Résolution d'équations non linéaires

Said EL HAJJI et Touria GHEMIRES

Université Mohammed V - Agdal.
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques.

Laboratoire de
Mathématiques, Informatique et Applications, Rabat
http://www.fsr.ac.ma/mia/

Plan

Plan

Résolution d'équations non linéaires: Introduction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle.
On cherche les racines simples de l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

- Isoler les racines, c'est à dire trouver un intervalle $[a, b]$ dans lequel α est l'unique racine réelle de (1).
- Trouver cet intervalle : théorème des valeurs intermédiaires :
  - $f(a) * f(b) < 0$ $\quad$ f admet un nombre impair de racines
  - Si $f(a) * f(b) > 0$ $\quad$ f admet un nombre pair de racines

Introduction

On supposera donc désormais avoir trouvé un intervalle $[a, b]$ où f admet une unique racine simple et on supposera que f est définie, continue, et autant de fois continument dérivable que nécessaire.

Introduction

Les algorithmes classiques que nous allons étudier sont les suivants:

1. Méthode de la bissection
2. Méthode de Newton-Raphson
3. Méthode de la sécante
4. Méthode du point fixe.

Méthode de la bissection.

On suppose que que f est continue dans $[a, b]$ et que $f(a).f(b) < 0$

- on pose $c = \frac{a+b}{2}$,
  - si $f(c) = 0$ Alors $p = c$
  - si $f(a) * f(c) < 0$ on remplace b par c
  - sinon on remplace a par c,
- on continue cette opération jusqu'à ce qu'on trouve p avec la précision demandée.

Algorithme de bissection (ou de dichotomie.)

Trouver une approximation de la solution de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$.

On construit une suite d'intervalles $([a_n, b_n])_n$ contenant la racine,
on teste que a_n ou b_n est le milieu de l'intervalle $[a_{n-1}, b_{n-1}]$.

Entrées : a,b, ϵ et N_0
Sortie : la valeur approchée p : $f(p) = 0$

Algorithme de bissection (ou de dichotomie.)

1. Si $f(a) = 0$ imprimer la solution est a. Si $f(b) = 0$ imprimer la solution est b, aller à 10
2. si $f(b) * f(a) > 0$, imprimer (pas de changement de signe). Aller à 10
3. poser $N = 1$
4. Tant que $N \leq N_0$,faire les étapes 5 à 8
5. poser $p = \frac{a+b}{2}$
6. Si $f(p) = 0$ ou $\frac{b-a}{2} \leq \epsilon$, imprimer p. Aller à 10
7. poser $N = N + 1$
8. Si $f(a) * f(p) > 0$,alors poser $a = p$, sinon poser $b = p$
9. Imprimer après N_0 itérations l'approximation obtenue est p et l'erreur maximale est $\frac{b-a}{2}$
10. Fin

Méthode de Newton-Raphson:

Le principe consiste à construire une suite $(x_n)_n$, telle que x_{n+1} soit l'intersection de la tangente à la courbe de f au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe horizontal.

On a:

$$\left\{\begin{array}{c} A = (x_0, f(x_0)), B = (x_1, 0) \in axe(Ox) \\ A \text{ et } B \in D : y = ax + b \end{array}\right.$$

donc

$$\left\{\begin{array}{c} f(x_0) = ax_0 + b \\ 0 = ax_1 + b \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = f'(x_0) \\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{array}\right.$$

Algorithme de Newton-Raphson

Entrées: une approximation initiale p_0
ε (la précision désirée)
N_0 (le nombre maximum d'itérations)
Sortie: valeur approchée de p ou un message d'échec

1. $N = 1$
2. Tant que $N \leq N_0$, faire les étapes 3 à 6.
3. Poser $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$
4. Si$\mid p - p_0 \mid \leq \varepsilon$ alors imprimer p, aller à l'étape 8.
5. Poser $N = N + 1$.
6. Poser $p_0 = p$.
7. Imprimer la méthode a échoué après N itérations.
8. Fin.

Méthode de la sécante

La méthode de Newton-Raphson suppose le calcul de $f'(p)$.

