x)\right).$$

Donc

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i\cos(x)\,\frac{e^y - e^{-y}}{2} + \sin(x)\,\frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

c'est à dire

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

1.b. De la même manière et puisque $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ on démontre que

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y).$$

2. D'après la question précédente, $\cosh(2+i) = \cosh(2)\cos(1) + i\sinh(2)\sin(1) \approx 2.0326 + i3.0515$. De même, puisque $\sinh(iz) = i\sin(z)$ alors

$$\sinh(4-3i) = \sinh(-i(3+4i)) = -\sin(3+4i) = -\sin(3)\cosh(4) - i\cos(3)\sinh(4) \approx -27.0142 - 3.8532i.$$

3.a. On a $\sin(z) = 100$ est équivalent à $\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) = 100$ donc

$$\begin{cases} \cos(x)\sinh(y) = 0 \\ \sin(x)\cosh(y) = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x) = 0 \text{ ou } \sinh(y) = 0 \\ \sin(x)\cosh(y) = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \text{ ou } y = 0 \\ \sin(x)\cosh(y) = 100 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ (-1)^k\cosh(y) = 100 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \sin(x) = 100 \end{cases}$$

Or le deuxième système ne peut pas être vérifié (car $-1 \le \sin(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Et puisque $\cosh(y) \ge 1$ sur $\mathbb{R}$ alors

$$\sin(x+iy) = 100 \iff x = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = \operatorname{arccosh}(100) = \ln\left(100 + 3\sqrt{1111}\right).$$

3.b. On a $\cos(z) = 2i$ implique $z = \arccos(2i) = -i\ln\left(2i \pm i\sqrt{5}\right) = \mp i\ln\left(\sqrt{5} \pm 2\right) \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. C'est à dire

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{5}+2\right) \qquad \text{ou} \qquad z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln\left(\sqrt{5}-2\right).$$

Réciproquement, les solutions vérifient bien l'équation.

3.c. On a $e^z = 4 - 3i$ implique $z = \ln(4-3i) = \ln|4-3i| - i\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$z = \ln(5) - i\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + 2ik\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

4.a.

- $\ln(-1) = \ln\left(e^{(2k+1)i\pi}\right) = (2k+1)i\pi$
- $\ln(-e) = \ln\left(e^{(2k+1)i\pi+1}\right) = 1 + (2k+1)i\pi.$
- $\ln(4+3i) = \ln(5) + i\arctan\left(\dfrac{3}{4}\right) + 2ki\pi$
- $\ln\left(e^{3i}\right) = 3i + 2ik\pi = (2k\pi+3)i.$

Avec $k \in \mathbb{Z}$.

4.b. Montrons que pour tout $x \geq 1$

$$\text{Arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$

où Arccosh désigne la fonction réciproque de la fonction cosh. Il est connu que cosh est inversible de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[1,+\infty)$. Soient alors $x \in [1,+\infty)$ et $y \in \mathbb{R}_+$ donc

$$\text{Arccosh}(x) = y \iff \cosh(y) = x \iff e^y + e^{-y} = 2x \iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

L'équation $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ admette comme solutions, pour tout $x \geq 1$,

$$Y = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{ou} \qquad Y = x - \sqrt{x^2-1}$$

et comme $Y \geq 1$ pour tout $x \geq 1$ alors la solution possible est $Y = x + \sqrt{x^2-1}$, c'est à dire

$$\text{Arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\text{Arccosh}(z) = w$ alors $z = \cosh(w) = \dfrac{e^w + e{-}w}{2}$. Donc

$$w = \ln\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right).$$

Et puisque la restriction de Arccosh sur $\mathbb{R}$ est $\text{Arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ alors

$$\text{Arccosh}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

Exercice III.

On a

$$x^2 + y^2 = 4 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1.$$

Donc l'équation paramétrique est donnée par

$$x = 2\cos(t) \qquad \text{et} \qquad y = 2\sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Exercice IV.

(a) Soit $t \in (-1, 2)$ et posons $x(t) = 4 - 2t$ et $y(t) = -3 + 5t$. Donc on remplace $t = \frac{4-x}{2}$ dans y et on trouve

$$y = -\frac{5}{2}x + 7$$

qui est l'équation paramétrique d'un segment ouvert $[AB]$ d'extrémités $A\,(x(-1), y(-1))$ et $B\,(x(2), y(2))$.

