Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

.:: Module Mathématiques I : Algèbre ::.

Filière :

Sciences de Matière Physique (SMP)
et
Sciences de Matière Chimie(SMC)

Chapitre III: Polynômes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Chapitre IV: Fractions rationnelles

Par

Prof: Jilali Mikram
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
http://www.fsr.ac.ma/ANO/
Email : mikram@fsr.ac.ma

Année : 2005-2006

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1

Polynômes

1.1 Présentation des polynômes

Définition 1.1.1 *On se place sur un corps commutatif* $\Bbbk$*. Un polynôme est défini par la donnée de ses coefficients* $a_0, , ..., a_n$ *éléments de* $\Bbbk$*.* X *étant une lettre muette, on note* $P(X) = a_0 + a_1X + ...a_nX^n$ *ou* $\sum\limits_{k\geq 0} a_kX^k$*, étant entendu que la somme ne comporte qu'un nombre fini de* a_k *non nuls.*

On distingue parfois le polynôme $P(X)$ (qui, par construction, est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls (*)) de la fonction polynômiale associée:

$$\begin{array}{rcl} P : \Bbbk & \longrightarrow & \Bbbk \\ x & \longrightarrow & a_0 + a_1x + ...a_nx^n = P(x) \end{array}$$

Celle-ci est nulle si et seulement si : $\forall\ x \in \Bbbk, P(x) = 0$(**)

On a bien évidemment l'implication :

$$P(X) = 0 \Longrightarrow \forall x \in \Bbbk,\ P(x) = 0.$$

Mais la réciproque est loin d'être évidente. Nous allons montrer que, lorsque $\Bbbk$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a équivalence, ce qui permet de confondre polynôme et fonction polynômiale. La phrase $P = 0$ gardera cependant de préférence le sens (*).

Proposition 1.1.1 *:*

i) Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors si la fonction polynômiale associée à P est identiquement nulle. P a tous ses coefficients nuls.

ii) Soit P et Q deux polynômes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors, si les fonctions polynomiales associées sont égales (prennent les mêmes valeurs), les deux polynômes sont égaux (ont leurs coefficient égaux).

Démonstration:

i) $\mathbb{k}$ contenant $\mathbb{R}$, nous supposons que la variable x ne prend que des valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit

$$P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \text{ tel que } \forall\, x \in \mathbb{k}, P(x) = 0$$

Alors, pour $x = 0$, on obtient $a_0 = 0$. Donc:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ a_1 x + ... + a_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \forall\, x \neq 0\ ,\ a_1 + ... + a_n x^{n-1} = 0$$

On ne peut plus prendre $x = 0$, cependant, on peut prendre la limite lorsque x tend vers 0, ce qui donne $a_1 = 0$, etc...

ii) se prouve en appliquant i) à $P - Q$.

Si $P \neq 0$, on appelle degré de P le maximum des k, tels que $a_k \neq 0$. Si $P = 0$, on pose $deg(P) = -\infty$

Si P est de degré n, $a_n X^n$ est le terme (ou monôme) dominant. Si $a_n = 1$, le polynôme est dit unitaire ou normalisé.

On note $\mathbb{k}[X]$ l'ensemble des polynômes sur le corps $\mathbb{k}$.

1.2 Lois sur $\mathbb{k}[X]$

a) Somme de deux polynômes:

Si $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$, alors $P + Q = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) X^k$

On a :

deg$(P + Q) \leq$ max(deg(P), deg(Q). L'égalité a lieu si les polynômes sont de degrés différents, ou s'ils sont de même degré et que les termes de plus haut degré ne s'éliminent pas.

b) Produit de deux polynômes:

Si $P = \sum\limits_{k\geq 0} a_i X^k$ et $Q = \sum\limits_{k\geq 0} b_k X^k$, alors $PQ = \sum\limits_{k\geq 0} \sum\limits_{i=0} a_i b_{k-i} + b_k X^k$

On a :

$$deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)$$

Remarque

Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

c) Produit d'un polynôme par un scalaire:

Si $P = \sum\limits_{k\geq 0} a_k X^k$, alors $\lambda P = \sum\limits_{k\geq 0} \lambda a_k X^k$

On note $\mathbb{k}_n [X] = \{P \in \mathbb{k} [X] \;\; deg(P) \leq n)\}$.

