Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire 2017-2018

Filière SMP - Semestre 3

Cours Magistral du Module Analyse 3

Professeur : Zine El-Abidine Guennoun

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat–Maroc
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://http://fsr.um5.ac.ma/

Préambule

Le module ANALYSE 3 est une introduction aux notions d'analyse complexe, Séries numériques complexes, Séries trigonométriques, Transformée de Fourier, Transformée de Laplace. Ainsi que leurs applications comme par exemple : Résolution des équations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Ce cours sera complété par des démonstrations, des exemples, et des explications qui seront développés pendant la séance du cours.

Table des matières

1

Introduction et rappels

1.1 Nombres Réels

L'ensemble de tous les nombres réels est noté $\mathbb{R}$. On définit alors deux opérations internes sur $\mathbb{R}$:
L'addition : "$+$" et la multiplication : "$\cdot$".
L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est stable pour les deux opérations :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y \in \mathbb{R}$$

- 0 est l'élément neutre pour l'addition : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$,
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.
- Tous les éléments de $\mathbb{R}$ admettent un inverse pour les deux opérations sauf 0 pour la multiplication :

$\forall x \in \mathbb{R}$, il existe un inverse pour l'addition noté $-x$ tel que $x + (-x) = 0$.
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, il existe un inverse pour la multiplication noté x^{-1} tel que $x \cdot x^{-1} = 1$.
Les deux opérations vérifient d'autres propriétés comme : l'associativité, la distributivité, la commutativité.
Puisqu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et la droite réelle, on peut identifier les nombres à la droite réelle :

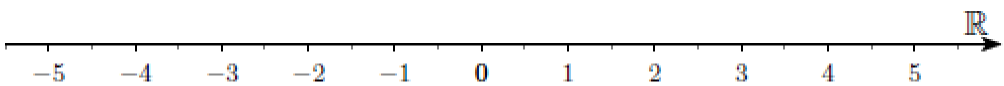


Figure 1.1 – Représentation des nombres réels

L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif, ce qui permet de résoudre plusieurs équations dans $\mathbb{R}$. Par exemple :

a) L'équation linéaire $ax + b = 0$, $a \neq 0$, admet une solution unique $x = -\dfrac{b}{a}$

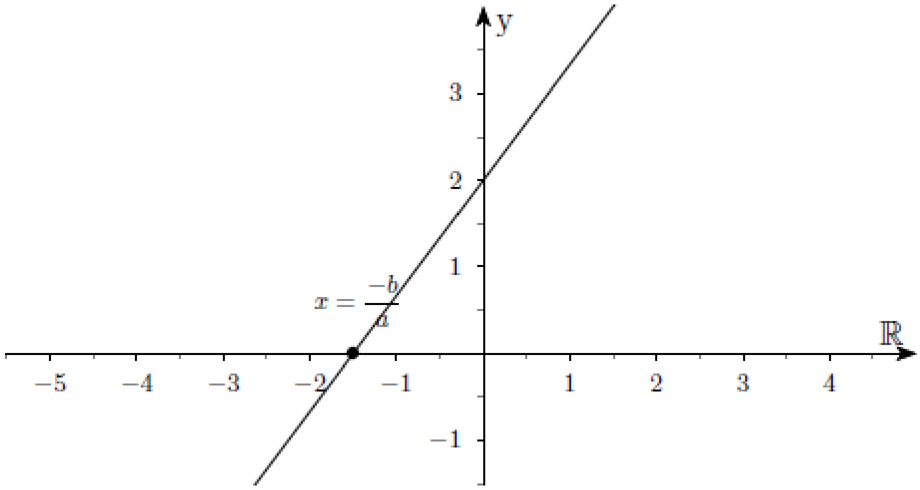


FIGURE 1.2 – Représentation de solution de $ax + b = 0$

b) L'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, la résolution de l'équation du second degré dépend de la valeur de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:
   - Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

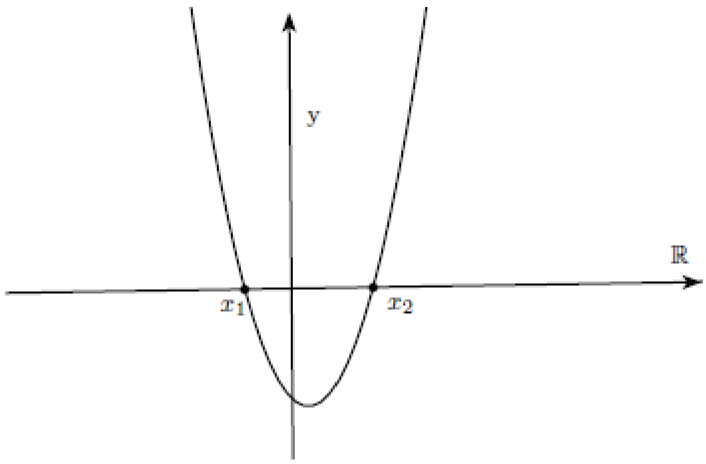


FIGURE 1.3 – Deux solutions x_1 et x_2 pour l'équation

   - Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ dans $\mathbb{R}$:

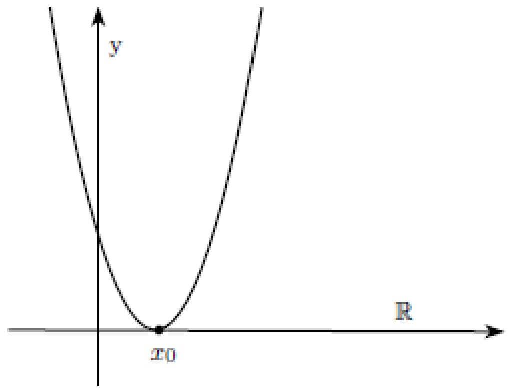


FIGURE 1.4 – Solution unique x_0 pour l'équation

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$:

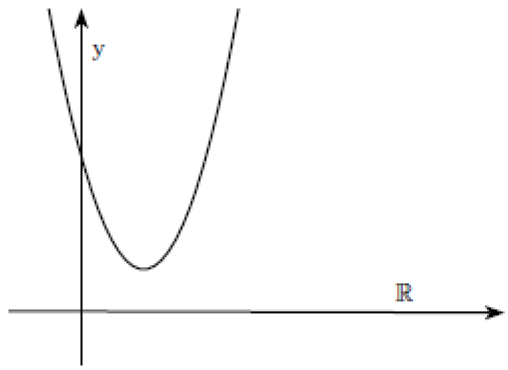


FIGURE 1.5 – Aucune solution pour l'équation

Même si $\mathbb{R}$ contient tous les nombres réels, plusieurs équations n'admettent pas de solutions réelles dans $\mathbb{R}$. Comme par exemple : $x^2 + 1 = 0$, $3x^2 - 5x + 30 = 0$ n'admettent pas de solutions réelles. Pour étudier, comprendre et analyser plusieurs phénomènes réels comme (Pendule, trajectoires périodiques, circuits électriques), on a besoin de déterminer les racines.

1.2 Nombres complexes

1.2.1 Définition

On définit alors l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ qui prolonge $\mathbb{R}$ et qui permet de résoudre ce genre d'équations. Puisque $\mathbb{R}$ remplit toute la droite réelle, on identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, un nombre complexe z est représenté par un couple de nombre réels (x, y).

- x est appelée la partie réelle de z notée $Re(z)$,
- y est appelée la partie imaginaire de z notée $Im(z)$:

$$z = z_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z_1) \\ Im(z) = Im(z_1) \end{cases}$$

On définit l'addition de deux nombres complexes $z = (x, y)$ et $z_1 = (x_1, y_1)$ par :

$$z + z_1 = (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

La multiplication est définie par :

$$zz_1 = (x, y)\ (x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1 y)$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication vérifie les mêmes propriétés que $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication. L'ensemble $\mathbb{C}$ est aussi un corps commutatif.

1.2.2 Remarques

1. $(x, 0) + (x_1, 0) = (x + x_1, 0)$.
2. $(x, 0)(x_1, 0) = (xx_1, 0)$.
   On identifie alors $\mathbb{R}$ au sous-ensemble de $\mathbb{C}$ déterminé par $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ qui est stable, et on retrouve la droite réelle munie des deux opérations usuelles.
3. Le nombre $(0, 1)$ noté i est appelé unité imaginaire car il engendre la droite réelle perpendiculaire à la droite réelle $\mathbb{R}$. De plus : $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$. En identifiant $(-1, 0)$ au nombre -1, on obtient $i^2 = -1$. Le nombre complexe i est alors une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Si $z \in \mathbb{C}$ on a : $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$. On a alors :
   $$\mathbb{C} = \{z = x + iy \ /\ \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$
4. L'élément neutre $(0, 0)$ de l'addition est noté par 0.
5. L'élément $(1, 0)$ neutre de la multiplication est noté par 1.
   On obtient les identités suivantes :
   — $z + z_1 = (x + iy) + (x_1 + iy_1) = (x + x_1) + i(y + y_1)$.
   — $z - z_1 = (x + iy) - (x_1 + iy_1) = (x - x_1) + i(y - y_1)$.
   — $$\begin{aligned} zz_1 &= (x + iy)(x_1 + iy_1) &&= (xx_1 + i^2 yy_1) + (ix_1 y + ixy_1) \\ & &&= (xx_1 - yy_1) + i(x_1 y + xy_1); \end{aligned}$$
   donc on déduit
   $$\begin{cases} Re(zz_1) &= (xx_1 - yy_1) \\ Im(zz_1) &= (x_1 y + xy_1). \end{cases}$$
   — Si $z_1 \neq 0$,
   $$\begin{aligned} \frac{z}{z_1} &= \frac{(x + iy)}{(x_1 + iy_1)} &&= \frac{(x + iy)(x_1 - iy_1)}{x_1^2 + y_1^2} \\ & &&= \frac{(xx_1 + yy_1)}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{(x_1 y - xy_1)}{x_1^2 + y_1^2}. \end{aligned}$$

1.2.3 Définition

On définit le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ par $\overline{z} = x - iy$.
On obtient $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, un nombre réel positif, qui représente la distance euclidienne au carré entre les points d'affixes 0 et z.
On a aussi les relations suivantes :

— $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ la partie réelle de z.
— $Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ la partie imaginaire de z.
— Pour tout $z = x+iy \neq 0$; on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

1.2.4 Propriété algébrique de $\mathbb{C}$

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré un et les polynômes de degré deux sans racine réelle. Par conséquent, certaines équations quadratiques

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0;$$

n'admettent pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
Tout polynôme P non nul de degré $n \geq 1$ s'écrit sous la forme :

$$P(x) = \alpha(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\cdots(x-r_s)^{\alpha_s}\prod_{i=1}^{m}(\ a_ix^2+b_ix+c_i)^{\beta_i}$$

où r_i sont les racines réelles de multiplicité α_i du polynôme $P(x)$.
Dans $\mathbb{C}$ l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0, \quad a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$; admet toujours deux racines ou une racine double dans $\mathbb{C}$.
Vérifier l'affirmation et déterminer les racines en fonction de a, b et c.
L'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps commutatif est algébriquement clos :
Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Soit P un polynôme non constant dans $\mathbb{C}$, alors le polynôme P admet une décomposition unique de la forme :

$$P(z) = \alpha(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\cdots(z-a_r)^{\alpha_r}$$

avec a_i sont les racines complexes de multiplicité α_i du polynôme P.

1.2.5 Plan complexe

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est représenté géométriquement par la droite réelle. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est représenté géométriquement par le plan $\mathbb{R}^2$. A chaque $z = x+iy$, on associe le point (x, y).
Exemple : $z = 2+4i$ est représenté par l'extrémité du segment ci-dessous.

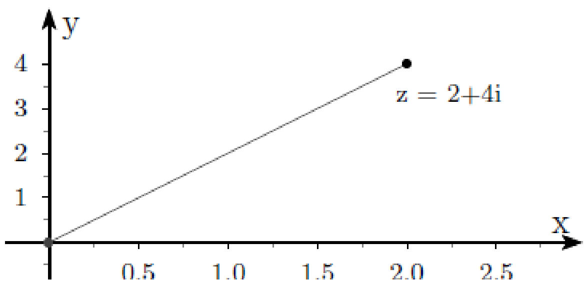


FIGURE 1.6 – Représentation du nombre complexe $z = 2+4i$

1.3 Forme polaire des nombres complexes

1.3.1 Définition

Soit $z = x + iy$, en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) définies par :

$$x = r\cos(\theta); \qquad y = r\sin(\theta),$$

on obtient $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Cette unique écriture pour un certain nombre complexe z est appelée la forme polaire du nombre complexe z. Avec

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \mod 2\pi;$$

on prend les valeurs de θ entre $-\pi$ et π $(-\pi < \theta \leq \pi)$; cette valeur de θ est appelée argument principal de z et est noté $\arg(z)$.
Si $z = x + iy \neq 0$ alors l'argument $\arg(z)$ est déterminé selon les cas suivants :

Cas 1 : Si $x > 0$ alors $arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$,

Cas 2 : Si $x = 0$ alors

$$arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

Cas 3 : Si $x < 0$ alors

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

1.3.2 Exemples

Cas 1. Si $z = 2 + i2\sqrt{3}$ alors l'argument $arg(z) = Arc\tan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Cas 3. Si $z = -4 + 4i$ alors $arg(z) = \pi + Arc\tan(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Cas 3. Si $z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$ alors $arg(z) = Arc\tan(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

1.4 Puissances et racines des nombres complexes

1.4.1 Formule de Moivre

Soient $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ alors

$$zz_1 = rr_1(\cos(\theta + \theta_1) + i\sin(\theta + \theta_1)).$$

D'où on déduit que $\arg(zz_1) = \arg(z) + \arg(z_1) \mod 2\pi$. Ainsi on obtient la forme plaire de la $n^{ème}$ puissance d'un nombre complexe z, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Par conséquent, la formule de Moivre est donnée par :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

On définit la racine $n^{\text{ème}}$ de z par :

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\Big(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{n})\Big),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

En particulier, si $z=1$ alors $\theta=0$ et $r=1$. Donc

$$\sqrt[n]{1}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

Exemple 1.4.1. Déterminer et représenter dans $\mathbb{R}^2$ les *racines* $8^{ème}$ $(\sqrt[8]{1})$ de 1.
Les racines sont déterminées par :

$$z_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{8}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,7.$$

Donc

$$\begin{array}{llll} z_0=1, & z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_2=i, & z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4=-1, & z_5=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}, & z_6=-i, & z_7=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}$$

Par suite on a la représentation géométrique suivante

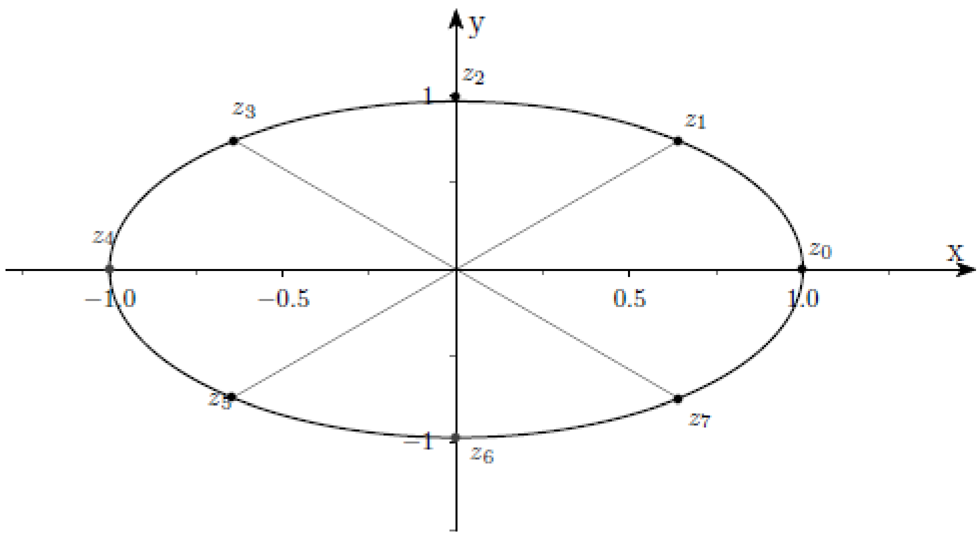


FIGURE 1.7 – Les racines $8^{ème}(\sqrt[8]{1})$ de 1

1.4.2 Module d'un nombre complexe

Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}$, alors le module de z, noté $|z|$, est défini par :

$$|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Géométriquement, le module de z est la distance entre le point correspondant à z (que l'on appelle souvent le point d'affixe z) et l'origine 0 dans le plan complexe.

