Chap. IV. Applications Linéaires

Printemps 2010

1 Applications Linéaires

Définition 1.1. *: Soient **E** et **E**' deux espaces vectoriels sur**K** et f une application de **E** dans **E**'. On dit que f est linéaire, si :*
1) $f(u+v) = f(u) + f(v)\ \forall u, v \in \boldsymbol{E}$.
2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v \in \boldsymbol{E},\ \forall \lambda \in \boldsymbol{K}$.

L'ensemble des applications linéaires de **E** dans **E**' est noté $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$.

Remarque 1. *:* $f(0) = 0$ *car (homomorphisme de groupes).*

Définition 1.2. *: Une application linéaire de **E** dans **E** est appelée endomorphisme.*

Exemple 1. *:*

1) $\begin{array}{cccc} \Theta & : & \boldsymbol{E} & \rightarrow & \boldsymbol{E}' \\ & & v & \mapsto & 0 \end{array}$ *est linéaire dite application nulle.*

2)

$$\begin{array}{rccl} id_{\boldsymbol{E}} : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$$ *est linéaire dite application identique de* $\boldsymbol{E}$.

3)

$$\begin{array}{lccc} u_{\boldsymbol{E}} : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ \alpha \in \boldsymbol{K} & v & \longmapsto & \alpha v \end{array}$$ *est linéaire dite homothétie de rapport* α.

4) $$\begin{array}{rccl} D : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$$ *est linéaire dite dérivation.*

5) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$.

$$\begin{array}{rccl} P_{r_1} : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E}_1 \\ & x = x_1 + x_2 & \longmapsto & x_1 \end{array}$$ *est linéaire dite projection sur* $\boldsymbol{E}_1$ *parallélement à* $\boldsymbol{E}_2$.

6) Soit $v_0 \neq 0$ *un vecteur de* $\boldsymbol{E}$

$$\begin{array}{rcccl} \tau & : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ & & v & \longmapsto & v+v_0 \end{array}$$

application non linéaire car $\tau(0) = v_0 \neq 0$, *dite translation.*

2 Image et Noyau

Proposition 2.1. *: Soit* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *et* $\boldsymbol{F}$ *un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$.
Alors $f(\boldsymbol{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* ***E'****.*
En particulier $f(\boldsymbol{E})$ *est un sous-espace vectoriel de* ***E'*** *appelé image de* f *et noté* Imf*. Sa dimension est appelée rang de* f*.*

Preuve : On sait que $f(\mathbf{F})$ est un sous-groupe de **E**', il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $f(v) \in f(\mathbf{F})$, $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(\mathbf{F})$.

Proposition 2.2. *: Soit* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $Kerf = \{x \in \boldsymbol{E} / f(x) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\boldsymbol{E}$, *appelé noyau de* f*.*

Preuve : Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in Kerf$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in Kerf$.

Proposition 2.3. *: f est injective* $\Leftrightarrow Kerf = \{0\}$.

Exemple 2. *:*

1) Soit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \bigoplus \boldsymbol{E}_2$, $ImP_{r_1} = \boldsymbol{E}_1$, $KerP_{r_2} = \boldsymbol{E}_2$

2) $$\begin{array}{cccc} D & : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & & P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$$

$KerD = \mathbb{R}$, $ImD = \mathbb{R}[X]$.

3) $$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, y - z) \end{array}$$

$Kerf = \{(x, y, z)/y = -2x \text{ } et \text{ } z = y\} = \{(x, -2x, -2x)/x \in \mathbb{R}\}$
droite vectorielle engendrée par $(1, -2, -2)$.

$$\begin{array}{rcl} Imf & = & \{(x',y')/\exists x,y,z; x'=2x+y \text{ et } y'=y-z\} \\ & = & \left\{(x',y')/y=y'+z \text{ et } x=\frac{1}{2}(x'-y'-z)\right\} \end{array}.$$