1.3 Division euclidienne

(Ou division suivant les puissanes décroissantes)

Donnons un exemple :

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 + X^3 - X^2 + X + 1 & 2X^2 - X - 2 \\ 2X^4 - X^3 - 2X^3 & \hline 2X^3 + X^2 + X + 1 & X^2 + X + 1 \\ 2X^3 - X^2 - 2X & \\ \hline 2X^2 + 3X + 1 & \\ 2X^2 - X - 2 & \\ \hline 4X + 3 & \end{array}$$

Nous affirmons alors que :

$$\underbrace{2X^4 + X^3 - X^2 + X + 1}_{Dividende} = \underbrace{(2X^2 - X - 2\;)}_{diviseur}\;\underbrace{(X^2 + X + 1\;)}_{quotient} + \underbrace{(4X + 3)}_{Reste}$$

Ce résultat est général :

Proposition 1.3.1 *Soit A et B deux polynômes tel que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q.R)$ tels que :*

$$A = BQ + R,\ \ avec\ deg(R) < deg(B)$$

Q est le quotient, R est le reste.

Lorsque le reste est nul, on dit que B divise A. Un polynôme qui n'est divisible que par lui même (à une constante multipliative près) ou par les constantes est dit irréductible. Par exemple , $X - 3$ dans $\mathbb{C}$, ou $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

On notera l'analogie dans l'énoncé avec la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Les démonstrations; en ce qui concerne l'unicité, sont également analogues.

Démonstration:
Montrons l'unicité :
Si $A = BQ + R = BQ' + R'$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ et $\deg(R') < \deg(B)$, on a $B(Q - Q') = R' - R$; avec $\deg(B(Q - Q')) = \deg(B) + \deg(Q - Q')$ et $\deg(R - R') \leq Max(\deg(R),\ \deg(R')) < \deg(B)$.
Il ne peut y avoir égalité que si $Q - Q' = 0$ et alors $R - R' = 0$.

Montrons l'existence:
Supposons que $\deg(A) = n$ et $\deg(B) = p$

1$^{\text{er}}$ cas: si $n < p$ alors on prend $Q = 0$ et $R = A$.

2èmecas: si $n \geq p$.
On procède par récurrence sur le degré n de A .
Supposons que la propriété est vraie jusqu'à $n - 1$.

Soit $A = a_n x^n + ... + a_0$ et $B = b_p x^p + ... + b_0$

On définit $A' = A - \frac{a_n}{bp}\ x^{n-p}.B.$

A' est degré $n - 1$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$A' = BQ' + R' \text{ avec } \deg(R)' < \deg(B)$$

Or $\quad A = A' + \frac{a_n}{bp}\ x^{n-p} B$

$$= BQ' + R' + \frac{a_n}{bp}\ x^{n-p}.B$$

$$= B(Q' + \frac{a_n}{bp}\ x^{n-p}) + R'$$

$$= BQ + R' \text{ avec } degR' < degB$$ C.Q.F.D

1.4 Zéros d'un poynôme

Définition 1.4.1 *On dit que a, élément de $\mathbb{k}$, est un zéro ou une racine du polynôme P si a annule la fonction polynômiale associée à P, c'est à dire $P(a) = 0$.*

On a alors le résultat suivant:

Proposition 1.4.1 *:*
a est un zéro de P si et seulement si P est divisible par $X - a$.

Démonstration:
Si P est divisible par $X-a$, alors il existe Q tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$. On a alors $P(a) = 0$.

Réciproquement, si $P(a) = 0$, considérons la division euclidienne de P par $X - a$. On a :
$P(X) = (X - a)Q(X) + R$ avec $deg(R) < deg(X - a) = 1$, donc R est une constante. On obtient alors
$0 = P(a) = R$ donc $R = 0$ et P est divisible par $X - a$.

Une autre démonstration consiste à écrire que, si $P(X) = \sum\limits_{k\geq 0} a_k X^k$ et si $P(a) = 0$ alors

$$P(X) = P(X) - P(a) = \sum_{k\geq 0} a_k(X^k - d^k)$$

dont chaque terme se factorise par $X - a$.

Il se peut que P se factorise par une puissance de $X - a$. Si k est la puissance maximale de $X-a$ par laquelle le polynôme P se factorise (de sorte que $P = (X - a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$), on dit que k est l'ordre de multiplicité de la racine a.

1.5 Polynôme dérivé

On définit le polynôme dérivé de $P = \sum\limits_{k\geq 0} a_k X^k$ comme étant égal à

$$P' = \sum_{k\geq 1} k a_k X^{k-1}.$$

On peut définir de la même façon les dérivées successive.

P.G.C.D, et ALGORITHME d'EUCLIDE.

Définition 1.5.1 *On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.*

On dit alors que B est un diviseur de A ou encore que A est un multiple de B.

Diviseurs communs à deux polynômes.