Propriétés 1.4.2.

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
3. $|z_{1+}z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Inégalité triangulaire).
4. $|\overline{z}| = |z|$.

1.5 Propriétés topologiques

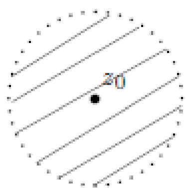
On définit alors la distance entre deux nombres complexes z_1, z_2 par :

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Le disque ouvert de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon $a > 0$ est défini par :

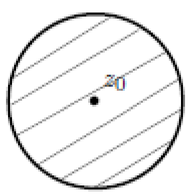
$$D(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z - z_0| < a\}.$$

Si $z = x + iy \in D(z_0, a)$ alors $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < a$
Par conséquent $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a^2$ qui représente l'intérieur délimité par le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon a.



Le disque fermé de centre z_0 et de rayon a est défini par :

$$\overline{D}(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z - z_0| \leq a\}$$



La frontière du disque fermé de centre z_0 et de rayon a est le cercle :

$$\{z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z - z_0| = a\}.$$

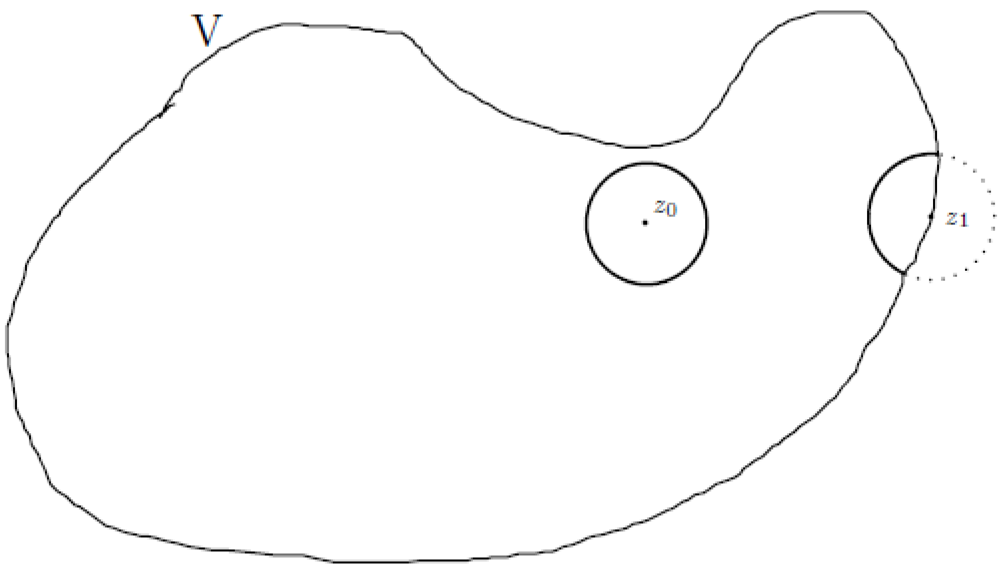
Définition 1.5.1.

1) Soient $V \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in V$, l'ensemble V est un voisinage de z_0 si V contient un disque ouvert centré en z_0.
2) L'ensemble $V \neq \varnothing$ est un ouvert si et seulement si V est voisinage de chacun de ses points.

3) L'intersection finie de voisinages d'un point est un voisinage de ce point.

4) Le disque ouvert $D(z_0, a)$ est un voisinage de z_1 est appelé a-voisinage de z_1.

Exemple 1.5.2.



L'ensemble V est un voisinage de z_0. Le point z_0 se situe à l'intérieur de V. L'ensemble V n'est pas un voisinage de z_1. Le point z_1 se situe sur la frontière de V.

2 Analyse Complexe

2.1 Fonction complexe

2.1.1 Définitions

Soit $V \subset \mathbb{C}$, on appelle fonction d'une variable complexe toute application f définie sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note, pour $z \in V$, $w = f(z) \in \mathbb{C}$. Si on pose $z = x + iy$, on obtient

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

u et v sont deux fonctions numériques de deux variables réelles, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La fonction u est appelée *la partie réelle* de f et la fonction v est appelée *la partie imaginaire* de f.

Exemple 2.1.1. Soit $f(z) = z^2 + 4z + 3$, en posant $z = x + iy$, on a :

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 4x + 3 + i(2xy + 4y).$$

$u(x, y) = x^2 - y^2 + 4x + 3$ est la partie réelle de $f(z)$ et $v(x, y) = 2xy + 4y$ est la partie imaginaire de $f(z)$.

2.1.2 Limites d'une fonction complexe

Définition 2.1.2. On dit que la fonction $f(z)$ tend vers l quand $z \to z_0$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tel que,} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$.

<u>Illustrations (avec des exemples) seront présentées pendant la séance du cours.</u>

Propriétés 2.1.3.

1. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ existe alors la limite suivant tous les chemins existe et égale à l.

2. Si, suivant deux chemins différents, les limites sont différentes alors $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas. Par exemple, La limite $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas ; en effet, si $z = x + iy$, alors suivant le chemin $y = 0$, on a $z = x$ et donc
$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$
suivant le chemin $x = 0$,on a $z = iy$, et donc
$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{iy \to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{iy \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$
D'après (2.) la limite n'existe pas.
3. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a + ib$ alors $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Re(z) = a$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Im(z) = b$.
4. Soient f et g deux fonctions complexes telles que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ et $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = l_1$, existent, alors :
   a) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = l + l_1$.
   b) $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = l - l_1$.
   c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)g(z) = ll_1$.
   d) $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l}{l_1}$, avec $l_1 \neq 0$.

Illustrations (avec des exemples) seront présentées pendant la séance du cours.

2.1.3 Continuité d'une fonction complexe

Définition 2.1.4. Soit V un voisinage de z_0, on dit que la fonction f est continue en z_0 si :
$$\begin{cases} f(z_0) & \text{existe} \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) & \text{existe} \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0), & \end{cases}$$
c'est à dire,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 2.1.5. *Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ alors la fonction f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont continues en (x_0, y_0).*
On dit que la fonction f est continue sur un ouvert V si la fonction f est continue en tout point $z \in V$.

Exemple 2.1.6.

a) La fonction $f(z) = z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 - y^3)$ est continue sur $\mathbb{C}$.
b) Les fonctions polynômiales, $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, sont continues sur $\mathbb{C}$.

Théorème 2.1.7. *Si les fonctions f et g sont continues au point z_0 alors les fonctions $f+g$, $f-g$, , fg sont aussi continues au point z_0. De plus, Si $g(z_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue au point z_0.*

Théorème 2.1.8. *Si la fonctions f est continue au point z_0 et g est continue au point $v_0 = f(z_0)$ alors la fonction composée $w(z) = g(f(z)$ est continue au point z_0.*

2.1.4 Dérivée d'une fonction complexe

Définition 2.1.9. Soit V un voisinage de z_0 et f une fonction continue sur V, on dit que la fonction f est dérivable en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe.}$$

On note cette limite $f'(z_0)$. En utilisant le changement de variable $\Delta z = z - z_0$, on obtient aussi

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Exemples 2.1.10.

1) La fonction $f(z) = z^2$ est dérivable en tout point z de $\mathbb{C}$, puisque :

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = 2z.
\end{aligned}$$

Donc $f'(z) = (z^2)' = 2z$.

2) La fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas dérivable en tout point z de $\mathbb{C}$, puisque :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

n'existe pas (voir exemple précédent).

Proposition 2.1.11. *Soient f et g deux fonctions dérivables en un point z alors*

— $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
— $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
— $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$, *avec* $g(z) \neq 0$.
— $(z^n)' = nz^{n-1}$.

2.2 Fonctions Holomorphes

Définition 2.2.1. On dit qu'une fonction f est holomorphe sur un ouvert V si elle est dérivable en tout point de V.
On dit que f est holomorphe en z_0 si elle est dérivable sur un voisinage de z_0.

2.3 Conditions de Cauchy-Riemann

Théorème 2.3.1. *Soit $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ une fonction continue sur un voisinage V de $z_0 = (x_0, y_0)$ et dérivable en z_0. Alors, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$, et $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann suivantes*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & = \dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} & = -\dfrac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{cases}$$

On peut déterminer la dérivée $f'(z_0)$ par l'expression :

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}}$$

ou

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

Démonstrations et illustrations (séance du cours).

Exemple 2.3.2. Soit la fonction $f(z) = \overline{z} = x - iy$. On a

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} = -1,$$

donc $f(z) = \overline{z}$ n'est pas dérivable en z_0. Ce qui confirme l'exemple précédent.

En général, la réciproque du Théorème 2.3.1 n'est pas toujours vrai ; (Voir TD, série 1).
Les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ doivent être **continues** sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$ pour conclure que la fonction est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$.

2.3.1 Réciproque du théorème (Conditions de Cauchy-Riemann)

Théorème 2.3.3. *Soit une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ qui admet des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ et qui vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Alors Si les dérivées partielles sont* ***continues*** *sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$ alors la fonction f est holomorphe en z_0.*

Exemple 2.3.4. La fonction $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, f vérifie bien les conditions de Cauchy-Rimann : on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Et puisque les fonctions $(x, y) \mapsto e^x \cos(y)$ et $(x, y) \mapsto -e^x \sin(y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ alors on déduit que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$; en utilisant la réciproque.

2.4 Fonctions harmoniques

2.4.1 Définitions et résultats

Définition 2.4.1. Une fonction $u(x, y)$ est dite de classe C^2 si ses dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et mixtes $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)$ sont continues.

Définition 2.4.2. Une fonction $u(x, y)$ de classe C^2 est dite **Harmonique** si elle vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Proposition 2.4.3. *Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe. Si $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont de classe C^2 alors les deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont harmoniques. Si les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ sont de classe C^2 alors les dérivées partielles mixtes vérifient (Théorème de Schwartz) :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y), \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y).
\end{aligned}$$

La fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées et on a

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{2.2}$$

En dérivant (2.1) par rapport à x et (2.2) par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} ; \\
\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 0.$$

La fonction $u(x,y)$ est donc harmonique. De la même manière on démontre que la fonction $v(x,y)$ est harmonique.

Définition 2.4.4. Si deux fonctions harmoniques u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, alors u est appelée une fonction harmonique conjuguée de v et v est appelée une fonction harmonique conjuguée de u.

Conséquence 2.4.5. *Si u et v sont deux fonctions de classe C^2, harmoniques et conjuguées alors la fonction complexe définie par*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

est holomorphe.

Exemple 2.4.6.

Vérifier que la fonction $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ est harmonique sur $\mathbb{C}$ et déterminer une fonction harmonique v conjuguée de u.
On a

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y - 1,$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = -2,$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$.

Soit v une fonction conjuguée de u, alors les conditions de Cauchy-Riemann suivantes sont vérifiées,

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad (1)$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y + 1. \qquad (2)$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y on obtient

$$v(x,y) = 2xy + h(x) \qquad (3)$$

En dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), on obtient

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2y + h'(x) = 2y + 1$$

D'où

$$h'(x) = 1.$$

En intégrant par rapport à x, on a

$$h(x) = x + c\,; \qquad \text{où } c \in \mathbb{C} \text{ est une constante.}$$

Donc, les fonctions harmoniques définies par $v(x, y) = 2xy + x + c$ sont des fonctions conjuguées de u. Puisque les fonctions u et v sont continues alors les fonctions complexes correspondantes,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c), \qquad (c \in \mathbb{C})$$

sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, de plus, on a

$$f(z) = z^2 + iz + c, \qquad c \text{ est une constante de } \mathbb{C}.$$

2.4.2 Exemple et exercices

Exemple 2.4.7. La fonction $f(z) = Im(z^2)$ n'est pas holomorphe sur aucun domaine dans $\mathbb{C}$, car $f(z) = 2xy + i0$ ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann.

Exercices

Exercice 1

Déterminer les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ tels que les fonctions suivantes soient holomorphes.

(a) $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$.

(b) $f(z) = \arg(\pi z)$.

(c) $f(z) = \dfrac{i}{z^8}$.

Indications :

(a) La fonction $f(z) = e^{-x}(\cos(y) - i\sin(y))$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car les fonctions $u(x, y) = e^{-x}\cos(y)$ et $v(x, y) = -e^{-x}\sin(y)$ et leurs dérivées partielles sont continues et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann (à vérifier).

(b) La fonction $f(z) = \arg(\pi z)$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$ (à vérifier).

(c) La fonction $f(z) = \dfrac{i}{z^8} = iz^{-8}$, la dérivée $f'(z) = -8iz^{-9}$ existe pour tout $z \neq 0$, donc f est une fonction holomorphe $\forall z \neq 0$.

Exercice 2

Déterminer si les fonctions $u(x, y)$ suivantes sont harmoniques, si oui déterminer les fonctions conjuguées $v(x, y)$ correspondantes à $u(x, y)$ et la fonction complexe $f(z)$.

(a) $u(x, y) = xy\,;$

(b) $u(x, y) = \cos(x)\cosh(y)$.

Indications :

(a) La fonction $u(x, y) = xy$ est harmonique car $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$.

Une fonction v est conjuguée de u si

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = y; \quad (1)\\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -x. \quad (2)\end{aligned}$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y on obtient

$$v(x,y) = \frac{y^2}{2} + h(x).$$

En dérivant (1) par rapport à x et en remplaçant dans (2), on obtient

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = h'(x) = -x.$$

En intégrant par rapport à x, on a

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + c; \text{ avec } c \text{ est une constante de } \mathbb{C}.$$

Donc, les fonctions harmoniques $v(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c, c \in \mathbb{C}$, sont des fonctions conjuguées de $u(x,y) = xy$ et de plus

$$f(z) = xy + i(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c) = -i\frac{z^2}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{C}.$$

(b) La fonction $u(x,y) = \cos(x)\cosh(y)$ est harmonique car

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\cos(x)\cosh(y) + \cos(x)\cosh(y) = 0.$$

La fonction $v(x,y) = -\sin(x)\sinh(y) + c$ est une fonction conjuguée de $u(x,y)$ (à vérifier).

Exercice 3

Déterminer a tel que la fonction $u(x,y) = e^{3x}\cos(ay)$ soit harmonique.
Déterminer une fonction conjuguée de $u(x,y)$.

Indications :
Si $u(x,y) = e^{3x}\cos(ay)$ alors $\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos(ay)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9e^{3x}\cos(ay), \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a^2 e^{3x}\cos(ay) \text{ et donc}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (9-a^2)e^{3x}\cos(ay) = 0, \forall x, y \in R.$$

Donc $9 - a^2 = 0$, et $a = \pm 3$.
Pour $a = 3$ ou $a = -3$, La fonction $u(x,y) = e^{3x}\cos(ay) = e^{3x}\cos(3y)$ (car cos est une fonction paire) est harmonique et la fonction $v(x,y) = e^{3x}\sin(3y)$ est une fonction conjuguée de $u(x,y)$ (à vérifier).

3

Fonctions Complexes Usuelles

3.1 Fonction exponentielle complexe

3.1.1 Définition et propriétés

Définition 3.1.1. On définit la fonction exponentielle complexe qu'on note e^z par

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)), \quad \text{avec } z = x + iy.$$

Propriétés 3.1.2.