Posons $z=0$ *donc* $y=y'$ *et* $x=\frac{1}{2}(x'-y')$. *D'où* $\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2$ $\exists(\frac{1}{2}(x'-y'),y',0)\in\mathbb{R}^3$ *;* $f((\frac{1}{2}(x'-y'),y',0))=(x',y')$ *donc* f *est surjective, et par suite* $Imf=\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.4. *: Soit* $f\in\mathcal{L}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{E'})$ *et* $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ *une famille de vecteurs de **E**.*

1) Si f *est injective et la famille* $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ *est libre dans **E**, alors la famille* $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ *est libre dans **E'**.*

2) Si f *est surjective et la famille* $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ *est génératrice de **E**, alors la famille* $\{f(v_i)\}_{1\leq i\leq n}$ *est génératrice de **E'**.*

En particulier si f *est bijective, l'image d'une base de **E** est une base de **E'**.*

Preuve : 1) Comme f est une application linéaire injective, alors on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i) &= 0 \\ &\Longrightarrow f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = 0 \qquad (\ f \text{ application linéaire }) \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0 \\ &\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n \quad \{v_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ libre}\end{aligned}$$

2) $\forall x \in \mathbf{E}$, $\exists \lambda_i \in \mathbf{K}$; $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i$.

Soit $y \in \mathbf{E}'$, $\exists x \in \mathbf{E}$; $y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i)$ (surj) d'où

$y = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i)$.

Théorème 1. *: Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes, si et seulement si, ils ont même dimension.*

Preuve : $\Rightarrow$) $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}'$ isomorphisme, d'après la proposition précédente l'image d'une base de **E** est une base de **E**', donc **E** et **E**' ont même dimension.

$\Leftarrow$) Supposons $dim\mathbf{E} = dim\mathbf{E}'$, soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de **E** et $\{e'_1, ..., e'_n\}$ une base de **E**'. Considérons l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{E}' \\ & & e_k & \longmapsto & e'_k \end{array}$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, on pose $f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e'_i$, on vérifie que f est linéaire bijective.

Corollaire 2.1. *: $\boldsymbol{E}$ espace vectoriel de dimension finie sur $\boldsymbol{K}$.*

$\boldsymbol{E}$ est isomorphe à $\boldsymbol{K}^n \Longleftrightarrow dim_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{E} = n$.

Théorème 2. *(Théorème de la dimension) : Soient $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, alors $dim\boldsymbol{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$.*

Preuve : Supposons $dim\mathbf{E} = n$, $dim(Kerf) = r$ et montrons que $dim(Imf) = n - r$.

Soit $\{w_1, ..., w_r\}$ une base de $Kerf$, complétons la pour obtenir une base de $\mathbf{E}$ en l'occurrence $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$.

Montrons que $\mathcal{B} = \{f(v_1), ..., f(v_{n-r})\}$ est une base de Imf.

1) $\mathcal{B}$ engendre Imf, en effet :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i).$$

b) $\mathcal{B}$ est libre :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i) &= 0 \\
&\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i\right) = 0 \qquad\qquad (f \text{ application linéaire}) \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i \in Ker f \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda_i = 0, i = 1, ..., n-r; \quad \alpha_i = 0, i = 0, ..., r
\end{aligned}
$$

Corollaire 2.2. *: Soit $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}$' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est injective.

2) f est surjective.

3) f est bijective.

Preuve : $dim\mathbf{E} = dim(Kerf) + dim(Imf)$. Il suffit de montrer 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

f injective $\Longleftrightarrow Kerf = \{0\} \Longleftrightarrow dim\mathbf{E} = dim(Imf) \Longleftrightarrow dim\mathbf{E}' = dim(Imf) \Longleftrightarrow \mathbf{E}' = Imf \Longleftrightarrow f$ est surjective.

Remarque 2. *: 1) Ce résultat est faux en dimension infinie.*

En effet :

$$\begin{array}{rccc} D : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$$ *est surjective, non injective.*

2) Une application linéaire f est parfaitement définie si on connaît l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de f on a

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, *donc si on connaît* $f(e_1)$,...,
$f(e_n)$, f *est connue en tout* x.