On a souvent à résoudre le problème suivant: étant donné deux polynômes A et B, quels sont leurs diviseurs communs? Ceci peut servir, par exemple, à trouver les racines communs aux deux équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$, ou à simplifier la fraction rationnelle A/B.

Pour résoudre ce problème on utilise à répetition le lemme suivant:

Lemme: Les diviseurs communs à deux polynômes A et B sont les mêmes que les diviseurs communs à B et R où R est le reste de la division de A par B.

Démonstration :

Soit $A = BQ + R$ avec $degR < degB$.

Soit C un diviseur commun à A et B.

on a $A = CQ_1$ et $B = CQ_2$.

$$\begin{aligned} R &= A - BQ \\ &= CQ_1 - CQ_2Q \\ &= C(Q_1 - Q_2Q) \end{aligned}$$

Donc C est un diviseur commun à B et R

Réciproquement :

Soit C un diviseur commun à B et R

On a : $B = CQ_1$ et $R = CQ_2$

Comme $A = BQ + R$

Donc $A = CQ_1Q + CQ_2$

$$= C(Q_1Q + Q_2)$$

Donc C est un diviseur commun à A et B.

Algorithme d'Euclide:

C'est le procédé qui consiste à répéter le lemme précédent. Pour l'exposer, il est commode de changer un peu les notations. Mais faisons tout d'abord la remarque suivante:

Remarque: Les divseurs communs à A et 0 sont les diviseurs de A.
Cherchons maintenant les diviseurs communs à A_0 et A_1, non nuls, avec $\deg(A_0) \geq \deg(A_1)$. Par divisions successives, on peut écrire:
$A_0 = Q_1 A_1 + A_2$ avec $\deg(A_2) < deg(A_1)$ ou $A_2 = 0$.
Puis si $A_2 \neq 0$:
$A_1 = Q_2 A_2 + A_3$ avec $\deg(A_3) < \deg(A_2)$ ou $A_3 = 0$.

Si l'on continue ainsi, on définit des polynômes A_O, A_1 etc... avec $\deg(A_0) \geq \deg(A_1) \geq \deg(A_2) \geq \deg(A_3)$... et ceci ne peut se poursuive indéfiniment , ce qui implique que l'on arrive à un reste $A_k = 0$. Les dernières divisions sont donc:

$A_{k-3} = Q_{k-2} A_{k-2} + A_{k-1}$ avec $\deg(A_{k-1}) < \deg(A_{k-2})$
$A_{k-2} = Q_{k-1} A_{k-1}$ (c'est à dire $A_k = 0$).
Les diviseurs communs à A_0 et A_1 sont les diviseurs de A_{k-1}, ainsi on a le théorème suivant:

Théorème 1.5.1 *étant donnés deux polynômes A et B, il existe un polynôme D tel que les diviseurs communs à A et B soient les diviseurs de D. Ce polynôme est le dernier reste non nul dans la suite des diviseurs de l'algorithme d'Euclide.*

Définition 1.5.2 *Le polynôme D du théorème précédent est appelé PGCD de A et B, et on note PGCD$(A, B) = D$ ou $A \wedge B = D$.*

Remarqes:
a) Lorsque D est une constante , les polynômes A et B n'ont pas d'autres diviseurs communs que les constantes non nulles.
b) le PGCD n'est défini qu'à une constante multiplicative près (on choisit donc le polynôme unitaire correspondant).
Si $D = 1$, on dit que A et B sont premiers entre eux.
On peut également définir le PGCD de n polynômes. Si celui-ci vaut 1, ces polynômes sont dits premiers entre eux dans leur ensemble (exemple: $(X+1)(X+2), (X+1)(X+3), (X+2)(X+3)$).

On appelle polynôme irréductible tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1, divisible uniquement par 1 ou par lui-même (à une constante multiplicative près). Les polynômes irréductibles jouent dans$\mathbb{k}[X]$ le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Exemple:
Calculer le PGCD de x^3+2x^2-x-2 et de x^2+4x+3
On a :

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= (x^2+4x+3)(x-2)+4x+4 \\ x^2+4x+3 &= (4x+4)(\frac{x}{4}+\frac{3}{4}) \end{aligned}$$

Le PGCD est donc $4x+4$ ou plutôt $x+1$, l'habitude etant de donner le polynôme sous la forme normalisée ou unitaire.

Proposition 1.5.1 *On a* $(X^k)^{(n)} = A_k^{k-n}$ *avec* $A_k^n = n!C_n^k$

La démonstration se fait facilement par récurrence sur n.