1. Si $z = x$ réel alors $e^z = e^x$ on retrouve la fonction exponentielle usuelle de $\mathbb{R}$.
2. La fonction e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$, sa dérivée

$$(e^z)' = e^z.$$

En effet, puisque les fonctions $u(x,y) = e^x\cos(y)$ partie réelle de e^z et $v(x,y) = e^x\sin(y))$ partie imaginaire de e^z sont continues sur $\mathbb{R}^2$, leurs dérivées partielles sont aussi continues et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann (voir l'exemple pendant le cours), la fonction e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (réciproque du théorème), de plus

$$(e^z)' = \frac{\partial e^x\cos(y)}{\partial x} + i\frac{\partial e^x\sin(y)}{\partial x} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^z.$$

3. On a

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors :

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos(y_1) + i\sin(y_1))e^{x_2}(\cos(y_2) + i\sin(y_2))$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1) + i\sin(y_1))(\cos(y_2) + i\sin(y_2)).$$

En développant, on obtient

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}.$$

Comme conséquence, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

On retrouve la formule d'Euler

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

Notez que, $z = re^{i\theta}$, où r est le module de z et θ est l'argument de z.

4. On a

$$\text{Si } z = x + iy \text{ alors } |e^z| = e^x \quad \text{et } \arg(z) = y \bmod 2\pi$$

5. La fonction e^z est périodique de période $2i\pi$, car

$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

3.1.2 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3 + 4i$.

Indications :

Si $z = x + iy$ alors

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = 3 + 4i. \tag{3.1}$$

Le module $|e^z| = e^x = |3 + 4i| = 5$. Donc $x = \ln(5) > 0$; en remplaçant dans (3.1), on obtient $5(\cos(y) + i\sin(y)) = 3 + 4i$, et donc $\cos(y) = \frac{3}{5} = 0.6$, $\sin(y) = \frac{4}{5} = 0.8$.

D'où $\tan(y) = \dfrac{4}{3}$; par conséquent $y = \arctan\frac{4}{3} = 0.927\,30$ car $x > 0$.

Donc l'ensemble des solutions est

$$\{z_k = \ln(5) + i(0.9273 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques complexes

3.2.1 Définitions

Soit $z = x + iy$, on définit les fonctions trigonométriques cosinus et sinus par

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, donc les fonctions $\cos(z)$ et $\sin(z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, comme somme de deux fonctions holomorphes. De plus,

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})' = \frac{1}{2}i(e^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin(z).$$

Donc

$$\cos'(z) = -\sin(z).$$

De même, on a

$$\sin'(z) = \cos(z)$$

On obtient aussi la formule d'Euler

$$\cos(z) + i\sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + i(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})) = e^{iz}.$$

3.2.2 Propriétés

$$\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y). \tag{3.2}$$

D'où

$$|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y). \tag{3.3}$$

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \tag{3.4}$$

D'où

$$|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y). \tag{3.5}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\
&= \frac{1}{2}e^{-y}(e^{ix}) + \frac{1}{2}e^{y}(e^{-ix}) \\
&= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos(x) + i\sin(x)) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos(x) - i\sin(x)) \\
&= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos(x) - \frac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y})\sin(x)).
\end{aligned}$$

En remplaçant, $\cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, $\sinh(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, on obtient (3.2).
En utilisant la relation $\cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y)$, on a

$$\begin{aligned}
|\cos(z)|^2 &= \cos^2(x)\cosh^2(y) + \sin^2(x)\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x)(1 + \sinh^2(y)) + \sin^2(x)\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x) + (\cos^2(x) + \sin^2(x))\sinh^2(y) \\
&= \cos^2(x) + \sinh^2(y).
\end{aligned}$$

D'où (3.3). De la même façon on prouve (3.4) et (3.5).

Remarque 3.2.1. Dans $\mathbb{C}$, les valeurs réelles des fonctions $\cos(z)$ et $\sin(z)$ ne sont pas comprises entre -1 et 1.

Exemple 3.2.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos(z) = 5$.

On a

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 5 \Leftrightarrow (e^{iz} + e^{-iz}) = 10.$$

En multipliant par e^{iz}, on obtient l'équation quadratique

$$(e^{iz})^2 - 10e^{iz} + 1 = 0$$

qui a pour solutions $e^{iz} = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

Si $z = x + iy$, on a

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}e^{ix} = 5 \pm 2\sqrt{6}, \tag{3.6}$$

donc $|e^{-y}e^{ix}| = |e^{-y}|\,|e^{ix}| = e^{-y} = \left|5 \pm 2\sqrt{6}\right| = 5 \pm 2\sqrt{6}$, car $5 \pm 2\sqrt{6} > 0$ et $|e^{ix}| = 1$.
De plus, en simplifiant dans (3.6) on trouve $e^{ix} = 1$; et par conséquent

$$y = -\ln(5+\sqrt{24}) \quad \text{ou} \quad y = -\ln(5-2\sqrt{6}).$$

Puisque $e^{-y} = \left|5 \pm 2\sqrt{6}\right| = 5 \pm 2\sqrt{6}$, et $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, car $e^{ix} = 1$. On obtient l'ensemble des solutions ci-dessous

$$\{z_k = 2k\pi \pm i\ln(5+2\sqrt{6}),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit aussi les fonctions suivantes

La fonction tangente	$\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$
la fonction cotangente	$\cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$
la fonction cosinus hyperbolique	$\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$
la fonction cosinus hyperbolique	$\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

On a aussi les égalités suivantes (séance du cours)

$$\cosh(iz) = \cos(z);$$

$$\sinh(iz) = i\sin(z);$$

$$\cos(iz) = \cosh(z)$$

$$\sin(iz) = i\sinh(z).$$

3.3 Fonctions Logarithmiques complexes

On voudrait définir une fonction complexe $\ln(z)$ comme une fonction inverse de e^z telle que si $z = x + iy$ alors $e^{\ln(z)} = z$. La fonction e^z est toujours différent de 0, par conséquent, la fonction $\ln(z)$ est définie si $z \neq 0$.

Si on pose $\ln(z) = u + iv$, et $z = re^{i\theta}$ alors

$$e^{\ln(z)} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta},$$

donc $e^u = r$, c'est à dire $u = \ln(r)$, et $v = \theta \mod 2\pi$.

3.3.1 Définition

On définit alors la fonction logarithme complexe, notée $\mathrm{Ln}(z)$, par

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(r) + i\theta, \quad \text{avec } z = re^{i\theta} \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta \in (-\pi, \pi];$$

c'est à dire

$$\boxed{\mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + i\arg(z).}$$

Notez que

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i\arg(z) + i2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$\mathrm{Ln}(z)$ est dite la détermination principale de $\ln(z)$.

Si $z = x$ un nombre réel, $x > 0$, $\arg(z) = 0$ alors $\mathrm{Ln}(z) = \ln(x)$ la fonction logarithme réelle.

Si $z = x < 0$ alors $\mathrm{Ln}(z) = \ln(|x|)+i\pi$. En plus, l'argument des nombres complexes z proches de x avec $\arg(z) < 0$ vont tendre vers $-\pi$. Par contre, l'argument des nombres complexes z proches de x avec $\arg(z) > 0$ vont tendre vers π. Par conséquent, la fonction $z \mapsto \arg(z)$ n'est pas continue en aucun point de la demi-droite $(-\infty, 0]$.

Conséquence 3.3.1. *La fonction logarithme est continue pour tout z différent d'un nombre réel négatif ou nul ($\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$). Ainsi, On peut déterminer les valeurs de* $\mathrm{Ln}(z)$ *pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ par la formule suivante*

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + 2i\arctan\left(\frac{y}{x + |z|}\right).$$

Preuve.

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, on écrit $z = re^{i\theta}$ donc il est clair que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$; cette dernière est équivalente à $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Puisque

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + 1},$$

alors on multiple et on divise par r on trouve

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta) + r} = \frac{y}{x + |z|}.$$

Or la fonction tan est inversible sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ alors

$$\arg(z) = \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x + |z|}\right).$$

Exemple 3.3.2.

$$\mathrm{Ln}(-3 + 4i) = \ln(5) + 2i\arctan\left(\frac{4}{-3 + 5}\right) = \ln(5) + 2i\arctan(2),$$

et d'une autre part, $\mathrm{Ln}(-3 + 4i) = \ln(5) + i\left(\pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$. Donc on déduit que

$$2\arctan(2) = \pi - \arctan\left(\frac{4}{3}\right).$$

3.3.2 Propriétés

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, On a :

1. $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$.

2. $\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$.

3. La fonction $\ln(z)$ est holomorphe pour tout z différent d'un nombre réel négatif ou nul ;

$$\boxed{\ln'(z) = \frac{1}{z}, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0].}$$

Démonstration (Séance du cours).

4. Soient $z = x + iy \neq 0$ et $c \in \mathbb{C}$. On définit les puissances de z par

$$z^c = e^{c\ \ln(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]\,;$$

ainsi la détermination principale de la fonction $z \mapsto z^c$ est donnée par

$$z^c = e^{c\mathrm{Ln}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]\,.$$

Exemple 3.3.3. Si $c = \frac{1}{n}$, on a

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{\ln(z)}{n}}.$$

On définit l'exponentielle de base $a \in \mathbb{C}^*$ par

$$a^z = e^{z\ln(a)}.$$

Les fonctions trigonométriques inverses sont définies par

$$\begin{array}{lcl}
Arc\cos(z) & = & -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \\
Arc\sin(z) & = & -i\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}). \\
Arc\cosh(z) & = & \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \\
Arc\sinh(z) & = & \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}). \\
Arc\tan(z) & = & \dfrac{i}{2}\ln\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right).
\end{array}$$

Démonstration (séances du cours).

3.3.3 Exemples

Calculer comme un nombre complexe $a + ib$:

(1) $\sin(1 + i) = \sin(1)\cosh(1) + i\cos(1)\sinh(1)$

([2)] $\cosh(-2 + 3i) = \cosh(i(2i + 3)) = \cos(3 + 2i)$
$= \cos(3)\cosh(2) - i\sinh(2)\sin(3)$
$= -3.724\,5 - i0.511\,82$

On peut aussi calculer en utilisant l'égalité suivante (à vérifier !)

$$\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$$

(3) $\sinh(4 - 3i)$, on peut utiliser la relation $\sinh(iz) = i\sin(z)$; ou l'égalité suivante

$$\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$$

On obtient : $\sinh(4-3i) = \sinh(4)\cos(-3) + i\cosh(4)\sin(-3)$
$= -27.017 - i3.8537$

(4) $\ln(-6) = \ln(6) + i\pi + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(5) $\ln(4+3i) = \ln(\left[5, \arctan(\frac{3}{4})\right]) = \ln(5) + i(\arctan(\frac{3}{4}) + 2k\pi)$

On a aussi les égalités suivantes pour tous nombres complexes z_1 et z_2

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(1) $\cosh(z) = -1$:

On a $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) - i\sinh(x)\sin(y) = -1$

$$\begin{cases} \cosh(x)\cos(y) = -1 & (1) \\ \sinh(x)\sin(y) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), on a $x = 0$ ou $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Si $y = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ de (1), on obtient, $\cosh(x) = -1$ impossible car $\cosh(x) > 0$.
Si $y = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$, de (1), on a $\cosh(x) = 1$ et donc $x = 0$.
Donc l'ensemble solution est donnée par : $z = i(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Autre méthode :

$$\cosh(z) = -1 \Rightarrow z = Arc\cosh(-1) = -i\ln(-1) = -i(2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\ln(z) = e - \pi i$:

si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, on a

$$\ln(z) = \ln(r) + i(\theta + 2k\pi) = e - \pi i \text{ et donc } \ln(r) = e \text{ et } \theta = -\pi + 2k\pi.$$

Donc $r = e^e$, $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -e^e$.

Autre méthode :

$$\ln(z) = e - \pi i \Rightarrow z = e^{e-\pi i} = e^e e^{-i\pi} = -e^e.$$

4

Intégration Complexe

4.1 Définitions et propriétés

4.1.1 Définition

La représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

La courbe (chemin) C est continue si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues et la courbe (chemin) C est de classe C^1 (lisse) si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a, b] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , c-à-d les dérivées $x'(t), y'(t)$ sont continues.
Une courbe peut être représentée dans $\mathbb{R}^2$ par l'équation paramétique

$$(x(t), y(t)),\ a \leq t \leq b.$$

Si la courbe C est lisse, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe au point $(x(t), y(t))$.

Exemple 4.1.1. La courbe représentée par le graphe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ a pour représentation paramétrique $(t, f(t)), a \leq t \leq b$. Si C est lisse, le vecteur tangent est donné par $(1, f'(t))$.

Par exemple, le chemin $y = x^2$, $t \in [0, 2]$ a pour vecteur tangent $(1, 2t)$.

Illustration

Exemple 4.1.2. Le cercle trigonométrique C d'équation $x^2+y^2 = 1$ est représenté par l'équation parmétrique $(\cos(t), \sin(t))$, pour $t \in [0, 2\pi]$. Le vecteur tangent est donnée par $(-\sin(t), \cos(t))$.

Illustration

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, le cercle est représenté par : $z(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4.2 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

On considère *un champ de vecteurs*

$$F(x, y) = (M(x, y), N(x, y)) = M(x, y)i + N(x, y)j,$$

où $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$; $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont deux fonctions numériques continues dans une boule ouverte.

Le travail w associé à un déplacement d'un point A à un point B d'une force constante F est déterminé par le porduit scalaire de la force F par le vecteur $\overrightarrow{AB}$,

$$w = \left\langle F, \overrightarrow{AB} \right\rangle.$$

Soit maintenant C une courbe déterminée par une représentation paramétrique de la forme

$$r(t) = (x(t), y(t)), \;\; a \leq t \leq b.$$

Si C est une courbe lisse, par exemple les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de classe C^1, et $F(x, y)$ une force variable. On voudrait calculer le travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$. Le long de cette courbe, la force F est déterminée par le champ de vecteurs

$$F(x(t), y(t)) = M(x(t), y(t))i + N(x(t), y(t))j, \qquad a \leq t \leq b.$$

On considère alors une partition (subdivision) de l'intervalle $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Soient $P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ et $P_i(x(t_i), y(t_i))$ deux points de la courbe C, et le vecteur

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x(t_i) - x(t_{i-1}))i + (y(t_i) - y(t_{i-1}))j \qquad (1).$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont de classe C^1. Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe deux nombres c_i, d_i dans $]a, b[$ tels que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \text{ et } \; y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)(t_i - t_{i-1}).$$

En remplaçant dans (1), on obtient

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1}).$$

Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, on considère alors le vecteur constant

$$F_i = M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j;$$

comme une approximation de la force $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i. On obtient alors une approximation du travail de la force $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i, par la formule

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= \langle M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j, (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1}) \rangle \\ &= M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1})$$

est une approximation du travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$. On remarque alors que la somme S_n est une somme de Riemann de la fonction intégrable

$$h(t) = \langle F(x(t), y(t)), r'(t)\rangle = M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t).$$

Quand $n \to \infty$; on obtient l'expression

$$W = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

On définit alors l'intégrale curviligne de la composante tangentielle.

Définition 4.2.1.

Soit C une courbe définie par l'équation paramétrique $r(t) = (x(t), y(t))$, pour $a \leq t \leq b$. Les fonctions dérivées $x\prime(t)$, $y\prime(t)$ sont continues. On définit l'intégrale curviligne de la composante tangentielle $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ d'un champ de vecteurs $F(x, y)$ continu le long de la courbe C par l'expression

$$\begin{array}{rcl} \int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy & = & \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt \\ & = & \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t)\rangle\, dt. \end{array}$$

$\langle F(r(t)), r'(t)\rangle$ ou $F(r(t)).r'(t)$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.2.2.

