Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

.:: Module Mathématiques I : Algèbre ::.

Filière :

Sciences de Matière Physique (SMP)
et
Sciences de Matière Chimie(SMC)

Chapitre II: Rappels et compléments sur les nombres réels et complexes.

Par

Prof: Jilali Mikram
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
http://www.fsr.ac.ma/ANO/
Email : mikram@fsr.ac.ma

Année : 2005-2006

TABLE DES MATIERES

Rappels et compléments sur les nombres réels et complexes

1 Les nombres réels

1.1 Loi de composition interne

Dans l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers relatifs et l'ensemble des rationnels, vous connaissez deux lois de composition interne qui sont les opérations : addition et multiplication. On dit que ce sont des lois de composition interne car si

$$(x, y) \in E \times E (E = \mathbb{N} \text{ ou } Z \text{ ou } Q)$$

le résultat de l'addition ou de la multiplication est aussi dans$E$. Ainsi, dans $\mathbb{N}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}, n + m \in \mathbb{N}$ et $n * m \in \mathbb{N}$. Par contre la loi "soustraction" n'est pas une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$, en effet $2 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{N}$ et $2 - 3 \notin \mathbb{N}$. C'est pour remédier à ce défaut que l'on a construit l'ensemble des entiers relatifs Z, où la soustraction est une addition " déguisée " entre le premier nombre et l'opposé du second. L'addition dans Z vérifie alors les propriétés suivantes :

1. elle est commutative : $\forall a \in Z, \forall b \in Z, a + b = b + a$,
2. elle est associative : $\forall a \in Z, \forall b \in Z, \forall c \in Z, a + (b + c) = (a + b) + c$,
3. elle a un élément neutre : $\exists e \in Z$ tel que $\forall a \in Z, a + e = e + a = a$
4. tout élément a admet un opposé : $\forall a \in Z, \exists \widehat{a} \in Z$, tel que $a + \widehat{a} = \widehat{a} + a = e$

Si une loi de composition interne d'un ensemble E, notée par exemple $\diamondsuit$, vérifie les propriétés (2, 3, 4) ci-dessus , où a, b, c sont maintenant des éléments quelconques de E, et le signe " + " remplacé par " $\diamondsuit$ ", on dit qu'elle est une loi de groupe dans E, ou que $(E, \diamondsuit)$ est un groupe. Si en plus, la loi est commutative, le groupe est dit commutatif ou abélien (du nom du mathématicien norvégien Niels H. Abel (1802-1829)). $(Z, +)$ est donc un groupe abélien, dont l'élément neutre n'est autre que 0, et l'opposé d'un entier a, noté $-a$, est simplement obtenu en changeant le signe de a. Ces notations sont utilisées couramment pour les groupes dont la loi est notée avec le signe d'addition ("+ ") (on les appelle groupes additifs). Dans le cas contraire, il n'y a pas de raison particulière que l'élément neutre soit 0, et on utilise plutôt le terme " élément inverse " à la place de l'opposé. Q est aussi un groupe commutatif pour la loi addition. Ce n'est pas le cas de $\mathbb{N}$. On remarquera bien la différence essentielle de sens entre $\exists e, \forall a$ (définition de l'élément neutre) et $\forall a, \exists \widehat{a}$ (définition de l'opposé).

1.2 Les irrationnels

Les lois "addition" et "multiplication" sont des lois de composition interne dans $\mathbb{R}$ qui possèdent les mêmes propriétés que lorsqu'on les considère dans Q ($Q \subset \mathbb{R}$) . Elles donnent donc à $\mathbb{R}$ la structure de corps. Mais l'ensemble $\mathbb{R}$ est plus riche que Q, puisque les rationnels ne permettent pas de représenter tous les nombres "usuels" comme par exemple $\pi, \sqrt{2}, e$ (base du logarithme népérien),....

Un réel qui n'est pas rationnel s'appelle irrationnel. Ainsi, on peut démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, et tels que la fraction est irréductible (c'est-à-dire, les entiers p et q n'ont aucun diviseur commun autre que 1). On a alors $2q^2 = p^2$ donc p^2 est pair donc p est pair, soit $p = 2p'$. On en déduit que $2q^2 = 4p'^2$ donc q^2 est pair donc q est pair, soit $q = 2q'$, ce qui donne $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'}$ ce qui est contraire à l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction $\frac{p}{q}$.