(b) Soit $0 < t < \frac{3\pi}{4}$ et posons $x(t) = 2\cos(t)$ et $y(t) = 5\sin(t)$ donc on a

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$$

qui est une équation paramétrique d'une ellipse et comme $0 < t < \frac{3\pi}{4}$ alors la courbe demandée est une partie de l'ellipse.

Exercice V.

L'équation paramétrique de la courbe d'équation $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ est donnée par

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

donc le vecteur directeur de la tangente (T) au point $(x(t_0), y(t_0))$ (à l'instant t_0) est défini par

$$\vec{u}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (-2\sin(t_0), \cos(t_0))\,.$$

En particulier, le point $P\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est correspond à l'instant $t_0 = \frac{\pi}{4}$. En effet,

$$x(t_0) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$y(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$M\,(x(t), y(t)) \in (T) \Longleftrightarrow \overrightarrow{PM} = t\vec{u}(t_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2}t \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

Exercice VI.

On rappelle qu'un champ de vecteurs $F = (M, N)$ tel que $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1, dérive d'un potentiel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

On a alors $\nabla f = F$ ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

1.a. Soit $F(x, y) = \left(x^3 - y\sin(x)\,,\, y^3 - \cos(x)\right) = (M, N)$ alors M et N sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ mais

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin(x) \neq \sin(x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

alors F ne dérive pas d'un potentiel.

1.b. Soit $F = (M, N)$ avec $M(x, y) = 2x \arctan(y)$ et $N(x, y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$. Alors M et N sont bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2x}{1+y^2} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

donc F dérive d'un potentiel f. Et on a d'une part

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) = 2x \arctan(y) \Longrightarrow f(x, y) = x^2 \arctan(y) + h(y)$$

où h est une fonction numérique de classe C^1, donc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{1+y^2} + h'(y).$$

Et d'une autre part

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}.$$

On déduit que $h'(y) = 0$ donc h est constante et par conséquent

$$f(x, y) = x^2 \arctan(y) + \text{cte}.$$

2.a. On pose $M(x, y) = yx^2$ et $N(x, y) = x + y$. Notez que le champ $F(M, N)$ ne dérive pas d'un potentiel (à vérifier). Alors soit la paramétrisation de la courbe C

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

donc

$$M(x, y) = -t^5, \qquad N(x, y) = t - t^3, \qquad dx = dt, \quad \text{et} \quad dy = -3t^2 dt$$

et

$$\int_C (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = \int_0^1 \left(-t^5 - 3t^2(t - t^3)\right) dt = \int_0^1 \left(2t^5 - 3t^3\right) dt = -\frac{5}{12}.$$

2.b. On pose $M(x, y) = 3xy$ et $N(x, y) = 4x^2 - 3y$. On considère, après la vérification que le champ $F = (M, N)$ ne dérive pas d'un potentiel, les paramétrisations suivantes

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 3] \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [3, 5].$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = \int_0^3 (14t^2 - 3t - 18)dt + \int_3^5 5t^2 dt = 738.5$$

Exercice VII.

On rappelle qu'un champ de vecteurs $F = (M, N, R)$ tel que M, N et R sont de classe C^1 dérive d'un potentiel f si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

et on a $\nabla f = F$, c'est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

a) Soit $F = (M, N, R)$ avec $M(x, y, z) = 6xy^3 + 2z^2$, $N(x, y, z) = 9x^2y^2$ et $R(x, y, z) = 4xz + 1$. Donc les fonctions M, N et R sont de classe C^1 (des polynômes) et on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 4z, \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

donc F dérive d'un potentiel f. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = M(x, y, z) = 6xy^3 + 2z^2$$

donc

$$f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2z^2x + h(y, z)$$

où h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Or

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = N(x, y, z) \Longleftrightarrow 9x^2y^2 + \frac{\partial h}{\partial y}(y, z) = 9x^2y^2$$

alors

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y, z) = 0$$

ce qui implique

$$h(y, z) = g(z)$$

où g est une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z) \Longleftrightarrow 4zx + g'(z) = 4xz + 1$$

alors

$$g'(z) = 1$$

ce qui implique

$$g(z) = z + \text{cte}.$$

Par conséquent

$$f(x, y, z) = 3x^2y^3 + 2z^2x + z + \text{cte}.$$

b) Puisque F dérive d'un potentiel f et C est une courbe lisse reliant les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ alors

$$\int_C (M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz) = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 6.$$

c) Soient les points $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ et $D(1, 1, 1)$ donc

$$\int_C = \int_{[OA]\cup[AB]\cup[BD]} = \int_{[OA]} + \int_{[AB]} + \int_{[BD]}.$$