On remplaçe dans la méthode de Newton $f'(p_n)$ par

$$\frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}.$$

L'équation de la sécante s'écrit :

$$s(x) = f(p_n) + (x - p_n)\frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

Si $s(p_{n+1}) = 0$, on en déduit:

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n)\frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

Algorithme de la sécante:

Trouver une solution de $f(x) = 0$
Entrées: deux approximations initiales p_0 et p_1
ε (la précision désirée)
N_0 (le nombre maximum d'itérations)
Sortie:la valeur approchée de p ou un message d'échec

1. poser $N = 1$, $q_0 = f(p_0)$, $q_1 = f(p_1)$
2. Tant que $N \leq N_0 + 1$,faire les étapes 3 à 6
3. poser $p = p_1 - q_1 \frac{(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$
4. Si $\mid p - p_1 \mid \leq \varepsilon$ alors imprimer p, aller à l'étape 8
5. Poser $N = N + 1$
6. Poser $p_0 = p_1$, $q_0 = q_1$, $p_1 = p$,$q_1 = f(p)$
7. Imprimer la méthode a échoué aprés N_0 itérations
8. Fin

Méthode du point fixe

Nous pouvons observer que la méthode de Newton peut s'interpréter comme

$$p_{n+1} = g(p_n) \quad \text{où} \quad g(x) = x - (\frac{f(x)}{f'(x)}).$$

Si la fonction $g(x)$ est continue et

si l'algorithme converge (c.à.d. $p_n \to p$),

Alors, puique $p_{n+1} = g(p_n)$, on a $p : p = g(p)$;
on dit que p est un point fixe de g.

Algorithme du point fixe

Trouver une solution de $g(x) = x$

Entrées: une approximation initiale p_0
ε(la précision désirée)

N_0 le nombre maximale d'itérations
Sortie: valeur approchée de p ou un message d'échec

Convergence et ordre de convergence.

Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et F une application de D dans D. On dit que la fonction F est contractante si

$$\forall x, y \in D\ , \exists k \in [0, 1[\quad \text{tel que}$$
$$\mid F(x) - F(y) \mid \leq k \ \mid x - y \mid .$$

k est le coefficient de contraction ou de Lipschitz de F.

Convergence et ordre de convergence.

Théorème:

Considérons le segment $S = [p_0 - a, p_0 + a] \subset D$;
si F est contractante sur S et si $\mid F(p_0) - p_0 \mid \leq (1 - k)\, a$,
alors l'itération $p_{n+1} = F(p_n)$ de point initial p_0 , converge vers l'unique point fixe $p \in S$ de F.

Théorème:

Si F est différentiable au voisinage d'un point fixe p et si $\mid F'(p) \mid < 1$ alors :
$\exists V$ voisinage de p tels que $p_0 \in V$ et $p_{n+1} = F(p_n)$ converge vers p.

Ordre de convergence.

Définition

Considérons une suite $\{p_n\}$ convergeant vers p et posons $e_n = p_n - p$.
Si $\left\{\left|\frac{e_n}{e_{n-1}}\right|\right\}$ converge, on dit que la suite p_n converge linéairement vers p ou encore que la méthode est du premier ordre.
Si on a $\left\{\left|\frac{e_n}{(e_{n-1})^k}\right|\right\}$ converge, alors la convergence est dite d'ordre k (k le plus grand possible.)

Ordre de convergence: Exemple.

La méthode de Newton est une méthode de type point fixe avec

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si p est racine simple de $f(x) = 0$, alors $f'(x^*) \neq 0$ et
il existe un voisinage V de p tel que pour tout $p_0 \in V$,
la suite $(p_n)_n$ converge vers p et l'ordre de convergence est 2.

Pour déterminer l'ordre de convergence, on utilise la formule de Taylor en p :

$$F(x) = F(p) + F'(p)(x - x^*) + F''(\theta x)\frac{(x-p)^2}{2}.$$

Résolution de systèmes d'équations non linéaires

Nous considérons le problème suivant :

$$F : R^n \to R^n \text{ , trouver } p \in R^n \text{ tel que } F(p) = 0.$$

Nous allons pour cela étendre au cas de la dimension $n > 1$ certains des algorithmes proposés dans les sections précédentes.

Pour $k \geq 0$, et $D \subseteq R^n$,
$C^k(D)$ = Ensemble des fonctions k fois continument différentiables de R^n dans R^n restreintes à D.