1.6 Formules de Mac-Laurin et de Taylor

Théorème 1.6.1 *(Formule de Mac-Laurin)*
Soit $P \in \mathbb{k}_n[X]$, *alors*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Démonstration:
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$

Pour tout entier j, $P^{\ (j)} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (X^k)^{(j)} = \sum\limits_{k=j}^{n} a_k A_k^j X^{k-j}$

Par suite, pour tout $j=0,1,...,n$, on a $P^{(j)}(0) = a_j A_j^j = a_j j!$

et donc $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$

Par conséquent $P = \sum\limits_{k=j}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

Théorème 1.6.2 *(Formule de Taylor)*
Soit $P \in K_n[X]$ *et* $a \in \mathbb{k}$, *alors* $P = \sum\limits_{k=o}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la formule de Mac-Laurin au polynôme $P(X+a)$, on trouve:

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

On obtient la formule souhaitée en substituant $X-a$ à X

1.7 Ordre de multiplicité d'une racine

Proposition 1.7.1 *Les propositions suivantes sont équivalentes*
i) P *est divisible par* $(X-a)^k$ *et pas par* $(X-a)^{k+1}$
ii) il existe Q *tel que* $Q(a) \neq 0$ *et* $P = (X-a)^k Q$
iii) $P(a) = P'(a) = ... = P^{k-1}(a) = 0$ *et* $P^{(k)}(a) \neq 0$
On dit que a *est une racine de multiplicité* k *du polynôme* P.

Démonstration:

i) $\Longrightarrow$ii)

Si P est divisible par $(X-a)^k$, il existe Q tel que $P = (X-a)^k Q$. Si on avait $Q(a) = 0$, alors Q pourrait se factoriser par $X-a$ et P serait divisible par $(X-a)^{k+1}$.

ii) $\Longrightarrow$iii)

Si $P = (X-a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$, alors, on a, pour i compris entre 0 et k

$$P^{(i)}(X) = (X-a)^{k-i} Q(X) \text{ avec } Q(a) \neq 0$$

Ce résultat se montre aisément par récurrence. Il est vrai pour $i = 0$, et s'il est vrai pour $i < k$, alors :

$$P^{(i+1)}(X) = (k-i)(X-a)^{k-i-1}(Q(X) + (X-a)Q')(X)$$

$$= (X-a)^{k-i-1} Q_{i+1}(X)$$

avec $Q_{i+1}(X) = (k-i)(Q(X) + (X-a)Q'(X))$

On a bien $P^{(i)}(a) = 0$ pour $0 \leq i \leq k-1$, et $P^{(k)}(a) = Q_k(a)$ différent de 0.

iii) $\Longrightarrow$i)
On applique la formule de Taylor et on factorise par $(X-a)^k$.

1.8 Théorème de d'Alembert

Théorème 1.8.1 *(admis)*
Tout polynôme non nul admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$

Il en résulte que les polynômes irréductibles sont tous de degré 1, et que tout polynôme à coefficients complexes peut se factoriser sous la forme

$$\lambda \prod_{i \geq 0} (X - a_i)^{k_i}$$

Si $P = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$, notons $\overline{P} = \sum_{i \geq 0} \overline{a}_i X^i$. Si z est complexe, on a alors: $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$ de sorte que si z est racine de P, alors $\overline{z}$ est racine de $\overline{P}$, avec le même ordre de multiplicité. Si P est à coefficients réels, alors $P = \overline{P}$, et si z est racine de P, alors $\overline{z}$ aussi. Les polynômes P à coefficients réels se décomposent alors sur $\mathbb{C}$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{i \geq 0} (X - a_i)^{k_i} \prod_{i \geq 0} (X - z_i)^{m_i} (X - \overline{z_i})^{m_i}$$

et sur $\mathbb{R}$, en regroupant les parties conjuguées:

$$P = \lambda \prod_{i \geq 0} (X - a_i)^{k_i} \prod_{i \geq 0} (X^2 - \alpha_i X + \beta_i)^{m_i} \text{ avec } \alpha_i = 2Re(z_i) \text{ et } \beta_i = |z_i|^2$$

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont donc de degré 1 ou 2.

Exemple : $X^4 + 1$ se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme :

$$(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

1.9 Division suivant les puissances croissantes

Il s'agit d'une forme de division autre que la classique division euclidienne: si A et B sont deux polynômes, le terme constant de B étant non nul, et si n est un entier strictement positif, alors il existe des polynômes Q et R (déterminés de manière unique) tels que :

- $A = BQ + X^{n+1}R$.
- $degré(Q)$ est inférieur ou égal à n.

On pose cette division un peu comme la classique division euclidienne, mais en écrivant les polynômes suivant les puissances croissantes, et en cherchant à éliminer d'abord les termes constants, puis les termes en X, etc...