1.3 L'ordre dans $\mathbb{R}$

Vous savez déjà que deux nombres réels quelconques peuvent être comparés à l'aide de la relation " $\leq$ " définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a \leq b) \Leftrightarrow (a - b \leq 0)$$

Cette relation est une relation d'ordre:

On définit le plus grand (resp. le plus petit) des nombres réels a et b par

$$\max\{a, b\} = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } b \leq a \end{cases} \quad \min\{a, b\} = \begin{cases} b & \text{si } b \leq a \\ a & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

Rappelons les propriétés de compatibilité suivantes entre la relation d'ordre " $\leq$ " et les lois d'addition et de multiplication dans $\mathbb{R}$ (qui font de $\mathbb{R}$ un corps ordonné) :

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, (a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c)$,
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, ((0 \leq a) et (0 \leq b)) \Rightarrow (0 \leq ab)$.

Notons que la deuxième propriété ci-dessus est équivalente à :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, (a \leq b) \text{ et } (0 \leq c) \Rightarrow (ac \leq bc)$$

Terminons par la propriété fondamentale suivante dite propriété d'Archimède: si A est un nombre réel, il existe un entier naturel n tel que $n > A$.

1.4 Partie entière d'un nombre réel x : $E(x)$

Commençons par énoncer le résultat important suivant :

Proposition 1.1 *Soit a un nombre réel strictement positif et soit x un nombre réel, il existe un unique entier $k \in Z$ tel que*

$$ka \leq x < (k+1)a.$$

En particulier si l'on prend $a = 1$, ceci signifie qu'un nombre réel est toujours compris entre deux nombres entiers relatifs successifs. Par exemple, le réel 3,2 est tel que $3 \leq 3,2 < 4$ et le réel $-3,2$ est tel que $-4 \leq -3,2 < -3$. On a : $1 \leq \sqrt{2} < 2$,....

Si l'on prend maintenant $a = 0,1$ dans la proposition précédente, on a $14a \leq \sqrt{2} < 15a$, $31a \leq \pi < 32a$, $27a \leq e < 28a$.

Définition 1.1 *Soit $x$un nombre réel, le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la partie entière de x, nous le noterons $E(x)$.*

Par exemple, on a $E(3,2) = 3$, $E(-3,2) = -4$, et $E(\sqrt{2}) = 1$.

1.5 Les intervalles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}$

Définition 1.2 *Soient a et b deux nombres réels. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, toute partie de $\mathbb{R}$, ayant l'une des cinq formes ci-dessous :*

1. *$\emptyset$ le sous-ensemble vide de $\mathbb{R}$*
2. *$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$*
3. *$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$*
4. *$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$*
5. *$\mathbb{R}$.*

Lorsque $a \geq b$, l'intervalle ouvert $]a, b[$, se réduit à la partie vide de $I\!R$. Lorsque l'on examine l'intersection de deux intervalles ouverts de l'une ou l'autre des formes $]a, b[$, $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, on voit que cette intersection est soit vide, soit à nouveau un intervalle de l'une de ces trois formes, d'où le résultat

Proposition 1.2 *L'intersection d'un nombre fini d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert.*

De la même manière nous introduisons la définition suivante

Définition 1.3 *Soient a et b deux nombres réels. On appelle intervalle fermé de $I\!R$, toute partie de $I\!R$, ayant l'une des cinq formes ci-dessous :*

1. *$\emptyset$ le sous-ensemble vide de $I\!R$*
2. *$[a, b] = \{x \in I\!R, a \leq x \leq b\}$*
3. *$]-\infty, a] = \{x \in I\!R, x \leq a\}$*
4. *$[a, +\infty[= \{x \in I\!R, a \leq x\}$*
5. *$I\!R$.*

Enfin, on appelle segment tout intervalle fermé de la forme $[a, b]$ avec $a \leq b$. Remarquons que le segment $[a, a]$ est l'ensemble $\{a\}$ dont le seul élément est a.

Notons tout d'abord qu'un intervalle fermé se réduit à la partie vide lorsque $b < a$. Nous voyons en outre que l'intersection de deux intervalles fermés est soit vide soit un intervalle fermé. Nous avons donc, comme pour les intervalles ouverts, la propriété ci-dessous

Proposition 1.3 *L'intersection d'un nombre fini d'intervalles fermés est un intervalle fermé.*

1.6 Les intervalles dans $I\!R$

Définition 1.4 *Soient a et b deux nombres réels. On appelle intervalle de $I\!R$, toute partie de $I\!R$, ayant l'une des deux formes ci-dessous :*

1. *intervalle ouvert de $I\!R$,*
2. *intervalle fermé de $I\!R$,*
3. *$]a, b] = \{x \in I\!R, a < x \leq b\}$,*

4. $[a, b[= \{x \in I\!R, a \leq x < b\}$

Lorsque $a < b$, les nombres a et b s'appellent les extrémités des intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, le nombre $b - a$ est la longueur de l'intervalle, le nombre $\frac{a+b}{2}$ est le centre de l'intervalle.