3 Matrices Associées aux Applications Linéaires

Soient **E** et **E**' deux espaces vectoriels sur **K**, de dimension finie n et p respectivement, et $f : \mathbf{E} \longmapsto \mathbf{E}'$ une application linéaire. Choisissons $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de **E** et $\{e'_1, ..., e'_p\}$ une base de **E**'. Les images par f des vecteurs $\{e_1, ..., e_n\}$ se décomposent sur la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\ & = & \\ & \vdots & \\ & = & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p \end{array}$$

Définition 3.1. *: On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, ..., e_n\}$ et $\{e'_1, ..., e'_p\}$, la matrice notée par $M(f)_{e_i, e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), ..., f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, ..., e'_p\}$:*

$$f(e_1) \quad f(e_2) \quad . \quad \dots \quad . \quad f(e_n)$$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \ldots & . & a_{1n} \\ . & & & & & . \\ \vdots & & & & & \vdots \\ . & & & & & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & \ldots & . & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{p-1} \\ e'_p \end{array} \end{array}$$

Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*'.*

Exemple 3. *:*

1) Soit $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension n et*

$$\begin{array}{cccc} id_{\boldsymbol{E}} : & \boldsymbol{E} & \longrightarrow & \boldsymbol{E} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

On considère une base $\{e_i\}$ de $\boldsymbol{E}$*.*

$$M(id_{\boldsymbol{E}})_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & ... & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ . & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & . & 0 \\ 0 & 0 & . & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \text{ matrice unité de}$$

$\mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$.

2) Soit $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^2$ *et* $Pr_1 \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0) \end{array}$

Considérons la base canonique $\{e_1, e_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *on a* $Pr_1(e_1) = e_1$, $Pr_1(e_2) = 0$.

$$M(Pr_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\{e'_1, e'_2\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. Considérons l'application linéaire :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, z-y) \end{array}$$

$$M(f)_{e_i,e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) On considère la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \end{array}$$

En munissant $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}$ *de leurs bases canoniques respectives* $\{e_i\}$ *et* $\{1\}$ *on obtient* $M(f)_{e_i,1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

5) $D \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & DP = P' \end{array}$

$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *par rapport aux bases canoniques de* $\mathbb{R}_4[X]$ *et* $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 3.1. *: Soient **E** et **E'** deux espaces vectoriels sur **K** de dimension n et p respectivement, $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ des bases de **E** et **E'**. Alors l'application :*

$$\begin{array}{cccc} M & : & \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K}) \\ & & f & \longmapsto & M(f)_{e_i, e'_j} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels c'est à dire :

$M(f+g) = M(f) + M(g)$, $M(\lambda f) = \lambda M(f)$ et M est bijective, en particulier $dim \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}') = np$.

Preuve :

$$\mathrm{M(f{+}g)}_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (f+g)(e_1) & . & . & . & (f+g)(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & . & . & . & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g(e_1) & . & . & . & g(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= M(f)_{e_i,e'_j} + M(g)_{e_i,e'_j}$$

De même

$$M(\lambda f)_{e_i,e'_j} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (\lambda f)(e_1) & . & . & . & (\lambda f)(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \\ - & . & . & . & - \end{pmatrix} \end{array} = \lambda M(f)_{e_i,e'_j}$$

donc M est linéaire.

Soit

$$f \in KerM \Longrightarrow M(f)_{e_i,e'_j} = 0 \Longrightarrow f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = 0,$$

donc si $x \in \mathbf{E}$ $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i) = 0$, d'où $f = 0$, donc M est injective.

Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$$

On considère f en posant :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + \dots + a_{p1}e'_p \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + \dots + a_{pn}e'_p. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbf{E}$; $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, on pose $f(x) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$. On vérifie que f est linéaire et $M(f)_{e_i, e'_j} = A$.