Un objet se déplace le long de la parabole (t, t^2) du point $A(-1, 1)$ au point $B(2, 4)$. Déterminer le travail de la force $F(x, y) = (x^2 + y^2)i + 3x^2yj$, le long de la courbe C. L'équation paramétrique de la courbe est donnée par $r(t) = (t, t^2)$. Au point A, on a $t = -1, t^2 = 1$, et au point B, on a $t = 2$, $t^2 = 4$, donc $-1 \leq t \leq 2$. On obtient alors

$$\begin{array}{rcl} W & = & \int_{-1}^2 \langle F(t,t^2), (x'(t), y'(t)\rangle\, dt \\ & = & \int_{-1}^2 ((t^2 + t^4) \times 1 + (3t^2t^2) \times 2t)dt \\ & = & \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5)dt. \\ & = & \left[\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} + t^6\right]_{-1}^2 = \dfrac{363}{5}. \end{array}$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

où $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les fonctions $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$ sont des fonctions numériques continnues sur une boule ouverte de $\mathbb{R}^3$. La courbe C est déterminée par l'équation paramétrique

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad a \leq t \leq b.$$

les fonctions $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ sont des fonctions de classe C^1.
Alors, on définit de la même façon, l'intégrale cuviligne de la composante tangentielle $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ du champ continu de vecteurs $F(x, y, z)$ le long de la courbe C par

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^b \langle F(r(t), r'(t)\rangle\, dt &= \textstyle\int_C (M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) \\
&= \textstyle\int_a^b (M(x(t),y(t),z(t))x'(t) + N(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\
&+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.
\end{aligned}$$

$\langle F(r(t), r'(t)\rangle$ ou $F(r(t) \cdot r'(t)$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4.2.3.

Si on considère la courbe C, $r(t) = (t,\, t^2,\, t^3)$, $\quad 0 \le t \le 1$, et le champ de vecteurs $F(x,y,z) = (e^x, xe^z, x\sin(\pi y^2)$ alors on a l'intégrale curviligne

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \textstyle\int_0^1 (e^t + te^{t^3}(2t) + t\sin(\pi t^4)(3t^2))dt \\
&= \left[e^t + \frac{2}{3}e^{t^3} - \frac{3}{4\pi}\cos(\pi t^4)\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{3}e - \frac{5}{3} + \frac{3}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Proposition 4.2.4. *Si la courbe est définie par des morceaux d'arcs lisses $C_1, C_2, \cdots, C_n$ alors*

$$\int_C F.dr = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F.dr$$

Exemple 4.2.5.

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$$

le long de la courbe C définie par : le segment C_1 qui relie les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ et l'arc C_2 du premier quadrant du cercle $x^2 + y^2 = 1$ orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'équation de la droite qui passe par les points $(-3,-2)$ et $(1,0)$ est donnée par $x = 1 + 2y$, donc on peut représenter le segment C_1 par $r(t) = (1+2t, t)$, $-2 \le t \le 0$. Aussi, La courbe C_2 est représentée par $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ pour $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Illustration

Calculons l'intégrale curviligne le long du segment C_1.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \textstyle\int_{-2}^0 (4(1+2t)(t)(2) + (2(1+t)^2 - 3(1+2t)(t)(1))dt \\
&= \textstyle\int_{-2}^0 (18t^2 + 13t + 2)dt = 26.
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale curviligne le long de l'arc C_2.

$$\begin{array}{rl} & \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4(\cos(t))\sin(t)(-\sin(t)) + (2(\cos^2(t) - 3(\cos(t)\sin(t)(\cos(t)))dt \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos^3(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-4(\cos(t))\sin^2(t) + 2\cos(t)(1-\sin^2(t)) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos(t) - 6(\cos(t))\sin^2(t) - 3\cos^2(t)\sin(t))dt = -1. \end{array}$$

D'après la proposition 4.2.4, on a

$$\begin{array}{rcl} \int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy & = & \int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy + \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy \\ & = & 26 - 1 = 25. \end{array}$$

4.3 Indépendance d'intégrale curviligne par rapport au chemin

Théorème 4.3.1. *Soit F un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel $f, \nabla f = F$, dans une boule ouverte U. Alors la valeur de l'intégrale curviligne $\int_C \langle F, dr\rangle$ est la même pour toutes les courbes lisses C dans U reliant deux points A et B et on a*

$$\int_C \langle F, dr\rangle = f(B) - f(A).$$

Remarque 4.3.2. F un champ de vecteur dérive d'un potentiel f,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

Si $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de classe C^1, alors F dérive d'un potentiel f si

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$
$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Esquisse de la démonstration dans $\mathbb{R}^2$.

Soient $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ un champ de vecteur et $f(x,y)$ un champ scalaire tel que

$$\nabla f(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

Soit C est une courbe lisse qui relie le point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$ déterminée par la paramétrisation $r(t) = (x(t), y(t))$. Si on considère la fonction $g(t) = f(x(t), y(t))$, alors en utilisant la règle de chaîne, on obtient

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = M(x,y)\frac{dx}{dt} + N(x,y)\frac{dy}{dt} = g'(t).$$

Donc

$$df(x(t), y(t)) = \left(M(x,y)\frac{dx}{dt} + N(x,y)\frac{dy}{dt}\right) dt = g'(t)dt.$$

D'où

$$df(x(t),y(t)) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = dg = g\prime(t)dt.$$

Par conséquent

$$\begin{array}{rcl}\int_C (M(x,y)dx + N(x,y)dy) & = & \int_a^b g\prime(t)dt = g(b) - g(a) \\ & = & f(x(b),y(b)) - f(x(a),y(a)) \\ & = & f(B) - f(A).\end{array}$$

Exemple 4.3.3. Calculer

$$\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy,$$

où C est une courbe lisse reliant les deux points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Le champ de vecteurs $(y^2 + 2x + 4)i+ (2xy + 4y - 5)j$ dérive du potentiel

$$f(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y \qquad \text{(à vérifier !)}$$

Donc, $\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy = f(1,1) - f(0,0) = 8 - 5 = 3.$ Vérifier ce résultat en utilisant la courbe $y = x$.

Exemple 4.3.4.

Calculer

$$\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy,$$

où C est une courbe lisse déterminée par $r(t) = \pi\cos(t)i + \pi\sin(t)j$, pour $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

La courbe C relie les deux points $r(0) = (\pi, 0)$ et $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0,\pi)$, le champ de vecteurs $(e^{-y} - 2x)i - (xe^{-y} + \sin(y))j$ dérive du potentiel,

$$f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) \qquad \text{(à vérifier !)}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl}\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy & = & f(0,\pi) - f(\pi,0) \\ & = & \cos(\pi) - (\pi - \pi^2 + 1) = \pi^2 - \pi - 2.\end{array}$$

Exemple 4.3.5. Soit

$$F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y)),$$

déterminer $f(x,y)$ tel que

$$\nabla f(x,y) = F(x,y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y \tag{4.1}$$

On a

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

donc F dérive d'un potentiel f. L'égalité (4.1) implique

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = e^{-y} - 2x. \tag{4.2}$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} - \sin(y). \tag{4.3}$$

En intégrant l'équation (4.1), on obtient

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (e^{-y} - 2x)dx = xe^{-y} - x^2 + h(y);$$

h est une fonction qui ne dépend que de la variable y. En dérivant par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -xe^{-y} + h'(y) = -xe^{-y} - \sin(y) \Rightarrow h'(y) = -\sin(y) \Rightarrow \; h(y) = \cos(y) + c.$$

Par conséquent

$$f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) + c.$$

Considérons maintenant trois fonctions M, N, et R de trois variables x, y et z telles que

$$\overrightarrow{grad}(f) = \nabla f(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Donc, on a

$$\frac{\partial \; f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z), \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \; f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \; f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z). \tag{4.6}$$

Si la fonction f est de classe C^2, de (4.4), (4.5) et (4.6) , on a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \; f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \;,$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial^2 \; f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} \;,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 \; f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Par conséquent $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z))$ dérive d'un potentiel f si

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},}$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},}$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}.}$$

Exemple 4.3.6.

Soit

$$F(x, y, z) = (e^x \sin(z) + 2yz, 2xz + 2y, e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2),$$

déterminer $f(x, y, z)$ tel que

$$\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z). \tag{4.7}$$

L'égalité (4.7) implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= M(x, y, z), \quad (2) \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= N(x, y, z), \quad (3) \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= R(x, y, z). \quad (4) \end{aligned}$$

En intégrant l'équation (2), on obtient

$$f(x, y, z) = \int M(x, y)dx = e^x \sin(z) + 2yzx + h(y, z);$$

h est une fonction qui ne dépend que des variables y et z. En dérivant par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} && = 2zx + \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 2xz + 2y \\ \Rightarrow\ & \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} && = 2y \\ \Rightarrow\ & h(y, z) && = y^2 + g(z). \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à z, on obtient

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial z} = e^x \cos(z) + 2xy + g'(z) = R(x, y, z)$$

ce qui implique

$$g'(z) = 3z^2 \quad \text{et donc } g(z) = z^3 + c.$$

Et par conséquent

$$f(x, y, z) = e^x \sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c, \qquad c \in \mathbb{C}$$

Exemple 4.3.7.

Calculer

$$\int_C (e^x \sin(z) + 2yz)dx + (\ 2xz + 2y)dy + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)dz,$$

où C est une courbe lisse reliant les points $(0, 0, 0)$ au point $(1, -2, \pi)$.

Le champ de vecteurs $(e^x \sin(z) + 2yz)i + (\ 2xz + 2y)j + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)k$ dérive du potentiel $f(x, y, z) = e^x \sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c$. Donc

$$\begin{aligned} & \int_C (e^x \sin(z) + 2yz)dx + (2xz + 2y)dy + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)dz \\ = \ & f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) \\ = \ & \pi^3 - 4\pi + 4. \end{aligned}$$

4.4 Intégrale curviligne complexe

4.4.1 Définition

Soit C une courbe (chemin) dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et soit $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ une fonction complexe. L'intégrale curviligne de f sur C, est notée $\int_C f(z)dz$.

Si la représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

alors

$$dz = dx + idy.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \\
&= \int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy) \\
&= \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C (v(x, y)dx + u(x, y)dy.
\end{aligned}$$

Notez que $\int_C (u(x, y)dx - v(x, y)dy; \int_C (v(x, y)dx + u(x, y)dy)$ sont des intégrales curvilignes dans $\mathbb{R}^2$. On obtient alors

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_C (v(x, y)dx + u(x, y)dy).$$

Si la fonction complexe $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ est holomorphe alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \qquad (2)$$

Par conséquent les champs de vecteurs $(u(x, y), -v(x, y)), (v(x, y), u(x, y))$ dérivent d'un potentiel ; on obtient le théorème suivant

Théorème 4.4.1. *Si la fonction $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine connexe D. Alors, pour tout chemin lisse C dans D joignant deux points z_1, z_2, on a*

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)},$$

la fonction complexe $F(z)$ est holomorphe telle que $F'(z) = f(z)$.

Remarque 4.4.2.

1. Le théorème 4.4.1 généralise le théorème fondamental de calcul intégrale,

   $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \; F'(x) = f(x),$$

   où le domaine est un intervalle $[a, b]$.
2. Dans le cas complexe, le domaine est connexe, c'est à dire, ne soit pas une réunion de deux ouverts disjoints.

Exemple 4.4.3.

1. $\int_0^{1+i} z^2dz = \left[\dfrac{z^3}{3}\right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^2 = -\dfrac{2}{3} + i\dfrac{2}{3}$.
2. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos(z)dz = [\sin(z)]_{-\pi i}^{\pi i} = 2\sin(i\pi) = 2i\sinh(\pi)$.
3. $\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{\frac{z}{2}}dz = [2e^{\frac{z}{2}}]_{8+\pi i}^{8+3\pi i} = 2(e^{4-\frac{3\pi i}{2}} - e^{4+\frac{\pi i}{2}}) = 0$ (pourquoi ?).

Théorème 4.4.4. *Soit C une courbe lisse d'équation paramétrique*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Si f est une fonction continue sur C. Alors

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_a^b f(z(t))z'(t)dt & = & \int_C (u(x,y)+iv(x,y))(x'(t)+iy'(t))dt \\ & = & \int_C (u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy) \\ & = & \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy) \\ & = & \int_C f(z)dz.\end{array}$$

Remarque 4.4.5. Si la fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe , on utilise le théorème 4.4.4.

Exemple 4.4.6.

1. Calculer $\int_C \dfrac{dz}{z}$, avec C est le cercle trigonométrique $x^2+y^2=1$.
   $C : z(t) = \cos(t) + i\sin(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi,\ z'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = ie^{it}$
   $f(z) = \frac{1}{z(t)} = e^{-it}$,
   $$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-it}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = i2\pi.$$
2. Calculer $\int_C Re(z)dz$, $C := C_1 \cup C_2$,
   C_1 : Le segment reliant les points 0 et 1,
   C_2 : Le segment reliant les points 1et $1+2i$.
   La représentation paramétrique de C_1 :
   $$z(t) = t,\ \ z'(t) = 1,\ \ Re(z) = x(t) = t, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$
   La représentation paramétrique de C_2 :
   $$z(t) = 1+it,\ \ z'(t) = i,\ \ Re(z) = x(t) = 1, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$
   Donc
   $$\begin{array}{rcl}\int_C Re(z)dz & = & \int_{C_1} Re(z)dz + \int_{C_2} Re(z)dz \\ & = & \int_0^1 tdt + \int_0^2 idt \\ & = & \dfrac{1}{2} + 2i.\end{array}$$

4.4.2 Exercice

Démontrer que

$$\int_C (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si} \quad m=-1 \\ 0 & \text{si} \quad m \neq -1, \ m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

où C est le cercle de centre z_0 et de rayon r.

4.4.3 Définitions

C est un chemin reliant deux points A et B est fermé si $A = B$.
C est chemin simple s'il ne contient pas de points doubles, triples, etc....
Si C est fermé, on note

$$\oint_C f(z)dz.$$

Illustrations

4.5 Théorème d'intégrale de Cauchy

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine connexe D et C est une courbe simple et fermée dans D, alors

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Exemples 4.5.1.

1. Soit C n'importe quel chemin simple fermé, donc

$$\int_C \cos(z)dz = 0, \quad \oint_C e^z dz = 0, \quad \oint_C z^n dz = 0; \quad n = 1, 2, \cdots .$$

2. C est le cercle trigonométrique, C est une courbe simple fermée,

$$\oint_C \overline{z}dz = \int_0^{2\pi} idt = i2\pi;$$

La fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe en 0 contenu dans le disque D.

Remarque 4.5.2. Notez que l'intégrale $\oint_C f(z)dz$ peut être égale à 0, même si la fonction n'est pas holomorphe sur D.

Exemple 4.5.3. $\oint_C \frac{1}{z^2}dz = 0$, où C est un cercle de centre 0 même si la fonction $\frac{1}{z^2}$ n'est pas holomorphe sur le disque D de centre 0.

4.6 Indépendance du chemin

Théorème 4.6.1. *Soient z_1 et z_2 dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Si $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D connexe, alors l'intégrale ne dépend pas du chemin simple rejoignant z_1 à z_2.*

Si C_1 et C_2 sont deux chemins simples et différents rejoignant z_1 à z_2, alors

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

Démonstration. soit C_1 un chemin simple rejoignant z_1 à z_2 et $-C_2$ un chemin inverse de C_2 (simple rejoignant z_2 à z_1). Donc on a

$$\int_{C_2} f(z)dz = -\int_{-C_2} f(z)dz.$$

Si C_1 et C_2 ont seulement z_1 et z_2 en commun, alors $C_1 \cup -C_2$ est une courbe simple fermée, d'après le théorème 4.6.1, on a

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{C_1\cup(-C_2)} f(z)dz = 0 \iff & \textstyle\int_{C_2} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0 \\ \iff & \textstyle\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{-C_2} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz. \end{aligned}$$

Si C_1 et C_2 ont plusieurs points d'intersection commun, on peut utiliser des subdivisions.