Exemple: $A = 1+X$, $B = 1-X$, on trouve à l'ordre 2: $Q = 1+2X+2X^2$ et $R = 2$

$$\begin{array}{l|c}
\ \ 1+x & 1-x \\
-1-x & \\
\hline
\qquad 2x & 1+2x+2x^2 \\
\qquad -2x-2x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad 2x^2 & \\
\qquad\qquad -2x^2-2x^3 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 2x^3 &
\end{array}$$

La division suivant les puissances croissantes est par exemple utilisée pour obtenir les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles.

Chapitre 2

Fractions rationnelles

Définition 2.0.1 *Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes $\frac{A}{B}$ avec $B \neq 0$. On dit que deux fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont égales si et seulement si $AD = BC$ (comme dans $\mathbb{Q}$ pour les entiers). On dit que la fraction est irréductible si les deux polynômes A et B sont premiers entre eux. On note $\Bbbk(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles de polynômes à coefficients dans $\Bbbk$, il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit d'un corps.*

2.1 Degré, partie entière

Définition 2.1.1 *Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle. L'entier relatif $deg(F) = deg(A) - deg(B)$ est appelé degré de F.*

Remarque

-Si $F = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ (donc $AD = BC$), on a bien sur $\deg(A) - \deg(B) = \deg(C) - \deg(D)$

-Si F est en fait un polynôme, son degré (en tant qu'élément de $\Bbbk(X)$) coïncide avec son degré (en tant qu'élément de $\Bbbk[X]$).

-On étend la définition en posant que le degré de $F = 0$ est $-\infty$

-On vérifie : $\deg(F+G) \leq max(\deg(F), \deg(G))$ et $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$.

Proposition 2.1.1 *Tout élément F de $\Bbbk(X)$ s'écrit de manière unique $F = P + G$, où P est un polynôme, et où G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif.*

On dit que le polynôme P est la partie entière de la fraction rationnelle F.

Remarques et propriétés

- Posons $F = \frac{A}{B}$ et soit $A = BQ + C$ la division euclidienne de A par B.

  On a l'égalité $F = Q + \frac{C}{B}$ avec $deg(C) < deg(B)$

  La partie entière de F est donc le quotient dans la division de A par B.

  En particulier, si $deg(A) = deg(B)$; la partie entière de F est la constante obtenue par quotient des coefficients dominants des polynômes A et B.

- Notons $E(F)$ la partie entière de toute fraction rationnelle F.
  - Pour tout polynôme P, on a $E(P) = P$.
  - Soit F dans $\Bbbk(X)$. On a $E(F) = 0 \iff$ le degré de F est strictement négatif..
  - Soit $F = \frac{A}{B}$, avec $\deg(A) \geq \deg(B)$. Alors $\deg(E(F)) = \deg(A) - \deg(B)$.

2.2 Pôles et partie polaires

Définition 2.2.1 *(pôle d'une fraction rationnelle)*

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible
Soit α un élémennt de $\Bbbk$, et m dans $\mathbb{N}^*$. On dit que α est un pôle de F, avec la multiplicité m, si α est une racine du polynôme B avec la multiplicité m.

Remarques:
- Avec ces notations, α n'est pas racine de A car $A \wedge B = 1$.
- α est un pôle de F avec la multiplicité $m \Leftrightarrow F = \frac{A}{(X-\alpha)^m Q}$ avec $\begin{cases} A(\alpha) \neq 0 \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

- On parle de pôle simple si $m = 1$, et de pôle multiple si $m > 1$.
- On parle de pôle double si $m = 2$, triple si $m = 3$, etc..
- α est pôle simple de $F \iff F = \frac{A}{B}$ avec $A(\alpha) \neq 0, B(\alpha) = 0$, B'$(\alpha) \neq 0$.

De même α est un pôle double de $F \iff F = \frac{A}{B}$ avec $\begin{cases} A(\alpha) \neq 0 \\ B(\alpha) = B'(\alpha) = 0, B"(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

- Soit F une fraction rationnelle à coefficients réels.
Soit α un pôle complexe non réel de F, avec la multiplicité m.
Alors $\overline{\alpha}$ est un pôle de F, avec la multiplicité m.

Proposition 2.2.1 *(Partie polaire)*

Soit F une fraction rationnelle de $\mathbb{k}(X)$, admettant α comme pôle de multiplicité $m \geq 1$.

Alors F s'écrit de manière unique $F = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} + G$ où $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{k}^m$ et où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle. On dit alors que $\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k}$ est la partie polaire de F relativement au pôle α.