4 Matrice d'un Vecteur. Calcul de l'Image d'un Vecteur

Définition 4.1. *: Soit $\boldsymbol{E}$ un espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\boldsymbol{E}$ et $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$ un vecteur de $\boldsymbol{E}$. On appelle matrice de x dans la base $\{e_i\}$:*

$$M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1. *: Soit* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *et* $\{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E}$*' respectivement, pour tout* $x \in \boldsymbol{E}$*, on a :*

$$M(f(x))_{e'_j} = M(f)_{e_i, e'_j} M(x)_{e_i}.$$

Preuve : Soit $M(f)_{e_i, e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}$

d'où $f(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$.

On a

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^{j=n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{j=n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{kj})}_{y_k} e'_k = \sum_{k=1}^{p} y_k e'_k$$

donc $M(f(x))_{e'_j} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

D'autre part

$$M(f)_{e_i,e'_j}M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ a_{p1} & & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \end{pmatrix}$$

d'où le résultat.

Exemple 4. :

Soit le plan rapporté à sa base canonique. Déterminer l'image du vecteur $x = (3,2)$ *par rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\Pi}{6}$.

On a

$$\begin{aligned} M(f(x)) &= M(f)M(x) \\ &= \begin{pmatrix} cos\frac{\Pi}{6} & -sin\frac{\Pi}{6} \\ sin\frac{\Pi}{6} & cos\frac{\Pi}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} .$$

5 Matrice de l'Inverse d'une Application

Proposition 5.1. *: Soient* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$*'*, $\boldsymbol{E}$*" trois espaces vectoriels sur* $\boldsymbol{K}$, $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{e'_1, ..., e'_p\}$, $\{e''_1, ..., e''_q\}$ *des bases de* $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}$*' et* $\boldsymbol{E}$*" respectivement. Si* $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *et* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}'')$*, on a*
$M(fog)_{e_i,e''_k} = M(f)_{e'_j,e''_k} M(g)_{e_i,e'_j}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbf{E}$ arbitraire. En utilisant la proposition du paragraphe 2, on a :
$M(fog)M(x) = M(f(g(x))) = M(f)M(g(x)) = M(f)M(g)M(x)$.
Puisque x est arbitraire, $M(fog) = M(f)M(g)$.

Proposition 5.2. *:* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$ *est bijective si et seulement si* $M(f)_{e_i,e'_j}$ *est inversible.*

De plus $M(f^{-1})_{e'_i,e_j} = M(f)^{-1}_{e_i,e'_j}$.

Preuve : $f^{-1}of = id_{\mathbf{E}}$, d'où
$M(f^{-1}of)_{e_i,e_i} = M(id_{\mathbf{E}}) = I \Longrightarrow M(f^{-1})M(f) = I \Longrightarrow M(f^{-1}) =$

$M(f)^{-1}$.

6 Changement de Bases

Définition 6.1. *: On appelle matrice de passage de la base* $\{e_i\}$ *à la base* $\{e'_i\}$ *du même espace vectoriel* $\boldsymbol{E}$*, la matrice* $P_{e_i \to e'_i}$ *dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* e'_i *dans la base* $\{e_i\}$ *:*

$$P_{e_i \to e'_i} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = M(id_{\boldsymbol{E}})_{e'_i, e_i}.$$

Remarque 3. *: Une matrice de passage est toujours inversible et on a* $(P_{e_i \to e'_i})^{-1} = P_{e'_i \to e_i}$.

Proposition 6.1. *: Soient* $x \in \boldsymbol{E}$, $\{e_i\}$ *et* $\{e'_i\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$, $P = P_{e_i \to e'_i}$ *et* $X = M(x)_{e_i}$, $X' = M(x)_{e'_i}$, *on a* $X' = P^{-1}X$.