4.6.1 Illustrations, Exercices et commentaires

1. Calculer $\displaystyle\int_C e^{2z}dz$; avec C le segment joignant les points πi à $2\pi i$.
2. Calculer $\displaystyle\int_C (z+\frac{1}{z})dz$; où C est le cercle unité orienté positivement.
3. Calculer $\displaystyle\int_C \frac{1}{\cos^2(z)}dz; C$ le segment joignant les points $\dfrac{\pi}{4}$ à $\dfrac{\pi}{4}i$.
4. Calculer $\displaystyle\int_C ze^{\frac{z^2}{2}}dz; C$ le segment joignant les points i à 1.

4.7 Formule d'intégrale de Cauchy

Théorème 4.7.1. *Soit la fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine simplement connexe D, pour tout z_0 dans D et toute courbe fermée entourant z_0 on a*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

La courbe C est orientée positivement (dans ce cas, le sens contraire de la montre). C'est à dire,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Esquisse de la démonstration.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_C \frac{dz}{z-z_0} + \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz.$$
$$\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi,\ \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0 \text{ (à vérifier)}$$

Exemples 4.7.2.

1. $\oint_C \frac{e^z dz}{z-2} = 2\pi i e^2, C$ n'importe quelle courbe fermée entourant $z=2$.
2. $\oint_C \frac{z^3-6dz}{2z-i} = \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3-6dz}{z-\frac{i}{2}} = \left[\frac{1}{2}z^3-6\right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\pi}{8}-6\pi i,$

   C n'importe quelle courbe fermée entourant $z=\frac{i}{2}$, orientée positivement.
3. Calculer $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$ sur $C : |z-1| = \frac{1}{2}$ orientée positivement.

   On a $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}dz = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{(z+1)}}{(z-1)}dz.$

   -1 n'appartient pas à D ; donc la fonction $\frac{z^2+1}{(z+1)}$ est holomorphe sur D. De plus C entoure 1 et on a

   $$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \left[\frac{z^2+1}{(z+1)}\right]_{z=1} = 2\pi i.$$

4.7.1 Exercice

1. Calculer $\oint_C \frac{z^2-4}{z^2+4}dz; |z-1| = 2$ orientée positivement.
2. Calculer $\oint_C \frac{e^{3z}}{3z-i}dz; |z| = 1$ orientée positivement.
3. Calculer $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}; |z+1| = 1$ orientée positivement.
4. Calculer $\oint_C \frac{\ln(z+1)}{z^2+1}dz; |z+2i| = 2$ orientée positivement.
5. Calculer $\oint_C \frac{\sin(z)dz}{z^2-2iz}; |z| = 3$ orientée sens contraire de la montre et $|z| = 1$ orientée dans le même sens que la montre.

4.8 Formule des Dérivées de Cauchy

Théorème 4.8.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D alors*

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz}$$

$$\boxed{f"(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz}$$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.}$$

La courbe C est orientée positivement.

Exemples 4.8.2. 1. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\cos(z)dz}{(z - i\pi)^2} = [2\pi i \cos'(z)]_{z=i\pi} = -2\pi i \sin(\pi i) = 2\pi \sinh(\pi)$,

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = \pi i$. (C orientée positivement).

2. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3} dz = \Big[\pi i(z^4 - 3z^2 + 6)"\Big]_{z=i} = \Big[\pi i(12z^2 - 6)\Big]_{z=i} = -18\pi i.$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = i$. (C orientée positivement).

3. $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^z}{(z - 1)^2(z^2 + 4)} dz = \left[2\pi i(\frac{e^z}{(z^2 + 4)})'\right]_{z=1} = \left[2\pi i(\frac{e^z(z^2 + 4) - e^z 2z}{(z^2 + 4)^2})\right]_{z=1} = \frac{6e\pi}{25} i.$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = 1, \pm 2i$ à l'extérieur du domaine. (C orientée positivement).

Exercice

Calculer $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\sin(4z)}{(z - 4)^3} dz$; $|z| = 5$ orientée positivement et $|z - 3| = \frac{3}{2}$ orientée négativement.

5

Séries Numériques

5.1 Suites réelles (Quelques rappels)

5.1.1 Définitions et exemples

— Une suite numérique réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qu'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots$. u_n est appelé le n^{ieme} terme de la suite (u_n).
Exemple 5.1.1. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite infinie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$

— Une suite numérique (u_n) converge vers l si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$
On note $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.
Exemple 5.1.2.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2+1} = \frac{1}{3}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

— Si une suite (u_n) ne converge pas, on dit que la suite (u_n) est divergente.
— Une suite (u_n) est dite majorée s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A$: A est appelé un majorant de la suite (u_n).
— Une suite (u_n) est dite minorée s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq B$: B est appelé un minorant de la suite (u_n).
— Une suite numérique (u_n) est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.
$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists A, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A.$$

5.1.2 Propositions

— Toute suite convergente est bornée.
Exemple 5.1.3. La suite géométrique (r^n) converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$. Si $|r| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ et si $r = 1$, la suite est stationnaire.
— Une suite (u_n) est dite croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
— Une suite (u_n) est dite décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
— Une suite (u_n) est dite strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

— Une suite (u_n) est dite strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
— Une suite (u_n) est dite monotone si et seulement si (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

Théorème 5.1.4. *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente. Et, toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*

Exemple 5.1.5. La suite du terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est croissante et est majorée par 1 qui est la borne supérieure ; donc (u_n) converge vers 1.

Toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$ et toute suite réelle décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

5.2 Séries numériques réelles

5.2.1 Définitions et propriétés

Définition 5.2.1. Soit (u_n) une suite numérique réelle infinie, la somme infinie

$$u_0 + u_1 + u_3 + \cdots$$

est appelée série numérique de terme générale u_n qu'on note $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

La suite définie par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

est appelée la n^{ième} somme partielle de la série.

Définition 5.2.2. La série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Exemples 5.2.3.

1) La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est appelée série géométrique, avec $a \neq 0$.
La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente si et seulement si $|r| < 1$. De plus, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

On a $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n$. Si $r = 1$, alors $S_n = (n+1)a$ diverge. Si $r \neq 1$,

$$\begin{aligned} & S_n - rS_n && = (a + ar + ar^2 + ... + ar^n) - (ar + ar + ar^2 + ... + ar^{n+1}) \\ \Leftrightarrow\ & (1-r)S_n && = a - ar^{n+1} \\ \Leftrightarrow\ & S_n && = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite S_n diverge si $|r| \geq 1$ et converge vers $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\frac{1}{3})^n$ converge vers $\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = 3$.

2) Si $|x| < 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Si $|x| \geq 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

3) La série télescopique $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i(i+1)}$ est convergente.

On remarque que $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{(i+1)}$, pour tout $i = 1, 2, 3, \cdots$

Donc, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n)} + \frac{1}{n(n+1)}$

$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$.

Par conséquent, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Théorème 5.2.4. *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *convergent alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} cu_n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Théorème 5.2.5. *Si* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *converge alors* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

On a $S_n - S_{n-1} = u_n$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, et donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

La réciproque est fausse!!

Exemple 5.2.6. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge même si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

En effet, $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Donc $S_n \geq \sqrt{n} \to \infty$, quand $n \to \infty$, par conséquent $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La contraposée du théorème est aussi utilisée :

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Exemple 5.2.7. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + 5n}$ diverge car $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\frac{n^4}{3n^4 + 5n}) = \frac{1}{3} \neq 0$.

5.2.2 Séries à termes positifs et tests de convergence

Définition 5.2.8. Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est appelée série à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Proposition 5.2.9. *Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement si la suite numérique $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est majorée.*

En effet,
$\Rightarrow$) évident.
$\Leftarrow$) La suite S_n est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ et majorée donc converge.

Théorème 5.2.10 (Test d'intégrale)**.** *Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur l'intevalle $[1, \infty[$, et $u_n = f(n)$. Alors*

$$\boxed{\textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \textit{ est convergente} \Longleftrightarrow \textit{L'intégrale impropre } \int_1^{\infty} f(x)dx \textit{ est convergente}}$$

On peut remplacer l'intervalle $[1, \infty[$ par $[n_0, \infty[$.

Exemple 5.2.11.

1. La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ est divergente car la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue, décroissante et positive. De plus
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty} [\ln(x) - \ln(1)] = +\infty.$$
2. Pour $p > 0, p \neq 1, \int_1^{\infty} \dfrac{dt}{t^p} = \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^x = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p}$ converge si $1 - p < 0$ et diverge si $1 - p > 0$.
La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ est continue, décroissante et positive. Si $p > 0$, On obtient le résultat suivant
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1 \text{ et diverge si } 0 < p \leq 1}$$

Exemple 5.2.12. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$.
La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge car $0 < \frac{1}{2} \leq 1$.

Théorème 5.2.13 (Test de comparaison)**.** *Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ (à partir d'un certain rang n_0). Alors*

$$\boxed{\textit{a) La série } \sum_{n=0}^{\infty} v_n \textit{ est convergente} \Rightarrow \textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \textit{ est convergente}}$$

$$\boxed{\textit{b) La série } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \textit{ est divergente} \Rightarrow \textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} v_n \textit{ est divergente}}$$

Exemple 5.2.14. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2-3}$ est divergente car $\dfrac{n}{2n^2-3} \geq \dfrac{1}{2n} \geq 0$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 5.2.15 (Test de comparaison limite)**.** *Si $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$, et*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}_+^*;$$

alors

$$\boxed{\textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} v_n \textit{ est convergente} \Leftrightarrow \textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \textit{ est convergente}}$$

Exemple 5.2.16. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{2n^3-3n^2+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$,

on ne peut pas conclure, on pose $v_n = \dfrac{1}{2n^2}$; $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n-5}{2n^3-3n^2+10}}{\dfrac{1}{2n^2}} = 1.$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-5}{2n^3-3n^2+10}$ converge.

Théorème 5.2.17 (Test quotient)**.** *Si $u_n \geq 0$, et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$. Alors*

- **(a)** *Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente*
- **(b)** *Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente*
- **(c)** *Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.*

Exemple 5.2.18. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, vérifient $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
La première serie converge, mais la deuxième série diverge.
a) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ (à vérifier), la série converge.
b) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^{20}}$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ (à vérifier), la série diverge.

5.2.3 Séries alternées

Définition 5.2.19. Une série alternée est une série dont les termes u_n changent de signes alternativement. Une série alternée est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$ *avec* $a_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 5.2.20. *Soit $u_n > 0, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, une suite décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. alors, la série alternée*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots \textit{ est convergente.}$$

Exemple 5.2.21. La série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, la suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante, positive, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc, la suite $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ converge.

Remarque 5.2.22. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.

Définition 5.2.23.

1. Une série convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, telle que $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ diverge est appelée une série conditionnellement convergente.
2. Une série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge est appelée une série absolument convergente.

Exemple 5.2.24. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente car : $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ converge.

Théorème 5.2.25 (Test quotient)**.** *On considère une série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, *alors*

(a) *Si* $\rho < 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est absolument convergente.*

(b) *Si* $\rho > 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est divergente.*

(c) *Si* $\rho = 1$, *on ne peut pas conclure.*

5.2.4 Séries entières réelles

Définition 5.2.26. On appelle série entière, une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Exemple 5.2.27. La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$, en utilisant le test quotient, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right|\frac{(n+1)}{(n+2)} = \left|\frac{x}{2}\right| = \rho.$$

— Si $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, $-2 < x < 2$, alors la série converge absolument donc converge.

— Si $\left|\frac{x}{2}\right| > 1$ alors la série diverge.

— Si $\left|\frac{x}{2}\right| = 1$, $x = -2$ ou $x = 2$.

— Si $x = 2$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$ diverge.

— Si $x = -2$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(n+1)}$ converge.

Donc $[-2, 2[$ est le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$.

En utilisant le même raisonnement, on obtient le résultat suivant

Théorème 5.2.28. *Le domaine de convergence d'une série entière* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *est un intervalle de la forme*

(a) $\{0\}$ *si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

(b) *Si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe et différente de 0, alors la série converge absolument sur* $]-R, R[$*, pour* $x = -R$ *ou* $x = R$*, la série peut converger ou non.* R *est appelé le rayon de convergence de la série.*

(c) $]-\infty, +\infty[$ *si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$.

Théorème 5.2.29. *Supposons que la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ *converge sur l'intervalle* $]-R, R[$ *(*R *est le rayon de convergence de la série). Alors si* $x \in\,]-R, R[$ *on a*

(a) $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

(b) $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Exemple 5.2.30.

On a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *sur* $]-1, 1[$ car 1 est le rayon de convergence de la série. En dérivant, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots \quad \text{sur }]-1, 1[$$

En intégrant, on obtient

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x t^n dt\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots .$$

sur $]-1, 1[$, c'est à dire

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots ,$$

sur $]-1, 1[$.

En remaplaçant x par $-x$, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) = \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\cdots \quad \text{sur }]-1, 1[}$$

De même,

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$$

donc

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \cdots \ \text{sur }]-1, 1[$$

On obtient

$$\boxed{\arctan(x) = \ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\cdots \quad \text{sur }]-1, 1[}$$

Exemple 5.2.31. Le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est $]-\infty, +\infty[$ (vérifier).
On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad f(0) = 1, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x).$$

Par conséquent, $f(x) = e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $]-\infty, \infty[$.

$$\boxed{e^x = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

$$\boxed{\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \cdots \quad \text{sur }]-\infty, \infty[}$$

5.3 Séries numériques complexes

5.3.1 Propriétés et test de convergence

Définition 5.3.1. Soit (z_n) une suite numérique complexe infinie, la somme infinie

$$z_0 + z_1 + z_3 + \cdots$$

est appelée série numérique de terme générale z_n qu'on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Définition 5.3.2. La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim_{n\to\infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Proposition 5.3.3. *Si $z_n = x_n + iy_n$ alors*

$$\textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} z_n \ \textit{ converge } \Leftrightarrow \textit{La série } \sum_{n=0}^{\infty} x_n \textit{ et la série } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \textit{ convergent.}$$

— *La série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est la partie réelle de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

— *La série* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *est la partie imaginaire de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Exemples 5.3.4.

La série $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2})$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La série $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2})$ converge car les séries $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3})$ et $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})$ convergent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^3}) + i\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}).$$

Théorème 5.3.5. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *convergent alors* $\sum_{n=0}^{\infty}(z_n + w_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = c\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

Théorème 5.3.6. *Si une série complexe* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge alors* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. *Et, si* $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$ *alors la série complexe* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *diverge.*

Définition 5.3.7. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite absolument convergente si la série

$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = |z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots$ converge ; où $|z_n|$ est le module de z_n.

Proposition 5.3.8. *Toute série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *absolument convergente est convergente.*

Théorème 5.3.9 (Test de comparaison)**.** *Si* $|z_n| \leq v_n$ *pour* $n \geq n_0$ *(à partir d'un certain rang* n_0*), alors*

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ est convergente} \Rightarrow \text{La série } \sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ est absolument convergente}}$$

Exemple 5.3.10.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{2n^2}$ est absolument convergente, car $\left|\frac{1+i}{2n^2}\right| \leq \frac{|1+i|}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ converge.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 - 2i}$ est absolument convergente, car

$$\left|\frac{i^n}{n^2 - 2i}\right| \leq \frac{1}{|n^2 - 2i|} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 4}} \leq \frac{1}{n^2}$$

Théorème 5.3.11 (Test quotient)**.** *On considère une série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$*, telle que* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \rho$. *Alors*

(a) *Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est absolument convergente.*

(b) *Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est divergente.*

(c) *Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.*

Exemple 5.3.12. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(30+2i)^n}{n!}$ est absolument convergente, car $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \dfrac{|30+2i|}{n+1} \to 0$.

5.3.2 Série de Taylor et de Maclaurin

Définition 5.3.13.

On appelle série entière au point z_0, une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots;$$

z_0 est dite le centre de la série. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est appelée série de Taylor.

Si, en particulier, $z_0 = 0$, on obtient la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ appelée série de Maclaurin.

Exemple 5.3.14. On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, en utilisant le test quotient,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1} n!}{(n+1)! z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{(n+1)} = 0,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument sur $\mathbb{C}$.