Remarque

Les pôles de G sont ceux de F (sauf α); avec les mêmes multiplicités respectives.

Cas d'un pôle simple

Soit F un élément de $\mathbb{k}(X)$ admettant α comme pôle simple.
Il existe donc λ dans $\mathbb{k}$ tel que $F = \frac{\lambda}{X-\alpha} + G$, où α n'est pas un pôle de G. Voici deux méthodes permettant de calculer le coefficient λ.

- Posons $F = \frac{A}{(X-\alpha)Q}$, avec $A(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors $\lambda = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$

  Dans la pratique, on multiplie F par $(X - \alpha)$, et après simplification on substitue α à X.

  Cette méthode est très adaptée au cas courant où B est factorisé.

- Posons $F = \frac{A}{B}$ avec $A(\alpha) \neq 0$ Alors $\lambda = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}$

  Cette méthode est très adaptée au cas où B n'est pas factorisé.

  Un cas classique est $B = X^n - 1$: les pôles sont les racines n-ièmes de l'unité.

Cas d'un pôle double

Soit F un élément de $\mathbb{k}(X)$ admettant α comme pôle double.

Il existe donc λ, μ dans $\mathbb{k}$ tels que $F = \frac{\lambda}{(X-\alpha)^2} + \frac{\mu}{X-\alpha} + G$, où α n'est pas un pôle de G.

- Posons $F = \frac{A}{(X-\alpha)^2 Q}$ avec $A(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors $\lambda = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$
- Posons $F = \frac{A}{B}$, avec $A(\alpha) \neq 0$. Alors $\lambda = \frac{2A(\alpha)}{B''(\alpha)}$
- Une fois calculé le coefficient λ, on peut écrire : $H = F - \frac{\lambda}{(X-\alpha)^2} = \frac{\mu}{X-\alpha} + G$

Ou bien α n'est pas un pôle de H (donc $\mu = 0$ est c'est fini), ou bien α est un pôle simple de H et on est ramené à des méthodes connues.

Cas d'un pôle multiple

Soit F un élément de $\mathbb{k}(X)$ admettant α comme pôle avec la multiplicité $m \geq 2$.

Il existe $\lambda_1, ..., \lambda_m$ dans $\mathbb{k}$ tel que $F = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} + G$ ou α n'est pas un pôle de G

On peut assez facilement calculer le coefficient λ_m de $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$:

- Posons $F = \frac{A}{(X-\alpha)^m Q}$, avec $(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$ alors $\lambda_m = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$
- Une fois calculé λ_m, on peut écrire : $H = F - \frac{\lambda}{(X-\alpha)^m} = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} + G$
- On est alors en mesure de calculer λ_{m-1},λ_{m-1},...etc. Cette méthode est cependant très lourde si m est "grand" (ce qui heureusement est rare) .

Pour de "grandes" valeurs de m, on revient à $F = \frac{A}{(X-\alpha)^m Q}$ avec $\left\{ \begin{array}{l} A(\alpha) \neq 0 \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{array} \right.$

L'égalité $F = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k} + G$ devient : $\frac{A}{Q} = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k (X-\alpha)^{m-k} + (X-\alpha)^m G$

La substitution qui consiste à remplacer X par $X + \alpha$ donne alors :

$$A(\alpha + X) = (\lambda_m + \lambda_{m-1}X + ... + \lambda_1 X^{m-1})Q(\alpha + X) + X^m G(X + \alpha)$$

On peut alors calculer successivement $\lambda_m, ..., \lambda_2, \lambda_1$, par une méthode de division suivant les puissances croissantes du polynôme $A(\alpha + X)$ par le polynôme $Q(\alpha + X)$.

2.3 Décomposition en éléments simples

Proposition 2.3.1 *(décomposition dans $\mathbb{C}(X)$)*

Soient $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coeffcients complexes.
Soit les $\alpha_{1,...,}\alpha_p$ pôles distincts de F, avec les multiplicités r_1,...,r_p

Alors F s'écrit de manière unique $F = E + \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\sum\limits_{j=1}^{r_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right)$

où E est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Remarque

Dans cette écriture, chaque somme $\sum\limits_{j=1}^{r_k}\frac{\lambda_{kj}}{(X-\alpha_k)^j}$ est la partie polaire de F pour α_k.

Proposition 2.3.2 *(décomposition dans $\mathbb{R}(X)$)*

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle de coefficients réels, sous forme irréductible.