Or les paramétrisations des segments sont données par

$$[OA] : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad [AB] : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad [BD] : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

Donc

$$\int_{[OA]} (M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz) = 0,$$

$$\int_{[AB]} (M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz) = \int_0^1 9t^2dt = 3$$

et

$$\int_{[BD]} (M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) = \int_0^1 (4t+1) = 3.$$

Par conséquent

$$\int_C (M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) = 3 + 3 = 6.$$

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Corrigé Série #3

Exercice I.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on a

$|z-2+3i| = 4 \Longleftrightarrow |x+iy-2+3i| = 4 \Longleftrightarrow |(x-2)+i(y+3)|^2 = 4^2 \Longleftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = 16.$

qui est l'équation du cercle $C\Big((2,-3);4\Big)$. Donc

$$\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+3}{4}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-2)}{4} = \cos(t) \\ \frac{(y+3)}{4} = \sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

D'où

$$C : \begin{cases} x(t) = 2 + 4\cos t \\ y(t) = -3 + 4\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Exercice II.

a) Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ pour tout $t \in [0, 2]$ alors

$$z(t) = 1+i+\cos(\pi t) - i\sin(\pi t) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = 1 + \cos(\pi t) \\ y(t) = 1 - \sin(\pi t) \end{cases}, \quad t \in [0,2] \Longleftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 1,$$

qui représente l'équation du cercle $C\left((1,2);1\right)$.

b) On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$, pour tout $t \in [-1, 1]$, alors

$$z(t) = 1 + 2t + 8it^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 8t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ y = 8t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow y = 2(x-1)^2,$$

qui représente l'équation de parabole limitée par les points $A(-1,8)$ et $B(3,8)$.

Exercice III.

a) Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ donc $\overline{z(t)} = x(t) - iy(t)$ et $dz(t) = z'(t)dt = (x'(t) + iy'(t))dt$. On considère une paramétrisation de la courbe C donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [-1, 1].$$

Alors
$$\int_C \bar{z}dz = \int_{-1}^{1} \left(t - it^2\right)(1+2it)dt = \int_{-1}^{1} (2t^3 + it^2 + t)dt = \frac{2}{3}i.$$

Remarque. Notez que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe (voir le cours).

b) Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$ alors $Im(z^2) = 2x(t)y(t)$ et $dz = z'dt = (x' + iy')dt$. la courbe C est le triangle de sommets $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(0,1)$; alors

$$\int_C Im(z^2)dz = \int_{[OA]} Im(z^2)dz + \int_{[AB]} Im(z^2)dz + \int_{[BO]} Im(z^2)dz$$

Or

$$[OA] : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} , \qquad [AB] : \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \end{cases} , \quad \text{et} \quad [BO] : \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

D'où

$$\int_{[OA]} Im(z^2)dz = \int_{[BO]} Im(z^2)dz = 0 \quad \text{et} \quad \int_{[AB]} Im(z^2)dz = 2(-1+i)\int_0^1 t(1-t)dt = \frac{-1+i}{3}.$$

Par conséquent,
$$\int_C Im(z^2)dz = \frac{-1+i}{3}.$$

Exercice IV.

a) La fonction $f(z) = Re(2z)$ n'est pas holomorphe. Donc

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_0^{\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{it}dt$$

Or
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2xdx = 0$$

et

$$\int_0^{\pi} f\left(e^{it}\right) ie^{it}dt = i\int_0^{\pi} \left(2\cos^2(t) + i\sin(2t)\right)dt = i\int_0^{\pi} (\cos(2t) + 1 + i\sin(2t))\,dt = i\pi.$$

Donc
$$\oint_C f(z)dz = i\pi.$$

b) La fonction $f(z) = \dfrac{7z-6}{z^2-2z}$ a deux pôles simples 0 et 2 situés dans le contour fermé C; donc d'après le théorème des résidus on a

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(Res(f,0) + Res(f,2)\right)$$

Or
$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = 3 \qquad \text{et} \qquad Res(f,0) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = 4.$$

Donc
$$\oint_C f(z)dz = 14i\pi.$$

Exercice V.