Théorème 5.3.15 (Rayon de convergence)**.** *La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolument sur un disque de la forme*

(a) $\{z \in C/ \ |z-z_0| < R\}$, *quand* $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| \in \mathbb{R}_+^*$.

(b) $z = z_0$; *si* $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$.

(c) $\mathbb{C}$ *; quand* $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$.

R est appelé le rayon de convergence de la série.

Exemple 5.3.16. On considère la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z-3i)^n.$$

Donc,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \frac{1}{4}$$

Donc, la série converge absolument sur le disque ouvert de centre $3i$ et de rayon $\dfrac{1}{4}$, et donc converge sur le même disque.

Exemple 5.3.17. On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4^n}{(1+i)^n}(z-5)^n$. La série converge absolument sur le disque ouvert de centre 5 et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (à vérifier).

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

alors $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$; où $f^{(n)}(z)$ est la dérivée $n^{ième}$ de f en z.

Si on remplace $f^{(n)}(z_0)$ par la formule de Cauchy, $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, on obtient

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}$$

C n'importe quelle courbe fermée simple entourant z_0, et $f(z)$ holomorphe sur l'intérieur du contour C.

Exemples 5.3.18.

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad |z| < 1.}$$

$$\boxed{\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \cdots \quad |z| < 1}.$$

$$\boxed{Arc\tan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^n = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \cdots \quad |z| < 1}.$$

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad \text{sur } \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \cdots \qquad \text{sur } \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \cdots \qquad \text{sur } \mathbb{C}}$$

$$\boxed{\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \cdots \qquad \text{sur } C}$$

$$\boxed{\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} \cdots \quad \text{sur } C}$$

Si on pose $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{iy} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}.$$

En remarquant que $(i)^{2k} = (-1)^k$ et $(i)^{2k+1} = (-1)^k i$, on a

$$e^{iy} = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n (y)^n}{n!} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^k}{2k!} + i \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^{2+1k}}{2k+1!}.$$

On obtient la formule d'Euler,

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

5.4 Séries de Laurent

Les séries de Laurent généralisent les séries de Taylor pour développer, en séries, des fonctions $f(z)$ qui présentent des singularités en un point z_0.

Exemples 5.4.1.

La fonction $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$ est non définie en un point de singularité $z_0 = 0$.

La fonction $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2n!} = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots$.

Si $z \neq 0$, On a $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{2n!} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^3}{4!} - \cdots$,

pour tout $z \neq 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{2n!}$ est appelée la série de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$.

Définition 5.4.2. Si la fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe au voisinage de z_0, le point z_0 est appelé point singulier.

S'il existe un disque de centre z_0 privé du point z_0 tel que la fonction est holomorphe, le point z_0 est appelé point singulier isolé.

Définition 5.4.3. Une série de la forme

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

est appelée série de Laurent de centre z_0.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z - z_0)^n}$ est appelée la partie singulière.

Théorème 5.4.4. *Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur la couronne ouverte*

$$D = \{z \in \mathbb{C} / \ \ r_1 < |z - z_0| < r_2\} ;$$

alors la fonction $f(z)$ admet un développement unique en série de Laurent de centre z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad et \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz.$$

C une courbe fermée entourant z_0 et orientée positivement par rapport à D.

Définition 5.4.5. S'il existe m tel que $b_m \neq 0$ et $b_n = 0$ pour tout $n > m$, z_0 est appelé un pôle d'ordre m.

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots \qquad \forall z \in D$$

.

Si $m = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.
Si les b_m sont infinis, on dit que z_0 est un point singulier essentiel.

Remarque 5.4.6. On peut aussi représenter $f(z)$ par

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Exemples 5.4.7.

1. Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^5}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}z^2; \cdots \qquad |z| > 0. \end{aligned}$$

2. Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.
On pose $Z = \dfrac{1}{z}$,
$f(Z) = \dfrac{e^Z}{Z^2} = \dfrac{1}{Z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(Z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(Z)^{n-2}}{n!} = \dfrac{1}{Z^2} + \dfrac{1}{Z} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{Z}{3!} + \dfrac{Z^2}{4!} + \cdots;$
avec $Z \neq 0$. Alors,

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots; \qquad |z| > 0.$$

3. Si $|z| > 1$, donner le développement en séries de Laurent de la fonction $\dfrac{1}{1-z}$.
On a $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}$, et puisque $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ donc $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$.
Donc

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots; |z| > 1.$$

4. Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $\dfrac{1}{z^3 - z^4}$ de centre 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3(1-z)} &= \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} && \text{pour } |z| < 1 \\
&= -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}, && \text{pour } |z| > 1 \\
&= -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots .;
\end{aligned}$$

Définition 5.4.8. Si la fonction $f(z)$ admet un développement en série de Laurent de centre z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

alors on a

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

C une courbe fermée entourant z_0 et orientée positivement par rapport à D. Le coefficient b_1 est appelé le résidu de la fonction $f(z)$ au point $z = z_0$, et on écrit $b_1 = Res_{z=z_0} f(z)$.

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z=z_0} f(z)}$$

Exemples 5.4.9.

1. Intégrer la fonction $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^4}$ sur le cercle unité $C : x^2 + y^2 = 1$, orienté positivement (dans le sens contraire de l'aiguille de la montre).

$$\begin{aligned}
f(z) = z^{-4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \\
= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \frac{1}{5040}z^3 \cdots & \qquad |z| > 0.
\end{aligned}$$

La fonction $f(z)$ a un pôle d'ordre 3 au point $0, b_1 = Res_{z=0} f(z) = -\dfrac{1}{6}$. Par conséquent,

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin(z)}{z^4}dz,$$

donc

$$\oint_C \frac{\sin(z)}{z^4}dz = -\frac{\pi i}{3}.$$

2. Intégrer la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$ sur le cercle : $C : |z| = \dfrac{1}{2}$, orienté positivement.

$$\frac{1}{z^3(1-z)}$$

$$= \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 \cdots ; 0 < |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots ; |z| > 1.$$

La fonction $f(z)$ a deux points singuliers 0, et 1, 1 n'est pas entouré par C, $b_1 = Res_{z=0} f(z) = 1$.
Par conséquent,

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z^3(1-z)} dz,$$

et

$$\oint_C \frac{1}{z^3(1-z)} dz = 2\pi i.$$

5.5 Calcul des résidus

5.5.1 Pôles simples

1. Si la fonction $f(z)$ admet un pôle simple au point z_0 alors

$$\boxed{Res_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).}$$

2. Si la fonction $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ admet un pôle simple au point z_0, avec $p(z_0) \neq 0$ alors

$$\boxed{Res_{z=z_0}\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.}$$

Exemple 5.5.1. La fonction $f(z) = \dfrac{(9z+i)}{(z^3+z)}$ admet un pôle simple au point $z_0 = i$

$$Res_{z=i}\frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(9z+i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

On peut utiliser la deuxième méthode

$$Res_{z=i}\frac{(9z+i)}{(z^3+z)} = \frac{(9z+i)}{(z^3+z)'} = \left[\frac{(9z+i)}{3z^2+1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

5.5.2 Pôles d'ordre m

Si la fonction $f(z)$ admet un pôle d'ordre m au point z_0 alors

$$\boxed{Res_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.}$$

$\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$ est la dérivée d'ordre $m-1$ de la fonction $(z-z_0)^m f(z)$.

Exemple 5.5.2. La fonction $f(z) = \dfrac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$ admet un pôle d'ordre 2 au point $z_0 = 1$

$$Res_{z=1}\frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} = \frac{1}{(2-1)!}\ \lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2 f(z)\right]^{(1)}$$
$$\lim_{z\to 1}\left[\frac{50z}{(z+4)}\right]' = \lim_{z\to 1}\left[\frac{50(z+4)-50z}{(z+4)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{200}{(z+4)^2} = 8.$$

Théorème 5.5.3. *Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine D de frontière C fermée (D entouré par C) sauf sur un nombre fini de points $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_k$ dans C. Alors, l'intégrale de la fonction $f(z)$ sur C, orientée positivement dans D, est*

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \textstyle\sum_{j=1}^{k} Res_{z=z_j} f(z).}$$

Exemple 5.5.4. Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \dfrac{4-3z}{(z^2-z)}$ sur C entourant 0 et 1.

On a (à vérifier !)

$$Res_{z=0}\frac{4-3z}{z(z-1)} = -4,$$

et

$$Res_{z=1}\frac{4-3z}{z(z-1)} = 1.$$

Donc,

$$\oint_C \frac{4-3z}{(z^2-z)}dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{2} Res_{z=z_j} f(z) = 2\pi i(-4+1) = -6\pi i$$

5.6 Applications et Exercices

1. En utilisant les séries entières, résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

On suppose que la fonction $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution sur son domaine de convergence. Alors

$$y' = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

Par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$

c'est à dire

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_{n-2}x^{n-1} + \cdots .$$

Donc, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}a_0$, $a_3 = \frac{1}{3}a_1; \cdots$. Par récurrence, on obtient $a_n = \frac{1}{n}a_{n-2}$, c'est à dire

$$a_{2k+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2k} = \frac{1}{2^k}\frac{1}{k!}a_0.$$

Donc,

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = a_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

est une solution sur le domaine de convergence, qui est dans ce cas $(-\infty, +\infty)$. Puisque $y(0) = a_0 e^0 = a_0 = 1$, donc

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

2. Pour calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)}$, on pose $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

   On obtient le cercle unité $C : x^2 + y^2 = 1$.

   On a $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$ car $\dfrac{1}{z} = e^{-i\theta}$ sur C, $dz = ie^{i\theta}d\theta$ et donc $\dfrac{dz}{iz} = d\theta$.

   En utilisant le changement de variables, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)}$$

$$= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = 2i \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$$

   La fonction $f(z) = \dfrac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$ admet un pôle simple au point $z = -1 + \sqrt{2}$ entouré par C, car $\left|-1 + \sqrt{2}\right| < 1$ et un autre pôle simple au point $z = 1 + \sqrt{2}$ non entouré par C, car $\left|1 + \sqrt{2}\right| > 1$.

$$Res_{z=1-\sqrt{2}} = \lim_{z \to -1+\sqrt{2}} \frac{(z - \sqrt{2} + 1)}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$$
$$= \lim_{z \to -1+\sqrt{2}} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

   Par conséquent, $2i \displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = 2i(2\pi i)(-\frac{1}{2}) = 2\pi$.

Exercice I

Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}; \qquad (b)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\sqrt{n^4+1}},$$
$$(c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-\pi)^n}{3^n}; \qquad (d)\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n (z+\pi i)^n.$$

Indications

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{2^n}$. Le domaine de convergence $]-4,0[$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3x+1)^n}{\sqrt{n^4+1}}$. Le domaine de convergence $\left[-\dfrac{2}{3},0\right]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x-\pi)^n}{3^n}$. Le domaine de convergence $]-3+\pi, 3+\pi[$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2+3i}{5-i}\right)^n (z+\pi i)^n$. Le centre de la série $z=-\pi i$, le rayon $\sqrt{2}$.

Exercice II

Développer en série de Laurent de centre z_0 et déterminer la région $0<|z-z_0|<R$ telle que la série converge :

$$\text{a)}\quad \frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3} \qquad z_0=\frac{\pi}{4};\quad \text{b)}\ z^2\sinh\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z_0=0.$$

<u>*Indications*</u>

a) $\dfrac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3}, \qquad z_0=\dfrac{\pi}{4}.$

On pose $Z=z-\frac{\pi}{4}$, donc $\sin(z)=\sin(Z+\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})\cos(Z)+\cos(\frac{\pi}{4})\sin(Z)$.
En développant, $\cos(Z)$ et $\sin(Z)$ autour de 0, on obtient

$$\sin(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}Z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1!}Z^{2n+1}\right); \quad \text{avec } R=\infty.$$

$$\frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3}=\frac{\sqrt{2}}{2(z-\frac{\pi}{4})^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}(z-\tfrac{\pi}{4})^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1!}(z-\tfrac{\pi}{4})^{2n+1}\right)$$

$$\frac{\sin(z)}{(z-\frac{\pi}{4})^3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^3}+\frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^2}-\frac{1}{2!(z-\frac{\pi}{4})}\right)-\frac{1}{3!}+\frac{(z-\frac{\pi}{4})}{4!}+\cdots$$

On déduit que la série converge sur $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{4}\}$.

b) $z^2\sinh\left(\dfrac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!z^{2n-1}}=z+\dfrac{1}{6z}+\dfrac{1}{120z^3}; \quad$ avec $R=\infty$.
La série converge sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Exercice III

Déterminer la série de Laurent au centre 0 de la fonction

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\int_0^z\frac{\sin(t)}{t}dt$$

<u>*Indications*</u>

On développe la fonction

$$\frac{\sin(t)}{t}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n};$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{1}{z^3}\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}dt = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}t^{2n+1}\right]_0^z$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}z^{2n+1} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!3} + \frac{z^2}{5!5} - \cdots .$$

Exercice IV

En utilisant les résidus, calculer l'intégrale suivante

$$\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz}, \; C : |z| = 1$$

On a $\dfrac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = \dfrac{\cosh(z)}{z(z-3i)}$, la fonction admet un pôle simple au point $z = 0$ entouré par C, et un autre pôle simple au point $z = 3i$ non entouré par C.

$$Res_{z=0} = \left[\frac{\cosh(z)}{(z-3i)}\right]_{z=0} = -\frac{1}{3i} = \frac{i}{3}$$

Par conséquent,

$$\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-3iz} = -\frac{2\pi}{3}.$$

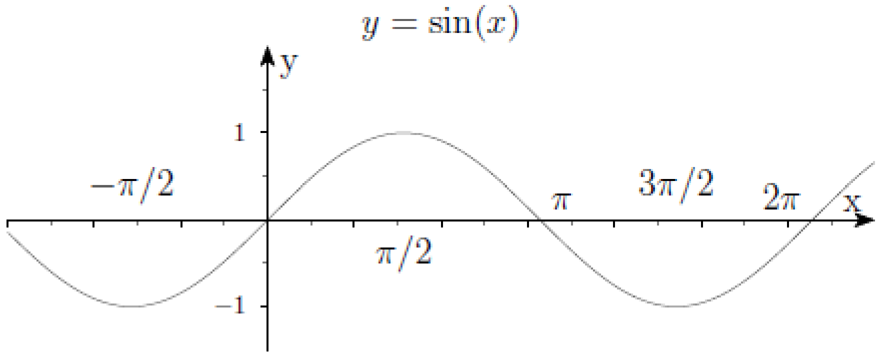
6

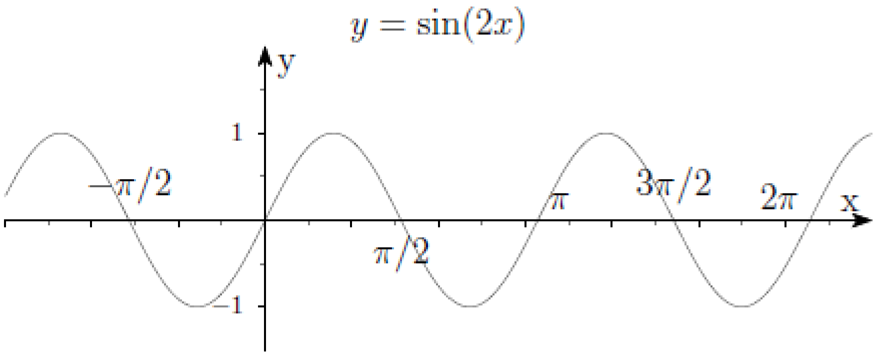
Séries de Fourier

6.1 Développement des fonctions de période 2π

Définition 6.1.1. Une fonction $f(x)$ est dite périodique s'il existe une constante p telle que : $f(x+p) = f(x)$, pour tout $x \in D_f$, l'ensemble de définition de f. Le plus petit p est appelé période de la fonction f. De plus, $f(x+np) = f(x)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 6.1.2. La fonction $f(x) = \cos(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2 \cdots$
La fonction $f(x) = \sin(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2 \cdots$.