Résolution de systèmes d'équations non linéaires

Nous supposerons que $F \in C^1(D)$.
$J_F(x)$ est la matrice jacobienne associée à F et évaluée au point $x = [x_1, ..., x_n]^T$ de R^n.

$$(J_F(x))_{ij} = (\frac{JF_i}{\partial x_j}(x)), \quad i, j = 1, ..., n.$$

Pour une norme vectorielle donnée $\|.\|$,

$$B(p; R) = \{y \in R^n : \|y - p\| < R\}.$$

Boule ouverte de rayon R et de centre p

La méthode de Newton et ses variantes

On peut étendre la méthode de Newton au cas vectoriel :
$x^{(0)} \in R^n$ étant donné x,
pour $k = 0, 1, ...,$ jusqu'à convergence:

$$\text{résoudre} \quad J_F(x^{(k)})\delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}),$$
$$\text{poser} \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)}.$$

On doit donc résoudre un système linéaire de matrice $J_F(x^{(k)})$ à chaque itération k.

Exemple

Exemple
Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} e^{x_1^2+x_2^2} - 1 = 0 \\ e^{x_1^2-x_2^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

qui admet pour unique solution $p = (0,0)^T$.
Dans ce cas,

$$F(x) = [e^{x_1^2+x_2^2} - 1, e^{x_1^2-x_2^2} - 1].$$

Pour $\left\|\delta^{(k)}\right\|_2 \leq 10^{-10}$ (δx comme test d'arrêt)

Si $x^{(0)} = [0.1, 0.1]^T$
on obtient en 26 itérations le couple $[0.1\bullet\ 10^{-8}, 0.13\bullet\ 10^{-8}]^T$
ce qui démontre une convergence assez rapide.

Si $x^{(0)} = [10, 10]^T$, 229 itérations sont nécessaires pour obtenir une solution comparable à la précédente,

la méthode diverge si $x^{(0)} = [20, 20]^T$.

Le comportement est cependant très sensible au choix de la donnée initiale.

Théorème

Soit $F : R^n \to R^n$ et $F \in C^1$ sur un ouvert convexe D de R^n qui contient p.
Supposons que $J_F^{-1}(p)$ existe et qu'il existe des constantes R, C et L telles que

$$\left\| J^{-1}(p) \right\| \leq C$$

et

$$\| J_F(x) - J_F(y) \| \leq L \, \| x - y \| \quad \forall x, y \in B(p; R)$$

Il existe alors $r > 0$ tel que, pour tout $x^{(0)} \in B(p; R)$
la suite est définie de façon unique et converge vers p avec

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(*)} \right\| \leq CL \left\| x^{(k)} - x^{(*)} \right\|^2 .$$

Démonstration.

On va montrer par récurrence sur k que :
$x^{(k+1)} \in B(p; r)$, avec $r = min(R, 1/(2CL))$.
Pour $x^{(0)} \in B(p; r)$
la matrice inverse $J_F^{-1}(x^{(0)})$ existe.
On a

$$\left\|J_F^{-1}(p)(J_F(x^{(0)} - J_F(p)\right\| \leq \left\|J_F^{-1}(p)\right\| \left\|(J_F(x^{(0)} - J_F(p)\right\| \\ \leq CLr \leq \tfrac{1}{2}.$$

et on déduit du Théorème que $J_F^{-1}(x^{(0)})$ existe car

$$\left\|J_F^{-1}(x^{(0)})\right\| \leq \frac{\left\|J_F^{-1}(p)\right\|}{1 - \left\|J_F^{-1}(p)\right\| \left\|J_F(x^{(0)}) - J_F(p)\right\|} \\ \leq 2\left\|J_F^{-1}(p)\right\| \leq 2C$$

Demonstration - suite

Par conséquent, $x^{(1)}$ est bien défini et

$$x^{(1)} - p = x^{(0)} - p - J_F^{-1}(x^{(0)})[F(x^{(0)}) - F(p)]$$

En mettant en facteur $J_F^{-1}(x^{(0)})$ dans le membre de droite et en prenant les normes, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|x^{(1)} - p\right\| &\leq \left\|J_F^{-1}(x^{(0)})\right\| \left\|F(p) - F(x^{(0)}) - J_F(x^{(0)})\left[p - x^{(0)}\right]\right\| \\ &\leq 2C\frac{L}{2}\left\|p - x^{(0)}\right\|^2\end{aligned}$$

On a majoré le reste de la série de Taylor de F.