Preuve :

$PX' = M(id_{\mathbf{E}})_{e'_i,e_i} M(x)_{e'_i} = M(id_{\mathbf{E}}(x))_{e_i} = M(x)_{e_i} = X.$

Exemple 5. *:*

Soit $\mathbb{R}^2$ *muni de deux bases, la base canonique* $\{e_1, e_2\}$ *et la base* $\{e'_1, e'_2\}$ *définie par :*

$e'_1 = 2e_1 + e_2,\ e'_2 = 3e_1 + 2e_2$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$, *calculons les composantes de* x *dans la base* $\{e'_1, e'_2\}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$x = -5e'_1 + 4e'_2.$

Proposition 6.2. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}')$, $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$

deux bases de $\boldsymbol{E}$ *et* $\{e'_1, ..., e'_p\}$, $\{\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_p\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$*'.*

Notons $A = M(f)_{e_i,e'_j}$, $A' = M(f)_{\epsilon_i,\varepsilon'_j}$, $P = P_{e_i \to \varepsilon_i}$, $Q = P_{e'_j \to \varepsilon'_j}$.

On a alors $A' = Q^{-1}AP$.

Preuve :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(e'_j)} \\ id_{\mathbf{E}} \downarrow & & \downarrow id_{\mathbf{E}'} \\ \mathbf{E}_{(\varepsilon_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E}'_{(\varepsilon'_j)} \end{array}$$

On a $foid_{\mathbf{E}} = id_{\mathbf{E}'}of$ d'où $M(foid_{\mathbf{E}}) = M(id_{\mathbf{E}'}of)$, c'est à dire

$$M(f)_{\varepsilon_i,\varepsilon'_j} M(id_{\mathbf{E}})_{e_i,\varepsilon_i} = M(id_{\mathbf{E}'})_{e'_j,\varepsilon'_j} M(f)_{e_i,e'_j},$$

c'est à dire $A'P^{-1} = Q^{-1}A$ donc $A' = Q^{-1}AP$.

Corollaire 6.1. *: Soient* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E})$ *et* $\{e_1, ..., e_n\}$, $\{e'_1, ..., e'_n\}$ *deux bases de* $\boldsymbol{E}$*.*

Notons $A = M(f)_{e_i}$, $A' = M(f)_{e'_i}$ *et* $P = P_{e_i \to e'_i}$.

On a alors $A' = P^{-1}AP$.

Définition 6.2. *: Deux matrices* A, $A' \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ *sont dites semblables s'il existe une matrice* $P \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{K})$ *inversible telle que :*

$A' = P^{-1}AP$.

Exemple 6. *:*

Soit f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^2$ *qui dans la base canonique* $\{e_i\}$ *est représenté par la matrice :* $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice A' *qui représente* f *dans la base* $e'_1 = (0, -1)$ *et* $e'_2 = (1, 1)$.

On a
$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

7 Rang d'une Matrice

Définition 7.1. *: Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de vecteurs, on appelle rang de la famille, la dimension de l'espace engendré par les vecteurs v_i.*

Soit $A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$, $A = (c_1, ..., c_n)$ *où l'on a noté* c_i *les vecteurs colonnes de* A ($c_i \in \boldsymbol{K}^p$). *On appelle rang de* A *le rang de la famille des vecteurs colonnes de* A.

Proposition 7.1. *: Soit* $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E'})$. *Soient* $\{e_1, ..., e_n\}$ *et* $\{e'_1, ..., e'_p\}$ *deux bases quelconques de* $\boldsymbol{E}$ *et* $\boldsymbol{E'}$ *respectivement et* $A = M(f)_{e_i, e'_j} = (a_{ij})$.

On a alors $rang f = rang A$.

Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire dans des bases différentes ont même rang ; en particulier deux matrices semblables ont même rang.