Enfin nous dirons qu'un nombre réel x est compris entre a et b si l'on a $a \leq x \leq b$ dans le cas où $a \leq b$ ou bien si l'on a $b \leq x \leq a$ dans le cas où $b < a$.

Nous allons donner maintenant une propriété caractérisant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4 *Un sous-ensemble J de $I\!R$ est un intervalle si et seulement si, quels que soient les réels x et y de J, l'intervalle fermé $[x, y]$ est inclus dans J .*

Voici encore deux propositions importantes. La première se démontre très aisément, il suffit de faire une représentation graphique. La deuxième est plus compliquée et repose sur la proposition 1.1

Proposition 1.5 *Soit I un intervalle ouvert, alors quel que soit $x \in I$, il existe un $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]x - \alpha, x + \alpha[$ soit inclus dans I.*

Démonstration : Traitons le cas où I est de la forme $]a, b[$, avec $a < b$. Les autres cas sont plus simples. Nous avons donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(x \in I) \Leftrightarrow (a < x < b)$$

Choisissons un α vérifiant

$$0 < \alpha < min(x - a, b - x)$$

Il vient alors

$$a = x - (x - a) < x - \alpha < x < x + \alpha < x + (b - x) = b$$

Proposition 1.6 *Dans tout intervalle ouvert non vide, il y a une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.*

Ceci s'écrit souvent "entre deux rationnels il y a au moins un irrationnel et entre deux réels il y a au moins un rationnel".

1.7 Minorant, majorant

Définition 1.5 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que*

- *A est majorée s'il existe un nombre réel M tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$. Un tel nombre M s'appelle un majorant de A,*
- *A est minorée s'il existe un nombre réel m tel que $\forall x \in A, m \leq x$. Un tel nombre m s'appelle un minorant de A,*
- *A est bornée si A est majorée et minorée.*

Un intervalle $[a, +\infty[$ est minoré, en effet $a, a-1$ sont des minorants par exemple. Les intervalles $[a, b]$, $]a, b[$ sont bornés, ils sont en effet minorés par a et majorés par b.

Proposition 1.7 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe un nombre $M \geq 0$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.*

La démonstration est à faire en exercice.

Remarque 1.1 *Un majorant ou minorant de A peut appartenir à A.*

Par exemple a est un majorant de $]-1, a]$, c'est dans ce cas le plus grand élément de l'ensemble. Il existe des cas où c'est impossible. Par exemple $A =]-1, a[$ n'admet pas de majorant qui appartienne à A.

Démonstration: raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un majorant M de A ($x \leq M, \forall x \in A$) tel que $M \in A$ ($M < a$). Puisque $M < a$, il existe un réel α tel que $M < \alpha < a$, c'est-à -dire un élément α de A tel que $M < \alpha$, ce qui est absurde puisque M est un majorant de A.

1.8 Borne supérieure

Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$. Si A possède un plus grand élément, c'est-à -dire s'il existe $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$, alors a est le plus petit majorant de A. Ceci veut dire que a est un nombre réel s ayant les deux propriétés :

- s est un majorant de A,
- si M est un majorant de A, alors $s \leq M$.

Les deux propriétés de s énoncées ci-dessus n'impliquent pas que s appartienne à A. Il est clair que si un tel plus petit majorant existe, il est unique.

Définition 1.6 *Le plus petit majorant d'une partie A non vide et majorée s'appelle sa borne supérieure et se note* $\sup A$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, le segment $[a, b]$ et l'intervalle $]-1, b]$ ont pour plus grand élément b, donc $\sup[a, b] = \sup]-1, b] = b$.

Lorsque A ne contient pas de plus grand élément (par exemple $A = [a, b[$), l'existence de sa borne supérieure est loin d'être évidente . La proposition suivante donne une caractérisation de la borne supérieure.

Proposition 1.8 *(Caractérisation de la borne supérieure).*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$*, non vide et majorée, la borne supérieure de A est l'unique réel s tel que*

- *si* $x \in A$*, alors* $x \leq s$*,*
- *pour tout réel* $t < s$*, il existe un nombre* $x \in A$ *tel que* $t < x$*.*

Démonstration : Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t < \sup A$, puisque $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on en déduit que t n'est pas un majorant de A. C'est donc qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $x > t$. Le nombre réel $s = \sup A$ possède donc les propriétés de la proposition.