Soit $B = \lambda \prod\limits_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k}\prod\limits_{k=1}^{q}(X^2+b_kX+c_k)^{s_k}$ la factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$

Alors la fraction rationnelle F s'écrit de manière unique :

$$F = E + \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{s_k}\frac{c_{k,j}X+d_{k,j}}{(X^2+b_kX+c_k)^j}\right)$$

où E est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$,$c_{k,j}$, $d_{k,j}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$

Remarques

- Dans la décomposition de la fraction rationnelle F dans $\mathbb{R}(X)$).
  - Les fractions $\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}$sont appelées éléments simples de première espèce.
  - Les fractions $\frac{c_{k,j}X+d_{k,j}}{(X^2+b_kX+c_k)^j}$sont appelées éléments simples de seconde espèce.
- Ce qui a été dit pour les parties polaires permet:
  - D'effectuer complètement une décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.
  - De calculer les éléments simples de première espèce dans $\mathbb{R}(X)$.

- Soit $F = \frac{A}{(X^2+bX+c)^m Q} \in \mathbb{R}(X)$, avec $b^2 - 4c < 0, (A, Q$ non divisibles par $X^2 + bX + c)$

  Alors $F = G + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{c_j X + d_j}{(X^2+bX+c)^j}$, en groupant dans G ce qui ne relève pas de $(X^2 + bX + c)$.

  Les coefficients les plus facilement "accessibles" sont c_m, d_m.

  On peut en effet écrire $A = (c_m X + d_m)Q + (X^2 + bX + cX)(...)$

  Soit ω une des deux racines complexes non réelles de $X^2 + bX + c$.

  Si on subsbstitue ω à X, on trouve: $A(\omega) = (c_m\omega + d_m)Q(\omega)$

  On peut alors trouver c_m et d_m par identification:

  - En utilisant la valeur de ω si elle est simple, notamment si $\omega = i$ ou $\omega = j$.
  - Par abaissement successifs du degré en utilisant $\omega^2 = -b\omega - c$.

  Une fois connus c_m et d_m, on considère $F - \frac{c_m X + d_m}{(X^2+bX+c)^m}$ et on cherche c_{m-1}, d_{m-1}, etc .

2.4 Pratique de la décomposition en éléments simples

Les méthodes vues précédemment permettent en principe de former les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$.

Néanmoins, un certain nombre de techniques facilitent le travail:

- En diminuant globalement le nombre de coefficients à calculer.
- En permettant de calculer des coefficients peu facilement "accessibles", à condition cependant qu'il ne reste à ce stade que peu d'inconnues

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction à coefficients réels

Soit $F = \frac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{R}(X)$.
On peut considérer F comme un éléments de $\mathbb{C}(X)$ et la décomposer en tant que telle.
Tout comme F, cette décomposition doit être invariante par conjugaison.
Il en résulte par exemple que la partie entière de F est un polynôme réel.

Il en résulte également que les parties polaires sont conjuguées deux à deux. Plus précisement, si α et $\overline{\alpha}$ sont deux pôles conjugués non réels de F, de multiplicité m , les parties polaires s'écrivent respectvement: $\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{(X-\alpha)^k}$ et $\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{\lambda_k}}{(X-\overline{\alpha})^k}$
Cette idée permet donc de diminuer de moitié environ le nombre d'inconnues.

Utilisation de la parité ou de l'imparité

Si une fraction rationnelle est paire ou impaire, sa décomposition doit refléter cette propriété.On exprime cette invariance par les transformations $X \longrightarrow F(-X)$ ou $X \longrightarrow -F(-X)$, et on en déduit des relations sur les coefficients (le nombres d'inconnues diminue environ de moitié).

Injection de valeurs particulières

Quand il reste peu de coefficients à calculer, il peut être intéressant d'injecter, dans l'égalité entre F et sa décomposition, une ou plusieurs valeurs qui ne soient pas des pôles de F.

Si F est dans $\mathbb{R}(X)$, on peut injecter une valeur complexe comme i (ou j), l'identification donnant alors deux relations entre les coefficients réels inconnus.

Utilisation de la méthode $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} xF(x)$

On suppose ici que le degré de F est strictement négatif (la partie entière est donc nulle).
La décomposition de F fait apparaitre des termes du type $\frac{\lambda_k}{X-\alpha_k}$ ou $\frac{a_kX+b_k}{X^2+\beta_kX+\gamma_k}$
Le calcul de $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} xF(x)$ donne alors une relation liant les coefficients λ_k et a_k
Cette méthode est intéressante quand il ne reste que un ou deux coefficients à calculer.