Preuve : On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \xrightarrow{h} & \mathbf{K}^p \\ u \downarrow & & \downarrow v \qquad h = v^{-1} o f o u \\ \mathbf{E}_{(e_i)} & \xrightarrow{f} & \mathbf{E'}_{(e'_j)} \end{array}$$

u et v sont définis en associant à chaque vecteur de la base

canonique de $\mathbf{K}^n$ (resp $\mathbf{K}^p$)
ε_i (resp ε'_j) le vecteur e_i (resp e'_j), alors l'application h a précisément A comme matrice dans les deux bases canoniques car $h(\varepsilon_i) = v^{-1}ofou(\varepsilon_i) = v^{-1}of(e_i) = v^{-1}(\sum a_{ij}e'_j) = \sum_j a_{ji}\varepsilon'_j$.

Donc $rangA = rangh$ et d'après le lemme suivant, on déduit que $rangA = rangf$

Lemme 7.1. *: Soient $f \in \mathcal{L}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{E})$, alors*

1) Si g est surjective, alors $rangf = rang(fog)$.

2) Si f est injective, alors $rangg = rang(fog)$.

Preuve : 1) $rangf = dimf(\mathbf{E}) = dimf(g(\mathbf{G})) = dim(fog)(\mathbf{E})$
$= rang(fog)$

2) Soit $\{v_i\}$ avec $v_i = g(w_i)$ une base de Img, alors $f(v_i) = (fog)(w_i)$. Comme f est injective $\{f(v_i)\}$ est libre et engendre $Im(fog)$ car $y \in Im(fog) \Longrightarrow \exists x$;

$y = f(\underbrace{g(x)}_{\in Img}) = f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$ donc $\{f(v_i)\}$ est une base de $Im(fog)$, d'où $rangg = rang(fog)$.

On en déduit qu'en composant à gauche ou à droite par une application linéaire bijective, le rang ne change pas.

8 Matrices Remarquables

a) Matrice Diagonale $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

b) Matrice Triangulaire Supérieure $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

c) Transposée d'une Matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$; c'est ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Elle vérifie ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(A+B) =^t A +^t B$, ${}^t(\lambda A) = \lambda^t A \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$; c'est à dire que l'application :

$$\begin{array}{cccccl} \Psi & : & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) & \text{est un isomorphisme} \\ & & A & \longmapsto & {}^tA & \text{d'espaces vectoriels} \end{array}$$

On a aussi ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Définition 8.1. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes s'il existe $P \in Gl_p(\boldsymbol{K})$ et $Q \in Gl_n(\boldsymbol{K})$ telles que $B = Q^{-1}AP$. C'est en fait une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, notée $\simeq$.*

Théorème 3. *: $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$ sont équivalentes si et seulement si $rang A = rang B$.*

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 8.1. *: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$;*

$$rang A = r \Longleftrightarrow \left(A \simeq \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \in \mathcal{M}_{r,r}(\boldsymbol{K}) \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}} \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \\ 0\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Cette dernière est notée J_r.

Preuve : $\Leftarrow$) trivial.

$\Rightarrow$) $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ définit une application linéaire

$\Phi \quad : \quad \mathbf{K}^p_{(e_i)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}^n_{(e'_j)}$. On munit $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ des bases canoniques (e_i) et (e'_j) respectivement.

Soit r le nombre de vecteurs linéairement indépendants parmi les images des vecteurs de la base (e_i) ; c.à.d Ae_1,...,Ae_p, qu'on peut supposer être Ae_1,...,Ae_r, les autres vecteurs Ae_{r+1},...,Ae_p peuvent s'exprimer en fonction de ces derniers :

$$Ae_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} Ae_j \text{ pour } k = r+1, ..., p.$$

On définit une nouvelle base $f_1, ..., f_p$ dans $\mathbf{K}^p$; comme suit

$$f_k = \begin{cases} e_k, & \text{pour k=1,...,r ;} \\ e_k - \sum_{j=1}^{r} c_{kj} e_j, & \text{pour k=r+1,...,p.} \end{cases}$$

On a alors $Af_k = 0$ pour $k = r+1, ..., p$.