Rappel

Une fonction $f(x)$ est dite impaire si pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Une fonction $f(x)$ est dite paire si pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Propriétés 6.1.3.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction impaire intégrable on a
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction paire intégrable on a
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
3. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(px)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \pi \\ \pi & \text{si } n = p, \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq \pi \\ \pi & \text{si } n = p. \end{cases}$$
Et
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$
Pour vérifier les égalités , il suffit d'utiliser les formules suivantes
$$\cos(nx)\sin(px) = \frac{1}{2}\left[\sin((n+p)x) - \sin((n-p)x)\right].$$
$$\sin(nx)\sin(px) = \frac{1}{2}\left[\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)\right].$$

Définition 6.1.4. On appelle série de Fourier (ou série trigonométrique) une série de la forme

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Les coefficients constants a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier.

Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge vers une fonction $f(x)$ alors on a $f(x + 2\pi) = f(x)$, c'est à dire, la fonction f est périodique de période 2π.

Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge vers $f(x)$ alors on écrit

$$f(x) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)),$$

sur le domaine de convergence de la série.

Supposons que la série vérifie les conditions qui permettent d'intégrer terme à terme, on obtient alors

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx & = & \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx\Big) \\ & = & 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n 0 + b_n 0) \\ & = & 2\pi. \end{array}$$

De même pour un entier non nul p on a

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(px)dx & = & \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(px)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\cos(nx)dx\Big) \\ & & + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\sin(nx)dx\Big) \\ & = & \pi a_p, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(px)dx & = & \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(px)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\cos(nx)dx\Big) \\ & & + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\sin(nx)dx\Big) \\ & = & \pi b_p. \end{array}$$

On peut alors déterminer les coefficients de Fourier par les formules suivantes

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

On peut aussi développer des fonctions périodiques non continues en séries de Fourier.

Exemple 6.1.5.

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

La fonction n'est pas définie aux points $x = 0$, $x = \pm\pi$. Cependant, on a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} -dx \right) = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi) = 0.$$

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} -\cos(nx)dx\Big) \\ & = & \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{0}^{\pi} \right) \\ & = & 0, \quad n = 1, 2, \cdots \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} -\sin(nx)dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(0)+\cos(n(-\pi))}{n} + \frac{\cos(nx)-\cos(0)}{n}\right)\\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}.$$

Par conséquent, si n est pair alors $b_n = 0$ et si n est impair alors $b_n = -\frac{4}{n\pi}$, c'est à dire,

$$b_1 = -\frac{4}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{4}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = -\frac{4}{5\pi}, \cdots .$$

On obtient

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).$$

ou d'une autre manière,

$$\boxed{f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{2n+1}.} \qquad (1)$$

Comme application, on peut déterminer la valeur de la série alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots ,$$

en posant $x = \frac{\pi}{2}$, dans (1), on obtient alors

$$-1 = -\frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{5} + \cdots\right).$$

Donc,

$$\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) = 1;$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6.2 Fonction paire et impaire

1. Si f est une fonction paire alors pour tout $n = 1, 2, 3, \cdots$, les fonctions $f(x)\sin(nx)$ sont impaires et les fonctions $f(x)\cos(nx)$ sont paires. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx;$$

   et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0,$$

   donc,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx).$$

   Si la fonction f est paire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$ alors les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.}$$

2. Si f est une fonction impaire alors pour tout $n = 1, 2, 3, \cdots$, les fonctions $f(x)\sin(nx)$ sont paires et les fonctions $f(x)\cos(nx)$ sont impaires. Par conséquent,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

   et

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

   donc,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$$

   Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$, alors les coefficients de Fourier sont déterminés par

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$\boxed{a_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

Exemples 6.2.1.

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = x, \qquad -\pi < x < \pi.$$

La fonction $f(x)$ est impaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx.$$

Par intégration par parties, on trouve pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\ &= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n; \end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$f(x) = 2\sin(x) - \frac{2\sin(2x)}{2} + \frac{2\sin(3x)}{3} - \cdots = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction paire, périodique de période 2π définie par

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x < \pi$$

La fonction $f(x)$ est paire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = 0$, et

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

En intégrant par partie, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi n}\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right). \end{aligned}$$

alors on remarque que $a_n = 0$ si n est pair et $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$ si n est impair. D'où

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \cdots\right)$$

c'est à dire

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2n+1)x\right)}{(2n+1)^2}.$$

Si $x = 0$, on obtient

$$f(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2};$$

on déduit que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6.3 Fonctions de période $2L$

6.3.1 Définitions et propriétés

Si f est une fonction périodique de période $2L$, on utilise un changement d'échelle $v = kx$, $g(v) = g(kx) = f(x)$ pour obtenir une fonction g périodique de période 2π, on doit avoir $2\pi = k2L$, $k = \frac{\pi}{L}$, et donc $v = \frac{\pi}{L}x$.
En effet,

$$g(v + 2\pi) = g\left(\frac{\pi}{L}(x + 2L)\right) = f(x + 2L) = f(x) = g(v).$$

D'après la première partie du cours et puisque g est 2π-périodique on a

$$g(v) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nv) + b_n \sin(nv)).$$

Les coefficients de Fourier sont

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)dv}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\cos(nv)dv, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\sin(nv)dv, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

En faisant le changement de variable $v = \frac{\pi}{L}x$, $g(v) = f(x)$, on a : $dv = \frac{\pi}{L}dx$, $v = -\pi \Rightarrow x = -L$, $v = \pi \Rightarrow x = L$, on obtient

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)dv = \frac{1}{2L} \textstyle\int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\cos(nv)dv = \frac{1}{L} \textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} g(v)\sin(nv)dv = \frac{1}{L} \textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{f(x) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right).}$$

On peut alors déterminer les coefficients de Fourier par les formules suivantes

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

6.3.2 Fonction paire et impaire de période $2L$

1. Si la fonction f est paire et périodique de période $2L$ définie sur $]0, L[$; alors, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = 0}$$

2. Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$; alors les coefficients de Fourier sont

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$\boxed{a_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

Exemples 6.3.1.

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique paire :

$$f(x) = x^2, \qquad 0 < x < 1, \quad L = 1.$$

On a

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$
$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos(\frac{n\pi}{1} x) dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

En intégrant par partie deux fois, on obtient $a_n = 4\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(2\pi x) + \frac{1}{9}\cos(3\pi x) - \cdots\right)$$

En posant $x = 1$, on obtient

$$f(1) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = 1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{\pi^2}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots)$$

$$1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{\pi^2}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots)$$

Et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots) = \frac{2}{3} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'une autre part, en utilisant les formules d'Euler, on a

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$$

et puisque

$$f(x) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

alors

$$f(x) = a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) = c_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + \overline{c}_n e^{-inx})$$

avec : $\quad c_0 = a_0$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) - i\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$
$$\overline{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) + i\sin(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

En posant $\quad \overline{c}_n = c_{-n}, \quad$ on a

$$\boxed{f(x) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$$
$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$$

6.4 Approximation par des sommes trigonométriques

Soit f une fonction périodique de période 2π définie initialement sur $]-\pi, \pi[$ qu'on peut représenter par une série trigonométrique

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a_n, b_n sont les suites des coefficients de Fourier déterminer par les formules précédentes. Si on approche la fonction par la somme partielle d'ordre N

$$f(x) \approx a_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

La valeur $\qquad E_F = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx$

est appelée l'erreur quadratique en utilisant les coefficients de Fourier. Si on prend une autre approximation : $f(x) \approx A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$
les suites des coefficients A_n, B_n sont arbitraires. Alors on a

$$E_F \leq E = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - a_0 - \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \right|^2 dx$$

L'erreur E_F est la plus petite erreur quadratique. On en déduit que la série de Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a_n, b_n sont les suites des coefficients de Fourier définies par :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$
$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$
$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \cdots}$$

est la meilleure approximation par rapport à la norme de L^2 : $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ pour tout N.
Si $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ existe, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\boxed{2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

Si de plus, la fonction f est continu et $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ existe , on obtient :

Identité de Parseval

$$\boxed{2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}$$

Exercices

1. Vérifier que le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 4 définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2. \end{cases}$$

est

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}x) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}x) + \frac{1}{7}\sin(\frac{7\pi}{2}x) + \cdots\right).$$

2. Vérifier que le développement en série de Fourier de la fonction périodique de période 2 définie par $f(x) = x^2$, $-1 < x < 1$ est donné par

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(\pi x) - \frac{1}{4}\cos(2\pi x) + \frac{1}{9}\cos(3\pi x) - \frac{1}{25}\cos(5\pi x) + \cdots\right) \tag{1}$$

En déduire que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Si on prend $x = 1$ dans (1), on a

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \cdots) \\ \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} &= \frac{4}{\pi^2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \cdots). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

7 Transformée de Laplace

7.1 Définitions et exemples

Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$, on définit la transformée de Laplace de la fonction f, et on note $\mathcal{L}(f)$, par

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt}$$

si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ existe.

Exemple 7.1.1. Déterminer $\mathcal{L}(f)$.

1. $f(t) = 1$ sur $[0,+\infty[$.
$$\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T = \frac{1}{s}$$
2. $f(t) = e^{2t}$ sur $[0,+\infty[$
$$\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{2t}dt = \int_0^\infty e^{(2-s)t}dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}\right]_0^T = \frac{1}{s-2}$$
$$si \quad s-2>0, \qquad s>2$$
3. De même, on a pour toute constante a, $\quad \mathcal{L}(e^{at})(s) = \dfrac{1}{s-a}$, si $s-a>0$.

Propriété 7.1.2. *La transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est un opérateur linéaire,*

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)}$$

$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. *Il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale.*

Exemples 7.1.3.

1) Déterminer $\mathcal{L}(\cosh(at))$; $\quad$ on a $\cosh(at) = \dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$, donc

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2-a^2}}$$

De même on a

$$\pounds(\sinh(at)) = \frac{1}{2}(\pounds(e^{at}) - \pounds(e^{-at})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\boxed{\pounds(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2-a^2}}$$

On a

$$\pounds(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{(s+ia)}{(s+ia)(s-ia)} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}.$$

De plus, on a

$$e^{iat} = \cos(at) + i\sin(at)$$
$$\pounds(e^{iat}) = \pounds(\cos(at) + i\sin(at)) = \pounds(\cos(at)) + i\pounds(\sin(at)) = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

En égalisant les parties réelles et les parties imaginaires, on a

$$\boxed{\pounds(\cos(at)) = \frac{s}{s^2+a^2}}$$

$$\boxed{\pounds(\sin(at)) = \frac{a}{s^2+a^2}}$$

On peut aussi calculer directement $\pounds(\cos(at))$ et $\pounds(\sin(at))$ en intégrant par partie. On a alors

$$(1) \qquad \pounds(\cos(at)) = \int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\cos(at)\right]_0^\infty - \frac{a}{s}\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\pounds(\sin(at))$$

$$(2) \qquad \pounds(\sin(at)) = \int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\sin(at)\right]_0^\infty + \frac{a}{s}\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt$$
$$= \frac{a}{s}\pounds(\cos(at))$$

En remplaçant $\pounds(\sin(at))$ dans (1), on obtient

$$\pounds(\cos(at)) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s}\frac{a}{s}\pounds(\cos(at)) = \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2}\pounds(\cos(at))$$

Par conséquent

$$(1 + \frac{a^2}{s^2})\pounds(\cos(at)) = \frac{1}{s} \Rightarrow \pounds(\cos(at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

De plus, on a

$$\pounds(\sin(at)) = \frac{a}{s}\pounds(\cos(at)) = \frac{a}{s}\frac{s}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Déterminons $\pounds(t^{n+1})$ en fonction de $\pounds(t^n)$:

$$\pounds(t^{n+1}) = \int_0^\infty t^{n+1}e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}t^{n+1}\right]_0^\infty + \frac{n+1}{s}\int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{n+1}{s}\pounds(t^n)$$

Car

$$\left[\frac{e^{-st}}{-s}t^{n+1}\right]_0^\infty = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}t^{n+1}\right]_0^T = \lim_{T\to\infty}(\frac{e^{-sT}}{-s}T^{n+1} - 0) = 0$$

$$\pounds(t^{n+1}) = \frac{n+1}{s}\pounds(t^n)$$

Par récurrence, on obtient

$$\pounds(t^{n+1}) = \frac{n+1}{s}\frac{n!}{s^{n+1}}$$

On a alors

$$\boxed{\pounds(t^{n+1}) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}}$$

Si une fonction f est continue par morceaux et vérifie une condition de croissance de la forme : $|f(t)| \leq Me^{kt}$, alors la transformée de Laplace $\pounds(f)$ existe pour $s > k$.
Si f' vérifie les mêmes conditions alors on a la relation suivante

$$\boxed{\pounds(f') = s\pounds(f) - f(0)}$$

En effet :

$$\pounds(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\pounds(f')(s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\left[e^{-st}f(t)\right]_0^T + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0) + s\pounds(f)(s)$$

De même,

$$\pounds(f") = s\pounds(f') - f'(0) = s(s\pounds(f) - f(0)) - f'(0) = s^2\pounds(f) - sf(0) - f'(0)$$

$$\boxed{\pounds(f") = s^2\pounds(f) - sf(0) - f'(0)}$$

Par récurrence, on a

$$\boxed{\pounds(f^{(n)}) = s^n\pounds(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

Si la fonction f admet une transformée de Laplace $F(s)$ pour $s > k$ alors la transformée de Laplace de la fonction $e^{at}f(t)$ est donnée par la fonction $F(s-a)$, $s - a > k$.

$$\boxed{\pounds(e^{at}f(t))(s) = \pounds(f)(s-a), \qquad s - a > k}$$

En effet, on a

$$\pounds(f)(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})f(t)dt = \pounds(e^{at}f(t)(s)$$

On peut obtenir aussi la relation suivante

$$\boxed{\pounds\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{1}{s}\pounds(f)(s)}$$

Exemple 7.1.4.

(1) $\pounds(e^{2t}\cos(3t)(s) = \pounds(\cos(3t))(s-2) = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+9}$.

(2) $\pounds(e^{4t}t^2)(s) = \pounds(t^2)(s-4) = \dfrac{2}{(s-4)^3}$.

A partir d'une fonction $F(s)$, on peut retrouver la fonction f telle que

$$\text{Si } \pounds(f) = F(s) \text{ alors } f = \pounds^{-1}(F(s))$$

Exercice

Déterminer la fonction $f(t)$ telle que $\pounds(f) = F(s)$:

1) $F(s) = \dfrac{1}{s-2}$

2) $F(s) = \dfrac{s-3}{(s-3)^2+16}$

3) $F(s) = \dfrac{s^4-3s^2+12}{s^5}$

Indications 1) On a : $f(t) = e^{2t}$.

2) On a : $f(t) = e^{3t}\cos(4t)$.

3) On a $F(s) = \dfrac{s^4-3s^3+12}{s^5} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{12}{s^5} = 1 - \dfrac{3}{s^2} + \dfrac{12(4!)}{(4!)s^5}$; $f(t) = 1 - 3t + \dfrac{t^4}{2}$.