Réciproquement, soit s un réel vérifiant les propriétés et démontrons que c'est le plus petit des majorants de A. Tout d'abord la première propriété implique que s est un majorant de A. D'autre part la deuxième montre que si $t < s$, t n'est pas un majorant de A. Tout majorant de A est donc supérieur ou égal à s. Autrement dit s est bien le plus petit des majorants de A.

Exemple : soit $I =]-1, b[$, alors b est un majorant de I. En utilisant la caractérisation précédente, montrons que $\sup]-1, b[= b$. En effet, si $t < b$, alors on a $t < \frac{t+b}{2} < b$ et de plus $\frac{t+b}{2} \in I$.

1.9 Borne inférieure

De la même manière que l'on a défini la borne supérieure, on peut donner la définition suivante de la borne inférieure.

Définition 1.7 *Soit A une partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$*, le plus grand minorant de A s'appelle la borne inférieure et se note* $\inf A$.

On peut alors démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.9 *(Caractérisation de la borne inférieure).*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$*, non vide et minorée, la borne inférieure de A est l'unique réel s tel que*

- *si $x \in A$, alors $s \leq x$,*

- *pour tout réel $t > s$, il existe un nombre $x \in A$ tel que $x < t$.*

Par exemple, $I = [a, +1[$ admet un plus petit élément a qui est donc la borne inférieure de A, puisque c'est le plus grand des minorants de A (le démontrer en exercice). Et $I =]a, +1[$ admet a comme borne inférieure d'après la proposition précédente.

En effet:

- $\forall x \in I, a < x$,

- pour tout réel $t > a$, il existe un réel $x = \frac{a+t}{2}$ tel que $a < x < t$, et donc tel que $x \in A$ et $x < t$.

1.10 L'axiome de la borne supérieure

Lorsque A ne contient pas de plus grand élément (par exemple $A = [a, b[$), l'existence de sa borne supérieure est loin d'être évidente. En fait, il existe plusieurs constructions équivalentes de $\mathbb{R}$, dont l'une consiste justement à considérer comme un des axiomes de $\mathbb{R}$ la propriété suivante, appelée propriété ou axiome de la borne supérieure:

Axiome de la borne supérieure: Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

On peut présenter intuitivement de la façon suivante cette existence de la borne supérieure. Soit s_1 un majorant de A, et a_1 un réel non majorant de A (donc $a_1 < s_1$). Si le milieu de l'intervalle $[a_1, s_1]$ est un majorant de A, appelons le s_2, et posons $a_2 = a_1$. Si non, on appelle a_2 ce milieu et pose $s_2 = s_1$. On construit ainsi un segment inclus dans $[a_1, s_1]$, de longueur moitié, et dont l'extrémité droite est un majorant de A, et l'extrémité gauche non. Recommençant le processus, qui porte d'ailleurs un nom : la dichotomie, on voit apparaître une succession de segments emboîtés, de longueur chaque fois diminuée de moitié, et dont l'extrémité droite est toujours un majorant de A, et l'extrémité gauche non. Le "point limite" commun des extrémités de ces segments sera la borne cherchée (on verra la définition précise de cette notion de limite plus tard). Mais attention, c'est justement l'existence de ce point limite qui pose problème ! On peut montrer par exemple que dans Q, les segments emboîtés n'ont pas forcément de point limite commun, le même argument ne marche donc pas. La différence entre Q et $\mathbb{R}$ réside essentiellement dans cette question d'existence de borne supérieure (ou, ce qui revient au même, l'existence de points limites communs des segments emboîtés). On dira pour cela que $\mathbb{R}$ est complet, tandis que Q ne l'est pas.

L'axiome n'est pas valable dans Q (à faire en exercice).

On a évidemment de même (l'un se déduisant de l'autre) :

Axiome de la borne inférieure : Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

2 Les nombres complexes

2.1 Lois de composition interne de $\mathbb{R}^2$

La nécessité d'étendre $\mathbb{R}$ résulte du fait que certaines équations algébriques n'ont pas de racine dans $\mathbb{R}$, la plus célèbre étant $x^2 + 1 = 0$. Mais il y a une différence fondamentale entre le passage de Q à $\mathbb{R}$ et le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Dans le premier cas, il s'agit d'une extension destinée à remplir l'espace laissé vide entre les rationnels , dans le deuxième cas, il s'agit d'une extension algébrique : on va agrandir l'ensemble en lui rajoutant une composante, la partie imaginaire, pour pouvoir résoudre des équations qui n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.1 *Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux lois de composition :*

- *l'addition $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,*
- *la multiplication $(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.*

Vous montrerez en exercice que l'addition donne à E une structure de groupe commutatif et que la multiplication a les propriétés nécessaires pour que E ait une structure de corps commutatif. Ce corps, noté $\mathbb{C}$, est appelé le corps des nombres complexes. Un nombre complexe, i.e. un élément de $\mathbb{C}$, est donc un couple de réels, obéissant aux lois de composition précédentes.