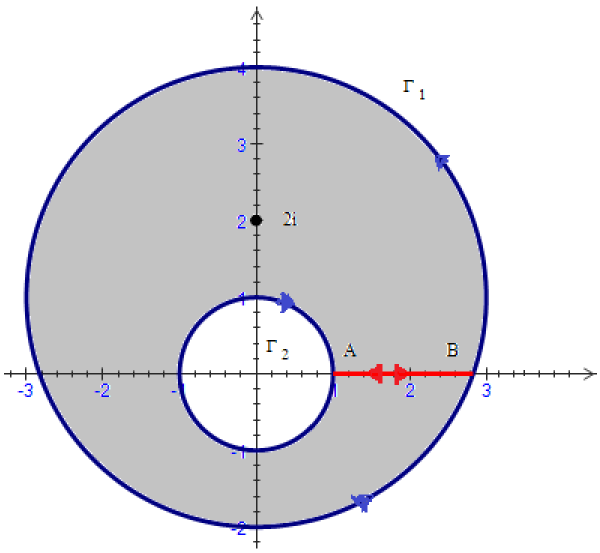
a) Soit $f(z) = \frac{1}{4}(1+2z)\cos(z)$ et C le cercle unité alors f est holomorphe sur et à l'intérieur de C. Donc, puisque $z_0 = \frac{1}{2}$ est à l'intérieur de C alors d'après le théorème de Cauchy

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{2})}dz;$$

c'est à dire

$$\oint \frac{(1+2z)\cos(z)}{(2z-1)^2}dz = 2\pi i f'\left(\frac{1}{2}\right) = i\pi\cos\left(\frac{1}{2}\right) - i\pi\sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

b) Il est clair que la couronne à l'intérieur de $C = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ n'est pas simplement connexe! ou aussi, la courbe C n'est pas lisse par morceaux. Alors on ajoute un segment $[AB]$ (voir la figure) pour que la courbe soit lisse par morceaux (et d'intérieur simplement connexe).



On a alors,

$$\oint_{[AB]\cup\Gamma_1\cup[BA]\cup\Gamma_2} = \oint_{C\cup[AB]\cup[BA]} = \oint_C + \int_{AB} + \int_{[BA]} = \oint_C.$$

Or puisque $C' = [AB]\cup\Gamma_1\cup[BA]\cup\Gamma_2$ est un contour lisse par morceaux et entouré un domaine simplement connexe et puisque la fonction $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z}$ est holomorphe dans C' alors d'après le théorème de Cauchy on a

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{(z-2i)^2}dz = 2i\pi f'(2i) = \frac{(4+i)e^{4i}}{2}\pi.$$

D'où

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{z(z-2i)^2}dz = \frac{(4+i)e^{4i}}{2}\pi.$$

Exercice VI.

1.a. Puisque $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{5}\right| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n \qquad \text{convergent}$$

et par conséquent, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

est convergente. En plus

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)=\frac{31}{6}.$$

1.b. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-5}{n+2}=1\neq 0$ alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n-5}{n+2}$ diverge.

2.a. Soit $u_n=\dfrac{n-3}{n^2+2}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge alos la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ est divergente.

2.b. Soit $f(x)=\dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$ alors puisque f est positive et décroissante alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ ont la même nature. Et puisque

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\left[\frac{1}{2}\arctan^2(x)\right]_1^{+\infty}=\frac{3\pi^2}{32}\quad\text{converge}$$

alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan(n)}{n^2+1}$ est convergente.

2.c. Soit $v_n\dfrac{n!}{n^{100}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=+\infty>1$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{100}}$ est divergente.

3. On pose $a_n\dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, alors puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+3)^n$ converge si $|x+3|<1$, c'est à dire, si $x\in]-4,-2[$.