7.2 Transformée de Laplace de certaines fonctions usuelles

$\pounds(f)$	f	$\pounds(f)$	f	$\pounds(f)$	f
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos(bt)$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\sin(bt)$
$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	$\frac{1}{s^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\sin(bt)$
$\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$	t^3	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$	$\frac{1}{(s-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{b^2}(1-\cos(bt))$

7.3 Applications aux équations différentielles

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y" - y = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad \text{conditions initiales} \end{cases}$$

On utilise la transformée de Laplace pour déterminer la solution de l'équation

$$\begin{aligned} & \pounds(y" - y) = \pounds(y") - \ \pounds(y) = \pounds(t) = \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow\ & s^2\pounds(y) - sy(0) - y'(0) - \pounds(y) = \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow\ & (s^2-1)\pounds(y) - s - 1 = \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow\ & (s^2-1)\pounds(y) = s + 1 + \frac{1}{s^2} \\ \Leftrightarrow\ & \pounds(y) = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

On a

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s-1}) = e^t, \quad \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2-1} = \sinh(t), \quad \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t.$$

L'opérateur $\pounds^{-1}$ est linéaire, donc

$$y(t) = \pounds^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2-1}) - \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2}) = e^t + \sinh(t) - t$$
$$y(t) = e^t + \sinh(t) - t$$

Dans cette méthode, on a utilisé directement les conditions initiales de la solution. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y" - 6y' + 5y = 29\cos(2t) \\ y(0) = 3.2, \quad y'(0) = 6.2, \quad \text{conditions initiales} \end{cases}$$

On a

$$\pounds(y" - 6y' + 5y) = \pounds(y") - 6\pounds(y') + 5\pounds(y) = \pounds(29\cos(2t)) = 29\frac{s}{s^2+4}$$

donc

$$\pounds(y") - \ 6\pounds(y') + 5\pounds(y) = s^2\pounds(y) - sy(0) - y'(0) - 6s\pounds(y) + 6y(0) + 5\pounds(y) = 29\frac{s}{s^2+4}$$

alors

$$(s^2 - 6s + 5)\pounds(y) - s(3,2) - 6,2 + 6(3,2) = 29\frac{s}{s^2+4}$$

ce qui est équivalent à

$$(s^2 - 6s + 5)\pounds(y) - s(3,2) + 13 = 29\frac{s}{s^2+4}$$

ainsi

$$(s^2-6s+5)\pounds(y)=\frac{((3,2)s-13)(s^2+4)+29s}{(s^2+4)}$$

finalement

$$\pounds(y)=\frac{((3,2)s-13)(s^2+4)+29s}{(s-1)(s-5)(s^2+4)}.$$

En utilisant la décomposition en fractions rationnelles, on obtient

$$\pounds(y)=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s-5)}+\frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

où $A=1,\ B=2,\ C=0.2,\ D=-2(2.4)$; donc

$$\pounds(y)=\frac{1}{(s-1)}+\frac{2}{(s-5)}+\frac{(0,2)s-2(2,4)}{(s^2+4)}$$
$$y=\pounds^{-1}(\frac{1}{(s-1)}+\frac{2}{(s-5)}+\frac{(0,2)s-2(2,4)}{(s^2+4)})$$
$$y(t)=e^t+2e^{5t}+0,2\cos(2t)-2,4\sin(2t)$$

Par conséquent

$$y(t)=e^t+2e^{5t}+0,2\cos(2t)-2,4\sin(2t)$$

est la solution de l'équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y"-2y'-3y=0 \\ y(1)=-3, \quad y'(1)=-17, \quad \text{conditions initiales} \end{cases}$$

On utilise le changement de variable $\quad t=\tau+1,$ on a

$$\begin{cases} \hat{y}"(\tau)-2\hat{y}'(\tau)-3\hat{y}(\tau)=0 \\ \hat{y}(0)=-3, \quad \hat{y}'(0)=-17, \quad \text{conditions initiales} \end{cases}$$

On a

$$\pounds(\hat{y}"(\tau)-2\hat{y}'(\tau)-3\hat{y}(\tau))=\pounds(\hat{y}")-2\pounds(\hat{y}')-3\pounds(\hat{y})=\pounds(0)=0$$

donc

$$s^2\pounds(\hat{y})+3s+17-2s\pounds(\hat{y})-6-3\pounds(\hat{y})=0$$

ce qui entraîne

$$(s^2-2s-3)\pounds(\hat{y})=-3s-17+6=-3s-11.$$

Alors

$$\pounds(\hat{y})=\frac{-3s-11}{(s^2-2s-3)}=\frac{-3s-11}{(s+1)(s-3)}=\frac{2}{(s+1)}-\frac{-5}{(s-3)}$$

d'où

$$\hat{y}(\tau)=2e^{-\tau}-5e^{3\tau},$$

et par conséquent

$$y(t)=\hat{y}(\tau)=2e^{-\tau}-5e^{3\tau}=2e^{-(t-1)}-5e^{3(t-1)}.$$

Donc

$$y(t)=2e^{-(t-1)}-5e^{3(t-1)}$$

est la solution du problème initial.

8 Transformée de Fourier

8.1 Définitions et exemples

8.1.1 Définition

Si une fonction f est intégrable, on définit la transformée de Fourier par l'expression

$$\boxed{\mathcal{F}(f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx}$$

L'opérateur $\mathcal{F}(f)(w)$ décrit l'évolution des fréquences. On peut rencontrer d'autres définitions :

$$\mathcal{F}(f)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi v\pi t}dt.$$

La variable t représente le temps en secondes, v la fréquence en Hz (Traitement de signal). La définition suivante est utilisée en physique.

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx.$$

Dans la suite nous utiliserons la dernière définition. A partir de la transformée de Fourier, on peut retrouver la fonction f

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(w)e^{iwx}dw}$$

La fonction f est appelée la fonction inverse de la transformée de Fourier.

Exemple 8.1.1. On considère la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-iwx}dx = \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}}(e^{-iwx} - e^{iwx}) \\ &= \frac{2}{w\sqrt{2\pi}}(\frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(w)}{w}. \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{F}$ est une application linéaire, c'est à dire

$$\mathcal{F}(af+bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$. Si de plus la fonction f' est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\mathcal{F}(f')(w) = iw\mathcal{F}(f)(w)}$$

En effet,

$$\mathcal{F}(f')(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx}\right]_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

$f(x)e^{-iwx}|_{-\infty}^{\infty} = 0$ car $f(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$ et donc $\mathcal{F}(f')(w) = iw\mathcal{F}(f)(w)$
De même, on a

$$\mathcal{F}(f'')(w) = iw\mathcal{F}(f')(w) = (iw)^2\mathcal{F}(f)(w) \text{ D'où } \boxed{\mathcal{F}(f'')(w) = -w^2\mathcal{F}(f)(w).}$$

8.2 Transformée de Fourier de certaines fonctions usuelles

$\mathcal{F}(f)$	f
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{s^2+w^2}$	$e^{-ax}, a>0$
$e^{-\frac{w^2}{2}}$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}$	$e^{-ax^2}, a>0$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(a(1-w))}{1-w} + \frac{\sin(a(1+w))}{1+w}\right]$	$\begin{cases} \cos(x), & \text{si } 0<x<a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4})$	$\cos(ax^2), a>0$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4})$	$\sin(ax^2), a>0$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\arctan(\frac{w^2}{2})$	$\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}$

8.3 Exercices corrigés

Exercice I.

1. Déterminer le développement en série de $\mathcal{F}$ourier de la fonction f périodique, de période 2π et définie par :
$$f(x) = |\sin(x)| \qquad \text{pour } x \in]-\pi, \pi[$$
2. En déduire la somme de la série : $\quad \dfrac{1}{1^2 3^2} + \dfrac{1}{3^2 5^2} + \dfrac{1}{5^2 7^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$

Exercice II.

Si $\mathcal{L}(f) = F(s)$, déterminer $f(t)$ dans les cas suivants :

$$1)\ F(s) = \frac{4s - 3\pi}{s^2 + \pi^2} \qquad\qquad 2)\ F(s) = \frac{4s - 2}{s^2 - 6s - 18}$$

Exercice III.

1. Déterminer $\mathcal{L}(f)$ pour $\quad f(t) = -3t^4 e^{\frac{t}{2}}$
2. Soit $f(t) = t\sin(wt)$, calculer f', f'' et $\mathcal{L}(f)$.
3. En utilisant la tranformée de Laplace, résoudre l'équation différetielle suivante :
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 50t - 150 \\ y(3) = -4 \\ y'(3) = 14 \end{cases}$$

Exercice IV.

Déterminer la transformée de $\mathcal{F}$ourier $\mathcal{F}$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad a > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Solutions d'exercices

Exercice I.

1. La fonction $f(x) = |\sin(x)|$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$,
f est paire et de période $2\pi = 2L$, donc $L = \pi$.
On a
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$$
et
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx \qquad (n \geq 1) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\ &= \frac{1 + (-1)^n}{\pi}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\Big). \end{aligned}$$

d'où pour tout $n \geq 0$

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2n} = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\Big) = \frac{-4}{\pi(2n-1)(2n+1)}.$$

Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \cos(2nx).$$

2. Puisque f n'est pas définie en $x = \pm\pi$, mais :

$$\lim_{x \to (-\pi)^+} f(x) = \lim_{x \to (-\pi)^+} |\sin x| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} |\sin x| = 0,$$

la fonction f est prolongeable par continuité en $x = \pm\pi$. L'identité de Parseval s'applique et l'on a

$$2{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} {a_{2n}}^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f(x))^2 dx$$

C'est à dire

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^2}{\pi^2(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 - \cos(2x))dx = 1.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

Exercice II.

1) À calculer $f(t)$ pour $F(s) = \dfrac{4s - 3\pi}{s^2 + \pi^2}$

Noter que $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. La transformée de Laplace de f est définie par

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

pourvue que cette intégrale impropre existe.

On a $F(s) = 4\dfrac{s}{s^2+\pi^2} - 3\dfrac{\pi}{s^2+\pi^2}$ pour $s > 0$, d'où

$$f(t) = \Big[4\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+\pi^2}) - 3\mathcal{L}^{-1}(\frac{\pi}{s^2+\pi^2})\Big](t) = 4\cos(\pi t) - 3\sin(\pi t).$$

2) Considérer

$$F(s) = \frac{4s-2}{s^2 - 6s - 18} = \frac{4s-2}{(s-3)^2 - 27}.$$

Donc

$$F(s) = 4\frac{s-3}{(s-3)^2 + (i\sqrt{27})^2} + \frac{10}{i\sqrt{27}}.\frac{i\sqrt{27}}{(s-3)^2 + (i\sqrt{27})^2} \quad \text{pour} s - 3 > \sqrt{27}.$$

d'où

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big)(t) = 4e^{3t}\cos(i\sqrt{27}t) + \frac{10}{i\sqrt{27}}e^{3t}\sin(i\sqrt{27}t).$$

C'est à dire

$$f(t) = e^{3t}\Big[4\cosh(\sqrt{27}t) + \frac{10}{\sqrt{27}}\sinh(\sqrt{27}t)\Big].$$

Exercice III.

1. $f(t) = -3t^4 e^{\frac{t}{2}}$
   On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(t) = F(s) &= \int_0^{+\infty} -3t^4 e^{\frac{t}{2}} e^{-st} dt \\
&= -3\int_0^{+\infty} t^4 e^{-(s-\frac{1}{2})t} dt \\
&= -3\mathcal{L}(t^4)\Big(s - \frac{1}{2}\Big) \\
&= -3\frac{4!}{\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^5} \\
&= -\frac{72}{\Big(s-\frac{1}{2}\Big)^5} \qquad \text{pour } s > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. $f(t) = t\sin(wt)$
   $f'(t) = \sin(wt) + tw\cos(wt)$
   $f''(t) = 2w\cos(wt) - w^2 t\sin(wt)$
   $f''(t) = 2w\cos(wt) - w^2 f(t)$
   Noter que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big)(s) &= 2w\frac{s}{s^2+w^2} - w^2\mathcal{L}\Big(f(t)\Big)(s) \\
&= s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

   mais $f(0) = f'(0) = 0$, donc

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}.$$

3. On résout l'équation differetielle :

$$(ED)_1 \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 50t - 150 \\ y(3) = -4 \\ y'(3) = 14 \end{cases}$$

   Etape 1 : On fait un changement de variable, pour résoudre le problème sur $[0, +\infty[$ au lieu de $[3, +\infty[$. Poser $t = \tau + 3$, donc on a $y(t) = y(\tau+3) = \tilde{y}(\tau)$
   $y'(t) = y'(\tau+3) = \tilde{y}'(\tau)$
   $y''(t) = y''(\tau+3) = \tilde{y}''(\tau)$
   $(ED)_1$ devient

$$(ED)_2 \qquad \begin{cases} \tilde{y}''(\tau) + 2\tilde{y}'(\tau) + 5\tilde{y}(\tau) = 50(\tau+3) - 150 = 50\tau \\ \tilde{y}(0) = -4 \qquad \text{et} \qquad \tilde{y}'(0) = 14. \end{cases}$$

   Etape 2 : On calcule la transformée de Laplace de $\tilde{y}$, notée $\mathcal{L}(\tilde{y})$; on a

$$\mathcal{L}\Big(\tilde{y}''(\tau) + 2\tilde{y}'(\tau) + 5\tilde{y}(\tau)\Big) = 50\mathcal{L}(\tau)$$

ainsi

$$\text{(TL1)} \qquad \mathcal{L}(\tilde{y}'') + 2\mathcal{L}(\tilde{y}') + 5\mathcal{L}(\tilde{y}) = 50\mathcal{L}(\tau).$$

mais

$$\mathcal{L}(\tilde{y}'')(s) = s^2\mathcal{L}(\tilde{y})(s) - s\tilde{y}(0) - \tilde{y}'(0)$$

et

$$\mathcal{L}(\tilde{y}')(s) = s\mathcal{L}(\tilde{y})(s) - \tilde{y}(0).$$

(TL1) s'écrit

$$\begin{aligned}(s^2+2s+5)\mathcal{L}(s) &= 50\mathcal{L}(\tau) + s\tilde{y}(0) + \tilde{y}'(0) + 2\tilde{y}(0)\\ &= \frac{50}{s^2} - 4s + 6\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{L}(\tilde{y}) = \frac{1}{s^2+2s+5}\left(-4s + 6 + \frac{50}{s^2}\right).$$

Etape 3 : Décomposer en éléments simples $\mathcal{L}(\tilde{y})$.

On sait qu'il existe α, β, γ, et δ réels uniques tels que

$$\frac{1}{s^2(s^2+2s+5)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2+2s+5}.$$

Déterminons α, β, γ, et δ. On a

$$\beta = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{1}{5}.$$

Et

$$\alpha + \gamma = \lim_{s\to+\infty} s\left(\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2+2s+5}\right) = 0$$

Pour $s = -1$, on obtient $\quad \dfrac{1}{4} = -\alpha + \beta + \dfrac{-\gamma+\delta}{4}$

Pour $s = 1$, on obtient $\quad \dfrac{1}{8} = \alpha + \beta + \dfrac{\gamma+\delta}{8}$

On résout :

$$\beta = \frac{1}{5}, \gamma = -\alpha, 7\alpha + \delta = -\frac{3}{5}, -3\alpha + \delta = \frac{1}{5}$$

d'où

$$\alpha = -\frac{2}{25}, \quad \gamma = \frac{2}{25}, \quad \delta = \frac{1}{5} + 3(-\frac{2}{25}) = -\frac{1}{25}$$

et

$$\frac{50}{s^2(s^2+2s+5)} = -\frac{4}{s} + \frac{10}{s^2} + \frac{4s-2}{s^2+2s+5}.$$

Puisque

$$\mathcal{L}(\tilde{y}) = -\frac{4}{s} + \frac{10}{s^2} + \frac{4}{(s+1)^2+4}$$

alors

$$\tilde{y}(\tau) = -4 + 10\tau + 2e^{-\tau}\sin(2\tau)$$

Noter que $\quad \tau = t - 3 \quad$ et $\quad \tilde{y}(\tau) = y(t)$. Donc

$$y(t) = 2e^3e^{-t}\sin(2t-6) + 10t - 34.$$

Exercice IV.

Calculons $\mathcal{F}(f)$ pour

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad a > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

On a $\mathcal{F}(f)(w) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(w) &= \left(\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{-(a+iw)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{A\to+\infty,\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{A} e^{-(a+iw)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{A\to+\infty,\epsilon\to 0^+}\left[\frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)}\right]_{\epsilon}^{A}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{A\to+\infty} e^{-(a+iw)A} = 0$ car $a > 0$ et $\lim_{\epsilon\to 0^+} e^{-(a+iw)\epsilon} = 1$. Donc

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{a+iw}.$$