2.2 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

En utilisant les règles de l'addition et de la multiplication ci dessus, on vérifie :

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$$

On identifie le nombre complexe (x, 0) (dont la $2^{éme}$ composante est nulle) au réel x. On note i le nombre complexe $(0, 1)$, on a donc $i^2 = -1$, c'est à dire i est une des racines de l'équation $z^2 + 1 = 0$.

On a d'autre part:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)$$

On peut donc écrire un nombre complexe $z = (x, y)$ sous la forme dite canonique : $z = x + iy$. On dit que x est la partie réelle et y la partie imaginaire de z, et on les note respectivement $\Re ez$ et $\Im mz$:

$$z = x + iy = \Re ez + i\Im mz$$

Proposition 2.1 *Soient z et z' deux nombres complexes, alors on a*

$$(zz' = 0) \Leftrightarrow ((z = 0)ou(z' = 0))$$

Démonstration : - L'implication $\Leftarrow$ est évidente. Réciproquement, supposons que $zz' = 0$.

Alors, soit $z = 0$ et c'est terminé, soit $z \neq 0$ et l'on a

$$z' = (\frac{1}{z}z)z' = \frac{1}{z}(zz') = \frac{1}{z}0 = 0.$$

Cette propriété, qui est triviale dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, n'est pas vraie dans certains ensembles. Par exemple on verra plus tard que l'on peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nul!.

2.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 2.2 *Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier $n \geq 2$, on a:*

$$\begin{array}{rcl} (z+z')^n & = & z^n + C_1^n z^{n-1}z' + ... + C_k^n z^{n-k}z'^k + ... + C_{n-1}^n zz'^{n-1} + z'^n \\ & = & \sum_{k=0}^n C_k^n z^{n-k}z'^k \end{array}$$

Démonstration: - La formule se démontre par récurrence.

1. Elle est vraie pour $n = 2$ puisque $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ et que $C_1^2 = 2$.

2. Supposans la vraie pour $n - 1$, c'est-à-dire supposons que

$$(z + z')^{n-1} = z^{n-1} + ... + C_p^{n-1} z^{n-1-p} z'^p + ... + z'^{n-1}$$

On en déduit que

$$(z + z')^n = (z + z')(z + z')^{n-1} =$$

$$z(z+z')^{n-1} + z'(z+z')^{n-1} = z(z^{n-1} + ... + C_k^{n-1} z^{n-1-k} z'^k + ... + z'^{n-1}) +$$

$$+z'(z^{n-1}+...+C_{k-1}^{n-1}z^{n-1-(k-1)}z'^{k-1}+...+z'^{n-1}) = z^n+...+(C_k^{n-1}+C_{k-1}^{n-1})z^{n-k}z'^k+...+z'^n$$

Calculons, pour $1 \leq k \leq n-1$, la somme :

$$C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}((n-k)+k) = C_k^n$$

d'où découle le résultat annoncé.

2.4 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 2.2 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, alors*

- *le nombre complexe $x - iy$ s'appelle le conjugué de z et se note $\overline{z}$*
- *le nombre réel $\sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module de z et se note $|z|$*

Voici un résumé des principales propriétés des conjugués et des modules :

- $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$, $\forall z \neq 0$ $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $|z|^2 = z\overline{z}$, $|z| = |\overline{z}|$, $|zz'| = |z||z'|$, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
- $\Re ez = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\Im mz = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$
- $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$ et $\forall z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Démontrons quelques-unes de ces propriétés (vérifier les autres pour être sûr de bien les manipuler):

- Tout d'abord, pour $z = x + iy(\neq 0)$, nous avons $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

De même, si $z \neq 0$, on a $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ puisque

$$|\frac{1}{z}|^2 = (\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (\frac{y}{x^2+y^2})^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \text{ et } (\frac{1}{|z|})^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Et enfin le calcul de $|z+z'|^2$ s'obtient par

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$$

Or

$$z\overline{z'} = \overline{\overline{z}z'}$$

d'où

$$z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2\Re e(z\overline{z'})$$

de plus

$$z\overline{z} = |z|^2,\ z'\overline{z'} = |z'|^2$$

de sorte que l'on a bien :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\Re e(z\overline{z'}) + |z'|^2$$

2.5 Inégalité triangulaire

Proposition 2.3 *Pour tous nombres complexes z et z', on a:*

- $|\Re e z| \leq |z|$ *et* $|\Im m z| \leq |z|$,
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)*
- $||z| - |z'|| \leq |z-z'|$.