Pour $x=-2$ on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+3)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ qui est une série alternée donc est convergente.

Pour $x=-4$ on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+3)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ qui est la série harmonique donc divergente.

On conclut que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+3)^n$ converge si $x\in]-4,2]$.

Exercice VII.

1.a. On pose $u_n=\left(\dfrac{10-15i}{n!}\right)^n$ alors puisque

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|10-15i|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!^n}{(n+1)!^{n+1}}\right|=|10-15i|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!(n+1)^n}=0<1.$$

Donc la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{10-15i}{n!}\right)^n$ est convergente.

1.b. On a pour tout $n \geq 1$

$$0 < \left|\frac{i^n}{n^2 - 2i}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^4+4}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Et puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2-2i}$ est convergente.

1.c. On pose $v_n = n^2\left(\frac{i}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \frac{1}{3} < 1$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente.

2.a. Soit $a_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors puisque $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z+i)^n$ converge si $|z+i| < 1$; c'est à dire, si z est dans le disque ouvert du centre $(0,-1)$ et de rayon 1. Mais, si $z + i = e^{it}$ pour $t \in \mathbb{R}$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z+i)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^2}$$

Or,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{qui est convergente.}$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^2}$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$. Et par conséquent la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n^2}$ converge si $|z+i| \leq 1$; c'est à dire, si z appartient au disque fermé de centre $(0,-1)$ et de rayon 1.

2.b. Soit $b_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!^2}$ alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}n!^2}{2^{2n+2}(n+1)!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)^2} = 0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!^2} z^{2n}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2.c. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(1+i)^n}(z-5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4(z-5)}{1+i}\right)^n$$

qui converge si

$$\left|\frac{4(z-5)}{1+i}\right| < 1$$

c'est à dire, si $|z-5| < \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire : 2017-2018
Filière : SMP
Module M19 : ANALYSE III

Corrigé Série #4

Exercice I.

a) Si $|z-1|<1$ alors $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1-(1-z)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$. Et si $|z-1|>1$ alors

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-1}.$$

b) On sait que pour tout $w\in\mathbb{C}$ on a $\cosh(w)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{2n}}{(2n)!}$. Donc,

$$z^3\cosh\left(\frac{1}{z}\right)=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!z^n}=z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+6)!}z^{-n}.$$

Exercice II.

a) On sait que pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a $\cos(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n}}{(2n)!}$ donc

$$\frac{\cos(z)}{z^6}=\frac{1}{z^6}-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{24z^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^nz^{2n-6}}{(2n)!}.$$

Alors le seul point singulier est 0 qui est un pôle d'ordre 6 et son résidu égale à 0.

b) Les points singuliers de la fonction $z\mapsto\dfrac{1}{\cos(z)}$ sont $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Notez que les z_k sont des pôles simples de résidus égaux à $\dfrac{1}{\sin(z_k)}=(-1)^k$.

Exercice III.

a) On a

$$f(z)=\frac{\sin(\pi z)}{z^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n-3}=\frac{\pi}{z^3}-\frac{\pi^3}{6z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n-3}$$

Donc f a un seul pôle d'ordre 3 en $z=0$ de résidu égal à $-\frac{\pi^3}{6}$. Alors

$$\oint_{\Gamma_1}f(z)dz=-\frac{\pi^4}{3}i.$$

b) La fonction $g(z) = \dfrac{1-4z+6z^2}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)(2-z)}$ admette deux pôles $\pm\frac{i}{2}$ situés à l'intérieur de la courbe fermé Γ_2. Donc

$$Res\left(g, \frac{i}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{i}{2}}\left(z-\frac{i}{2}\right)g(z) = -1 = Res\left(g, -\frac{i}{2}\right) = \lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left(z+\frac{i}{2}\right)g(z).$$

D'où

$$\oint_{\Gamma_2} g(z)dz = -4i\pi.$$

Exercice IV.

1) Puisque la fonction est 2π-périodique et paire alors sa série de Fourier est donnée par

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)$$

pour tout $x \in]-\pi,\pi[$, avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Et

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Donc

$$a_{2k} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

2) En appliquant l'égalité de Parseval (notez que f est continue par morceaux) on trouve

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$