Exemples de référence

Décomposer $F = \frac{1}{X^n-1}$ dans $\mathbb{C}(X)$

Ici $F = \frac{A}{B}$, avec $\begin{cases} A = 1 \\ B = X^n - 1 \end{cases}$ Les pôles (simples) sont les racines n-ièmes ω_k de 1

Pour tout k de $\{0, ..., n-1\}$, on a $\frac{A(\omega_k)}{B'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n}$

La décomposition en éléments simples de F s'écrit donc

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{X-\ \omega_k}$$

Décomposer $F=\frac{1}{X(X+1)(X+2)...(X+n)}$dans $\mathbb{R}(X)$.
Les pôles sont $0,-1,-2,...,-n$. Ce sont des pôles simples

La forme de la décomposition est : $F=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k}{X+k}$

λ_k s'obtient en multipliant F par $X+k$ et en substituant $-k$ à X. On trouve :

$$\lambda_k=\prod\limits_{j\neq k}\frac{1}{-k+j}=\prod\limits_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j-k}\prod\limits_{j=k+1}^{n}\frac{1}{j-k}=(-1)^k\prod\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\prod\limits_{i=1}^{n-k}\frac{1}{i}=\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}=\frac{(-1)^k}{n!}C_n^k$$

Conclusion : $F=\frac{1}{X(X+1)(X+2)...(X+n)}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{X+k}$

Décomposer $F=\frac{1}{X^3(X^2-1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$

Les pôles sont 0 (triple), 1 (simple) et -1 (simple). La partie entière est nulle.

Posons. $F=\frac{a}{X^3}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X}+\frac{d}{X-1}+\frac{e}{X+1}$. L'imparité de F donne $b=0$ et $e=d$

On trouve a en multipliant par X^3 et en substituant 0 à X. Donc $a=-1$
On trouve d en multipliant par $(X-1)$ et en substituant 1 à X. Donc $d=\frac{1}{2}$
Si on utilise la méthode $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}xF(x)$, on trouve $0=c+1$. Donc $c=-1$

Finalement : $F=\frac{1}{X^3(X^2-1)}=-\frac{1}{X^3}-\frac{1}{X}+\frac{1}{2(X-1)}+\frac{1}{2(X+1)}$

Décomposer $F=\frac{1}{X(X^2+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$

La décomposition est de la forme: $F=\frac{a}{X}+\frac{cX+d}{X^2+1}+\frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}+\frac{\lambda X+\mu}{X^2-X+1}$

L'imparité de F donne immédiatement : $d=0,\mu=-\beta$ et $\lambda=\alpha$.

On cherche donc a,c,α,β tels que : $F=\frac{a}{X}+\frac{cX}{X^2+1}+\frac{\alpha X+\beta}{X^2+X+1}+\frac{\alpha X-\beta}{X^2-X+1}$

On trouve a en multipliant par X et en substituant 0 à X. Donc $a=1$.
On trouve c en multipliant par X^2+1 et en substituant i à X. Donc $c=-1$.
On trouve α,β en multipliant par X^2+X+1 et en substituant j à X:

$$(X^2+X+1)F=\frac{1}{X(X^2+1)(X^2-X+1)}=\alpha X+\beta+(X^2+X+1)(...)$$

$$\Longrightarrow \alpha j+\beta=\frac{1}{j(j^2+1)(j^2-j+1)}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \alpha=0,\beta=\frac{1}{2}$$

Finalement :$F = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1} + \frac{1}{2(X^2+X+1)} - \frac{1}{2(X^2-X+1)}$

Décomposer $F = \frac{X^5}{(X-1)^4}$ dans $\mathbb{R}(X)$

On écrit $X^5 = (X-1+1)^5 = (X-1)^5 + 5(X-1)^4 + 10(X-1)^3 + 10(X-1)^2 + 5(X-1) + 1$

On en déduit: $F = X + 4 + \frac{10}{(X-1)} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{5}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^4}$

Décomposer $F = \frac{X^8}{(X^2-X+1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$

On procède à des divisions successives par $B = X^2 - X + 1$

$X^8 = Q_1 B + R_1$, avec $Q_1 = X^6 + X^5 - X^3 - X^2 + 1$ et $R_1 = X - 1$.

$Q_1 = Q_2 B + R_2$, avec $Q_2 = X^4 + 2X^3 + X^2 - 2X - 4$ et $R_2 = -2X + 5$

Ainsi: $X^8 = R_1 + R_2 B + R_3 B^2 + Q_3 B^3$ puis $F = \frac{X^8}{B^3} = Q_3 + \frac{R_3}{B} + \frac{R_2}{B^2} + \frac{R_1}{B^3}$

Conclusion : $F = X^2 + 3X + 3 - \frac{2X+7}{X^2-X+1} - \frac{2X-5}{(X^2-X+1)^2} + \frac{X-1}{(X^2-X+1)^3}$