Démonstration:

- Si $z = x+iy$, alors $|z|^2 = x^2+y^2$, $|\Re e z|^2 = (\Re e z)^2 = x^2$ et $|\Im m z|^2 = (\Im m z)^2 = y^2$, ce qui donne le résultat puisque :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+,\ (a^2 \leq b^2) \Leftrightarrow (a \leq b)$$

- De même, l'inégalité triangulaire est équivalente à $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$. Or

$$(|z|+|z'|)^2 - |z+z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 - (|z|^2 + 2\Re e(zz') + |z'|^2) =$$

$$2(|z||z'| - \Re e(zz')) = 2(|zz'| - \Re e(zz'))$$

  La dernière quantité est positive ou nulle d'après les propriétés des complexes, d'où le résultat.

- La troisième est obtenue en appliquant l'inégalité triangulaire successivement à $z = (z-z') + z'$ et $z' = (z'-z) + z$ Elle vous est laissée à titre d'exercice.

2.6 Argument d'un nombre complexe

Les propriétés des fonctions trigonométriques cosinus et sinus, nous permettent d'affirmer que, étant donnés deux nombres réels a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$, il existe un angle θ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$.

Nous savons aussi que :

$$((\cos\theta = \cos\phi) \text{ et } (\sin\theta = \sin\phi)) \Leftrightarrow (\theta = \phi + 2k\pi, k \in Z)$$

on dit alors que θ est congru à ϕ modulo 2π et on le note $\theta \equiv \phi[2\pi]$. Autrement dit, l'angle θ défini par les équations $(II.3.3)$ n'est défini qu à $2k\pi$ près. Soit maintenant $z = x + iy$, un nombre complexe non nul, alors on peut l'écrire

$$z = |z|(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|})$$

Il existe un θ (défini à $2k\pi$ près) tel que :

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

puisque

$$(\frac{x}{|z|})^2 + (\frac{y}{|z|})^2 = 1$$

Ceci nous conduit à la définition

Définition 2.3 *Pour tout nombre complexe z différent de* 0 *le nombre réel θ , défini à $2k\pi$ près, tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle l'argument de z et se note* $\arg z$.

Proposition 2.4 *Pour tous nombres complexes z et z' non nuls on a*

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi] \textit{ et } \arg\frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

Démonstration: Soient $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = |zz'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')) = |zz'|(\cos(\theta+\theta') + i(\sin(\theta+\theta'))$$

d'où la première relation. La deuxième relation est laissée en exercice.

Remarque 2.1 *Il est parfois utile de choisir une détermination particulière de l'argument. Certains auteurs choisissent l'unique θ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$, d'autres celui de l'intervalle $]-\pi, +\pi]$. Nous ferons le premier choix et noterons donc Argz$(\in [0, 2\pi[)$ cette détermination de l'argument(détermination principale).*

2.7 Représentation graphique des nombres complexes

Nous avons identifié un nombre complexe $z = x + iy$ à un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$, nous pouvons donc représenter ce nombre complexe par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de composantes x et y dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le nombre z s'appelle l'affixe du point M. Puisque, dans le paragraphe précédent nous avons écrit z sous la forme trigonométrique $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont donc $|z|cos\theta$ et $|z|\sin\theta$, ce qui veut dire que $|z|$ représente la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'argument θ de z est une mesure de l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. Il résulte des opérations que l'on a construites sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on a étendues à $\mathbb{C}$ que si z est associé à $\overrightarrow{OM}$, si z' est associé à $\overrightarrow{OM}'$ alors $z + z'$ est associé à $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}'$.

2.8 La formule de De Moivre

Proposition 2.5 *Pour tout nombre réel θ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Démonstration: Cette relation se démontre par récurrence:
La formule est évidemment vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Supposons la vraie pour $n - 1$, c'est-à-dire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} = cos(n-1)\theta + isin(n-1)\theta$$

, et démontrons la pour n. Il vient :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = (\cos\theta+i\sin\theta)^{n-1}(\cos\theta+i\sin\theta) = (\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta)(\cos\theta+i\sin\theta) =$$

$$(\cos(n-1)\theta\cos\theta-\sin(n-1)\theta\sin\theta)+i(\cos(n-1)\theta\sin\theta+\sin(n-1)\theta\cos\theta) = \cos n\theta+i\sin n\theta$$