Posons alors $Af_j = t_j$ pour $j = 1, ..., r$. Les t_j sont par hypothèse linéairement indépendants. Complétons les pour obtenir une base de $\mathbf{K}^n$, disons $t_{r+1}, ..., t_n$. Considérons alors la matrice de l'application linéaire Φ dans les nouvelles bases $f_1, ..., f_p$ et $t_1, ..., t_n$, on a alors :

$$M(\Phi)_{f_i,t_j} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1\ 0 \dots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ \vdots \\ \vdots \ \ddots \ \ddots \\ 0 \dots 0\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ 0 \dots & \dots \dots \dots \dots \ 0 \end{pmatrix} = J_r$$

A et $M(\Phi)_{f_i,t_j}$ représentent la même application linéaire, et sont donc équivalentes.

Preuve du théorème : $\Rightarrow$) trivial.

$\Leftarrow$) $rang A = rang B = r$ entraînent $A \simeq J_r$, $B \simeq J_r$, d'où $A \simeq B$.

Théorème 4. *: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\boldsymbol{K})$, alors $rang A = rang\, {}^t A$ c'est à dire que le rang d'une matrice ; est aussi le rang de la famille des vecteurs lignes.*

Preuve : $rang A = r \Longrightarrow A \simeq J_r \Longrightarrow \exists P \in Gl_p(\mathbf{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbf{K})$,

$A = Q^{-1} J_r P \Longrightarrow {}^tA = {}^tP\ {}^tJ_r\ {}^tQ^{-1} = ({}^tP^{-1})^{-1}\ {}^tJ_r\ ({}^tQ^{-1}) =$
${}^t(P^{-1})^{-1}\ J_r'\ ({}^tQ^{-1})$ car ${}^tJ_r = J_r'$ d'où
${}^tA \simeq J_r' \Longrightarrow rang{}^tA = r = rangA.$

Exemple 7. *:*

Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

On utilise les opérations élémentaires sur les lignes

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} =$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 - 2L_2 \end{matrix} \qquad = 2$$

Car les deux vecteurs lignes sont linéairement indépendants.

9 Application des Déterminants à la Théorie du Rang

9.1 Caractérisation des Bases

Théorème 5. *: Soit* $\boldsymbol{E}$ *un espace vectoriel de dimension* n*. Les vecteurs* $v_1, ..., v_n$ *de* $\boldsymbol{E}$ *forment une base de* $\boldsymbol{E}$ *si et seulement si* $det \left\| v_1, \ldots, v_n \right\|_{(e_i)} \neq 0$ *où* $\left\| v_1, \ldots, v_n \right\|_{(e_i)}$ *désigne la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs* $v_1, ..., v_n$ *dans la base* (e_i) *de* $\boldsymbol{E}$*.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\{v_1, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si
$det \left\| v_1, \ldots, v_n \right\|_{(e_i)} \neq 0.$

$\Longleftarrow$) $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i = 0$, posons $v_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k$, alors on a

$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i (\sum_{k=1}^{k=n} a_{ki} e_k) = 0$ d'où $\sum_{i,k}^{n} \alpha_i a_{ki} e_k = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{1i} = 0$,

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{2i} = 0$, ..., $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_{ni} = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

d'où $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$

$\Longrightarrow$) Si $det \left\| v_1, \quad ... \quad , v_n \right\|_{(e_i)} = 0 \Longrightarrow$ le système homogène

(1) admet une infinité de solutions, d'où $\{v_1, ..., v_n\}$ est liée.

9.2 Comment reconnaître si une famille de vecteurs est libre

On appelle mineur d'une matrice A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème 6. *: Soient $\{v_1, ..., v_r\}$ r vecteurs d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ de dimension n ($r \leq n$) et $A = \left\| v_1, \ldots, v_r \right\|$, ($A \in \mathcal{M}_{n,r}(\boldsymbol{K})$).*

La famille $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre si et seulement si on peut extraire de A un mineur d'ordre r non nul.

Preuve : Similaire à celle du théorème précédent, en complétant les vecteurs afin de former une base de $\mathbf{E}$.

