Chap. II. Déterminants

Printemps 2010

1 Déterminant d'ordre 2

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre 2 de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et est défini par

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple 1. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

On constate alors que :

1) Si deux rangées (ou deux colonnes) d'un déterminant sont

permutées la valeur d'un déterminant est multipliée par -1.

2) Si on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On constate que $det A = det {}^tA$, d'où la valeur d'un déterminant est conservée lorsque l'on échange les colonnes et les lignes (dans le même ordre).

2 Déterminant d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, on définit

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{11}} - a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{21}} + a_{31} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{\text{mineur de } a_{31}} \end{aligned}$$

Exemple 2. :

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$12 - 12 - 12 = -12$$

Le cofacteur de l'élément de $detA$ de la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$

colonne est égal à $(-1)^{i+k}$ fois le mineur de cet élément (c. à .d le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $k^{ème}$ colonne).

Remarque 1. *:*

Le cofacteur de a_{22} est $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Les signes $(-1)^{i+j}$ forment la table suivante $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$.

On remarque que l'on peut écrire (1) *sous la forme :*

$detA = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$ *où C_{i1} est le cofacteur de a_{i1} dans $detA$.*

3) Le déterminant de A, $detA$, peut être developpé suivant

n'importe quelle ligne ou colonne, c'est à dire, qu'il peut être écrit sous la forme d'une somme de trois éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne), chacun multiplié par son cofacteur.

Exemple 3. *:*

$$detA = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4) Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant sont multipliés par une constante k, la valeur du nouveau déterminant est k fois la valeur du déterminant initial. Cette propriété peut être utilisée pour simplifier un déterminant.

Exemple 4. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2(1) & 2(3) & 2(2) \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 3(1) & 0 \\ 1 & 3(1) & 2 \\ -1 & 3(0) & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

5) Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant sont nuls, la valeur du déterminant est nulle.

6) Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant est exprimé sous la forme d'un binôme, le déterminant peut être écrit comme somme de deux déterminants.

Exemple 5. *:*

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

7) Si deux lignes (ou colonnes) d'un déterminant sont proportionnelles, la valeur du déterminant est nulle.

Exemple 6. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8) La valeur d'un déterminant est conservée si l'on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison des autres lignes (ou colonnes).

Exemple 7. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\xrightarrow{C_1+C_3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$\xrightarrow{C_1+C_3}$ signifie que l'on a ajouté la colonne C_3 à la colonne C_1.

Cette dernière propriété permet de simplifier énormément les calculs, elle permet de réduire le calcul d'un déterminant d'ordre 3 au calcul d'un seul déterminant d'ordre 2.

Exemple 8. *:*

Calculer $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2-C_3}{\overrightarrow{=}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 5(-4+4) = 0$$

Remarque 2. *:*

La ligne (ou colonne) dans laquelle seront effectués les calculs ne doit pas être multipliée par des scalaires. La multiplication par un scalaire λ reviendrait à multiplier le déterminant par λ.

Exemple 9. *:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2L_1 - L_2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \textit{ alors que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

3 Déterminant d'ordre n

Le symbole $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ est appelé déterminant d'ordre n.

Pour $n = 1$, ça signifie a_{11}.

Pour $n \geq 2$, ça signifie la somme des produits des éléments de n'importe quelle ligne ou colonne par leurs cofacteurs respectifs c'est à dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in} \quad (\ i = 1, 2 \ldots, \text{ ou } n\ )$$

$$\text{ou} \quad = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk} \quad (\ k = 1, 2 \ldots, \text{ ou } n\ )$$

Le déterminant d'ordre n est alors défini en fonction de n déterminants d'ordre $(n-1)$, chacun est à son tour, défini en fonction de $(n-1)$ déterminants d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite, finalement on aboutit aux déterminants d'ordre 2.

Remarque 3. *:*

Les propriétés 1) jusqu'à 8) restent valables pour un déterminant d'ordre n.

Pour calculer la valeur d'un déterminant, on développera suivant la *ligne ou colonne où il y a le plus de zéros.*

Exemple 10. :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\xrightarrow{\hspace{2cm}}} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\! = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{\xrightarrow{L_1+L_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 4. :

1) $det(A+B) \neq detA + detB$ *en général.*

2) $det(AB) = (detA)(detB)$

3) $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$ *où* A^{-1} *désigne l'inverse de* A.

4 Applications

4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée d'ordre n

On rappelle qu'une matrice carrée d'ordre n A est inversible s'il existe B d'ordre n telle que $AB = BA = I$ où I est la matrice unité d'ordre n, c'est à dire la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Critère : A est inversible si $detA \neq 0$.

Une fois assuré que A est inversible, on calcule son inverse à l'aide de la formule suivante : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA}(adjA)}$ où $(adjA)$ désigne l'adjoint classique de A c'est à dire la matrice ${}^t[C_{ij}]$ où C_{ij} désigne la matrice des cofacteurs de A.

Exemple 11. *:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{\xrightarrow{L_1 - 2L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$-46 \neq 0$, *donc A est inversible.*

Déterminons les 9 *cofacteurs de A*

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

4.2 Résolution de systèmes linéaires (Méthode de Cramer)

Un système d'équations, $AX = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n, peut être résolu à l'aide des déterminants, lorsque $detA \neq 0$.

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, alors

$x_i = \frac{1}{detA}[C_{1i}b_1 + C_{2i}b_2 + \ldots + C_{ni}b_n] = \frac{1}{detA}detB_i$ où B_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par b.

Exemple 12. *:*

Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[=]{L_2+L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}[-(-12+21)] = -3.$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-5}{3}.$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{5}{3}.$$

Remarque 5. *:*

La méthode de Gauss pour les systèmes et celle des matrices élémentaires pour le calcul de l'inverse demeurent les plus efficaces.