2.9 Le théorème de d'Alembert - Gauss

Le théorème suivant, de d'Alembert - Gauss, montre que $\mathbb{C}$ permet de résoudre certaines équations algébriques :

théroème 2.1 *Toute équation algébrique dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire toute équation de la forme*

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0 = 0 \quad (II.3.4)$$

où les coefficients $a_i, 0 \leq i \leq n$ sont des nombres complexes, $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$, admet au moins une racine z dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 2.1 *L'équation $(II.3.4)$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (en comptant chaque racine multiple autant de fois que sa multiplicité).*

La démonstration du théorème sort du cadre de ce cours, par contre on verra (au chapitre sur les polynômes) que le corollaire est tout à fait accessible (si l'on admet le théorème, bien entendu).

Par exemple, l'équation $z^2 + 1 = 0$ admet pour racines les nombres complexes $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

Les paragraphes suivants permettent d'obtenir les racines dans certains cas particuliers.

2.10 Racines nièmes de l'unité

Étant donné un nombre complexe α non nul, on va chercher tous les nombres complexes z possibles vérifiant $z^n = \alpha$. Ces nombres complexes seront appelés les racines nièmes de α . On démontre que tout nombre complexe non nul admet exactement n racines nièmes.

Proposition 2.6 *Soit $n \in I\!N$ tel que $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ non nul. Alors*

$$(z^n = \alpha) \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|\alpha|} \text{ et } Argz = \frac{Arg\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ où } 0 \leq k \leq n-1$$

Démonstration: a/ ($\Rightarrow$) Si $z^n = \alpha$, alors $|z|^n = |z^n| = |\alpha|$, d'où $|z| = \sqrt[n]{|\alpha|}$ et aussi $\text{Arg}z^n = \text{Arg}\alpha$, ce qui donne (proposition II.3.4) $n\text{Arg}z \equiv \text{Arg}\alpha[2\pi]$. Il existe donc $k \in Z$ tel que $n\text{Arg}z = \text{Arg}\alpha + 2k\pi$. Les inégalités

$$0 \leq \text{Arg}z < 2\pi \text{ et } 0 \leq \text{Arg}\alpha < 2\pi$$

donnent aisément $0 \leq k \leq n-1$, d'où le résultat.

b/ ($\Leftarrow$) Supposons les relations de droite vérifiées, alors

$$\cos(n\text{Arg}z) = \cos\text{Arg}\alpha \text{ et } \sin(n\text{Arg}z) = \sin\text{Arg}\alpha$$

et d'après la formule de De Moivre, il vient

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n(\cos\text{Arg}z + i\sin\text{Arg}z)^n \\ &= |\alpha|(\cos n\text{Arg}z + i\sin n\text{Arg}z) \\ &= |\alpha|(\cos\text{Arg}\alpha + i\sin\text{Arg}\alpha) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Un cas particulier important est celui des racines nièmes de l'unité. Elles sont solution de $z^n = 1$ et correspondent à $\alpha = 1$. On obtient donc

$$|z| = 1 \text{ et } \text{Arg}z = \frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1$$

soit les racines suivantes :

$$z_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$$

Les racines de l'unité étant de module 1,elles sont représentées graphiquement sur le cercle de rayon 1 et de centre O.

Remarque importante: La définition des racines d'un nombre complexe est une extension stricte du cas réel. Si $a \in I\!R$ est strictement positif, on appelle habituellement racine carrée de a le nombre positif r tel que $r^2 = a$. En fait, si l'on note par $\sqrt{a}$ ce nombre r, le nombre $r' = -\sqrt{a}$ a aussi son carré égal à a, donc est une racine de a au sens de la définition ci-dessus. C'est par convention, que l'on dit que "dans $\mathbb{R}$, le nombre positif $\sqrt{a}$ est la racine de a", même si, "dans $\mathbb{C}$, a admet deux racines, les nombres $\sqrt{a}$ et $(-\sqrt{a})$", toutes deux réelles !

Si $a \in \mathbb{C}$ (non réel), alors $\sqrt{a}$ n'a pas de sens puisque le nombre complexe a a deux racines carrées et qu'il n'existe pas dans ce cas de convention pour privilégier l'une ou l'autre. Ceci est précisé dans la proposition suivante:

Proposition 2.7 *Tout nombre complexe non réel z admet exactement deux racines carrées, qui sont opposées.*

Démonstration: Soit $z = a + ib$; $b \neq 0$ et $r = x + iy$;

$$z = r^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & |z| \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 & = & \frac{|z|+a}{2} \\ y^2 & = & \frac{|z|-a}{2} \\ 2xy & = & b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \varepsilon\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \\ y & = & \varepsilon'\sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \\ \varepsilon, \varepsilon' & \in & \{-1, 1\}, \quad \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } b \end{array} \right.$$

2.11 Racines d'une équation du second degré

Soient a, b, c trois nombres complexes, on suppose $a \neq 0$, on recherche les nombres complexes z qui vérifient

$$az^2 + bz + c = 0$$

Ceci va généraliser ce que l'on sait faire lorsque les coefficients a, b, c sont réels. On peut d'ailleurs faire un raisonnement semblable.