9.3 Comment reconnaître si un vecteur appartient à l'espace engendré par d'autres vecteurs

Soit A une matrice et δ un mineur d'ordre r extrait de A. On appelle bordant de δ tout mineur d'ordre $r+1$ extrait de A, dont δ est un déterminant extrait.

Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et δ un mineur d'ordre r, il ya exactement $(p-r)(n-r)$ bordants de δ dans A.

Théorème 7. *: Soient $\{v_1, ..., v_r\}$ r vecteurs linéairement indépendants et δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A, où $A = \left\| v_1, \ldots, v_r \right\|$.*

Pour qu'un vecteur $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$ il faut et il suffit que tous les bordants de δ dans la matrice $B = \left\| v_1, \ldots, v_r, w \right\|$ soient nuls.

Preuve : $\Longrightarrow$) Si l'un des bordants est non nul, la famille

$\{v_1, ..., v_r, w\}$ serait libre.

$\Longleftarrow$) On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} \end{matrix} & \begin{matrix} b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \end{pmatrix}$.

Quitte a changer l'ordre des lignes et des colonnes, on peut supposer que le mineur δ non nul est le mineur encadré. Les r premiers vecteurs lignes de B sont indépendants, et chacun des autres est lié à ces derniers. Ainsi $rang B = r$, donc les vecteurs colonnes de B $\{v_1, ..., v_r, w\}$ forment une famille de rang r et comme $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre, $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Exemple 8. *: Pour quelles valeurs de α, $\beta \in \mathbb{R}$ le vecteur*

$$w = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$ *appartient-il au sous-espace de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par les vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *?*

On a $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$ $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *et*

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \alpha \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \beta \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Les bordants de δ *sont* $\triangle_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha$ *et*

$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta - 2$. *Donc* $w \in \langle v_1, v_2 \rangle$ *si et seulement si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$.

9.4 Détermination du rang

Théorème 8. *: Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\boldsymbol{K})$. Le rang de A est r si et seulement si on peut extraire de A un mineur δ d'ordre r non nul et tous les bordants de δ dans A sont nuls.*

Preuve :

$$\Longleftarrow)\ A = \left\| v_1, \ldots, v_n \right\| = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{matrix}} & \begin{matrix} \ldots & a_{1n} \\ & \vdots \\ \ldots & a_{rn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pr} \end{matrix} & \begin{matrix} \ldots & a_{r+1,n} \\ & \vdots \\ \ldots & a_{pn} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Soit δ le mineur encadré. Les vecteurs $\{v_1, ..., v_r\}$ sont alors indépendants et chaque vecteurs v_s ($s \geq r+1$) appartient à l'espace $\langle v_1, ..., v_r\rangle$. Donc les vecteurs colonnes engendrent un espace de dimension r, d'où $rangA = r$.

$\Longrightarrow$) Quitte à changer l'ordre des colonnes de A, on peut supposer que $\{v_1, ..., v_r\}$ est libre. On peut alors extraire de la matrice formée par les r premières colonnes de A un mineur δ d'ordre r non nul. Quitte à changer la numérotation des coordonnées, on peut supposer que δ soit le mineur formé par les r premières colonnes de A. Or $rangA = r$, d'où $v_s \in \langle v_1, ..., v_r\rangle$ pour $s \geq r+1$; d'après le théorème 7 tous les bordants de δ dans sont nuls.

Théorème 9. *: Le rang d'une matrice A est l'ordre maximal des mineurs non nuls extraits de A, c'est à dire :*

$$rangA = r \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1) & \textit{Il existe un mineur d'ordre } r \textit{ non nul} \\ 2) & \textit{Tous les mineurs d'ordre } s > r \textit{ sont nuls.} \end{array} \right.$$

Preuve : $\Longrightarrow$) S'il existait un mineur d'ordre $s > r$ non nul, on pourrait extraire des colonnes de A une famille libre formée de

$s > r$ vecteurs, or ceci est impossible car les vecteurs colonnes de A engendrent un espace de dimension r.

$\Longleftarrow$) Découle du théorème 8.