Demonstration - suite

Comme de plus $x^{(0)} \in B(p;r)$, on a $\left\|x^* - x^{(0)}\right\| \leq 1/(2CL)$,

d'où

$$\left\|x^{(1)} - p\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|p - x^{(0)}\right\|.$$

Ce qui assure que $x^{(1)} \in B(p;r)$.

On montre de manière analogue que si on suppose la relation vraie pour un certain k, alors elle est encore vraie pour $k+1$.

Remarques

Si $x^{(0)}$ est assez proche de la solution p et si la matrice jacobienne est inversible.
La méthode de Newton converge de maniére quadratique.

Il faut noter que la résolution du systéme linéaire peut s'avérer excessivement coûteuse quand n devient grand.

De plus, la matrice $J_F(x^{(k)})$peut être mal conditionnée, ce qui rend difficile l'obtention d'une solution précise.

Pour ces raisons, plusieurs versions modifiées de la méthode de Newton sont proposées.

Remarque

Si on note $r^{(k)} = F(x^{(k)})$ le résidu à l'étape k,
La méthode de Newton peut être récrite sous la forme

$$(Id - J_G(x^{(k)}))\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = -r^{(k)}$$

avec $G(x) = x - F(x)$

Méthodes de Newton modifiées.

Ce résultat ne donne pas d'indication constructive sur la maniére de calculer les incréments h.

En diminuant les h, on peut diminuer l'erreur de troncature commise dans Méthodes de type sécante.

Application Contractante

On dit qu'une application $G : D \subset R^n \to R^n$ est contractante sur l'ensemble $D_0 \subset D$
s'il existe une constante $\alpha < 1$ telle que
$\|G(x) - G(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour tout x, y dans D_0 .

Propriété (théoréme de l'application contractante): Si $G : D \subset R^n \to R^n$ est une contraction sur un ensemble fermé $D_0 \subset D$ telle que $G(x) \in D_0$ pour tout $x \in D_0$,alors G admet un unique point fixe dans D_0

Méthodes de Point Fixe

Théoréme du point Fixe : On suppose que $G : D \subset R^n \to R^n$ possède un point fixe x à l'intérieur de D et que G est continument differentiable dans un voisinage de p
On note J_G la jacobienne de G et on suppose que le rayon spectral $\rho(J_G(p)) < 1$.
Alors il existe un voisinage S de x tel que $S \subset D$ et, pour tout $x^{(0)} \in S$,la suite définie avant demeure dans D et converge vers x .

Exemple

Considérons le système non linéaire

$$F(x) = [x_1^2 + x_2^2 - 1, 2x_1 + x_2 - 1]^T = (0,0)^T$$

dont les solutions sont $x_1^* = (0,1)^T$ et $x_2^* = (4/5, -3/5)^T$

Utilisons pour le résoudre deux méthodes de point fixe respectivement définies par les fonctions d'itération

$$G_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1-x_2}{2} \\ \sqrt{1 - x_1^2} \end{bmatrix}, G_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{1-x_2}{2} \\ -\sqrt{1 - x_1^2} \end{bmatrix}$$

suite

On peut vérifier que $G_1(x_i^*) = x_i$ pour $i = 1, 2$;

les deux méthodes sont convergentes dans un voisinage de leur point fixe respectif car

$$J_{G1}(x_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, J_{G2}(x_2^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\rho(J_{G1}(x_1^*)) = 0$ *et* $\rho(J_{G2}(x_2^*)) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

En exécutant le Programme avec une tolérance de 10^{-10}

Si $x^{(0)} = [-0.9, 0.9]^T$, le schéma converge vers x en 9 itérations.

Si $x^{(0)} = [0.9, 0.9]^T$, le schéma converge vers x en 115 itérations

Cette différence de comportement entre les deux suites s'explique par la différence entre les rayons spectraux des matrices d'itération correspondantes. •

Remarque:

La méthode de Newton peut etre vue comme une méthode de point fixe associée à la fonction
$G_N(x) = x - J_F^{-1}(x)F(x)$.