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a(z + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) \end{aligned}$$

On définit le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors $az^2 + bz + c = a((z + \frac{b}{2a})^2)$ ce qui implique que $\frac{-b}{2a}$ est racine double de l'équation.

Si $\Delta \neq 0$, si on note r_0 et r_1 les deux racines carrées (complexes) de Δ , alors $\frac{r_0}{2a}$, $\frac{r_1}{2a}$ sont les deux racines carrées de $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, on a donc :

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 &\Leftrightarrow (z+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}\\
&\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{r_0}{2a} \text{ ou } z+\frac{b}{2a}=\frac{r_1}{2a}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-b+r_0}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b+r_1}{2a}
\end{aligned}
$$

Montrer en exercice que dans le cas a, b, c réels, on retrouve les formules que vous connaissez.

Exemple: Résoudre l'équation du second degré :

$$z^2 - iz + 1 - 3i = 0$$

on a

$$\Delta = -5 + 12i$$

on cherche $r = x + iy$ tel que $r^2 = \Delta = -5 + 12i$

D'aprés la proposition (2.7) on a :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x &=& \varepsilon\sqrt{\frac{|\Delta|-5}{2}}\\
y &=& \varepsilon'\sqrt{\frac{|\Delta|+5}{2}}\\
\varepsilon, \varepsilon' &\in& \{-1,1\}, \quad \varepsilon\varepsilon' > 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{
\begin{array}{lcl}
x &=& 2 \text{ et } y=3\\
& \text{ou} & \\
x &=& -2 \text{ et } y=-3
\end{array}
\right. \quad \text{car } |\Delta| = \sqrt{25+144} = 13
$$

on obtient $r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$, et donc

$$z_1 = \frac{i + r_1}{2} = \frac{4i + 2}{2} = 1 + 2i$$

et

$$z_2 = \frac{i + r_2}{2} = \frac{-2i - 2}{2} = -1 - i$$

2.12 Introduction à l'exponentielle complexe

Il est commode de poser

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Cette notation dite "exponentielle complexe", a priori curieuse, est justifiée par le fait qu'elle entraîne les règles opératoires qui rappellent les fonctions de l'exponentielle réelle.

En effet, vous montrerez en exercice que

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, e^{i0} = 1, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

Remarquons que

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{(\cos\theta + i\sin\theta)} = cos\theta - i\sin\theta = cos(-\theta) + isin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

Cette notation permet d'écrire un nombre complexe donné par son module ρ et son argument θ sous la forme simplifiée

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Ainsi la formule de De Moivre s'écrit

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}$$

Les formules d'Euler expriment $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à l'aide de l'exponentielle complexe :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Attention ! $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ n'implique pas que $\theta_1 = \theta_2$ mais que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in Z$.

2.13 Application au calcul trigonométrique

L'utilisation directe de la formule de De Moivre permet d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, lorsque l'on utilise la formule du binôme de Newton.

Par exemple, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = cos3\theta + i\sin 3\theta$, et la formule du binôme de Newton donne

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = cos^3\theta + 3icos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta sin^2\theta - isin^3\theta$$

d'où

$$\cos 3\theta = cos^3\theta - 3\cos\theta sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = 3cos^2\theta\sin\theta - sin^3\theta$$

Mais ce qui est le plus utile c'est l'inverse ! c-à-d de pouvoir exprimer les puissances de $\cos\theta et \sin\theta$ en expression linéaire de $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$, par exemple pour pouvoir les intégrer (voir le cours sur les intégrales). On peut alors utiliser l'exponentielle complexe . Ainsi

$$\cos n\theta = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$$

$$\sin n\theta = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^n$$

On développe alors par le binôme de Newton et on regroupe les termes $e^{ik\theta}$ et $e^{-ik\theta}$. Illustrons par un exemple. Choisissons $n = 4$ et appliquons la méthode précédente :

$$\begin{aligned}
cos^4\theta &= \frac{1}{2^4}((e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 \\
&= \frac{1}{16}(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6) \\
&= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$