Chap. I. Calcul Matriciel

Printemps 2010

Dans tout ce qui suit, **K** désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et propriétés

Un tableau rectangulaire, de nombres ($\in \mathbf{K}$), de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

est appelé matrice. Les nombres a_{ij} sont appelés coefficients de la matrice. Les lignes horizontales sont appelées rangées ou vecteurs rangées, et les lignes verticales sont appelées colonnes ou vecteurs colonnes de la matrice. Une matrice à m rangées et n colonnes est appelée matrice de type (m, n). On note la matrice (**??**) par (a_{ij}).

Exemple 1. *:*

1) La matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *a tous ses coefficients nuls.*

2) Une matrice $(a_1, ..., a_n)$ *ayant une seule rangée est appelée matrice uniligne.*

3) Une matrice $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *ayant une seule colonne est appelée matrice unicolonne.*

1) Une matrice ayant le même nombre de rangées et de colonnes est appelées matrice carrée, et le nombre de rangées est appelé son ordre.

2) La matrice carrée (a_{ij}) telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ $\forall i$ est appelée matrice unité, notée par I, elle vérifie $AI = IA = A$, $\forall A$ matrice carrée du même ordre que I.

3) Deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) sont égales si et seulement si elles ont même nombre de rangées et le même nombre de colonnes et les éléments correspondants sont égaux ; c'est à dire $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition

La somme de deux matrices de type (m,n) (a_{ij}) et (b_{ij}) est la matrice (c_{ij}) de type (m,n) ayant pour éléments $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour $i = 1, ..., m$ et $j = 1, ..., n$.

Exemple 2. *: Si* $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

L'addition des matrices satisfait les propriétés suivantes :

Pour A, B et C des matrices de type (m,n) on a :

1) $A + B = B + A$

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3) $A+O = O+A = A$ où O est la matrice nulle

4) $A+(-A) = O$ où $-A = (-a_{ij})$.

2.2 Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij}).$$

Exemple 3. *:*

Si $A = (2\ 7\ 8)$, *alors* $3A = (6\ 21\ 24)$

Cette multiplication vérifie :

Pour A, B des matrices de type (m, n)

1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

3) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

4) $1A = A$

2.3 Multiplication des matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{kl})$ une matrice de type (r, p), alors le produit AB (dans cet ordre) n'est défini que si $n = r$, et est la matrice $C = (c_{il})$ de type (m, p) dont les éléments $c_{il} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} b_{jl}$.

Exemple 4. *:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \; et \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \; alors$$

$$AB =$$

$$\begin{pmatrix} 3(1)+2(5)+(-1)(6) & 3(0)+2(3)+(-1)(4) & 3(2)+2(1)+(-1)(2) \\ 0(1)+4(5)+6(6) & 0(0)+4(3)+6(4) & 0(2)+4(1)+6(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :

1) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$, $\lambda \in \mathbf{K}$

2) $A(BC) = (AB)C$

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $C(A+B) = CA + CB$

Pour vu que les produits qui figurent dans les expressions soient définis.

Remarque 1. *:*

1) La multiplication matricielle n'est pas en général commutative, c.à.d $AB \neq BA$.

2) La simplification n'est pas vraie en général, c.à.d $AB = O$ *n'entraîne pas, nécessairement* $A = O$ *ou* $B = O$.

3) Une matrice carrée A *est inversible s'il existe* B *telle que* $AB = BA = I$.

Exemple 5. *:*

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq O$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq O$ *et pourtant*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

1) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ c'est à dire $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ est appelée matrice diagonale.

2) Une matrice du type $\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ ou

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est appelée matrice triangulaire.

La première vérifie $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ et la seconde $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

3) Au lieu de AA on écrit tout simplement A^2, de même $A^3 = A^2A$ ....

4) Si les lignes et les colonnes d'une matrice sont échangées, la

matrice obtenue est appelée transposée de la matrice d'origine ; la transposée de A est notée ${}^tA$.

5) Si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ji}$, on a ${}^t({}^tA) = A$.

Exemple 6. *:*

$$Si\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} ;\ alors\ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Matrices élémentaires

3.1 Opérations élémentaires sur une matrice

Soit A une matrice, on appelle opération élémentaire sur A l'une des transformations suivantes :

1) Ajouter à une ligne (resp à une colonne) de A une autre ligne (resp colonne) multipliée par un scalaire. $(R_j \longleftarrow R_j + kR_i)$

2) Multiplier une ligne (resp une colonne) de A par un scalaire non nul. $(R_i \longleftarrow kR_i)$

3) Permuter les lignes (resp les colonnes) de A. $(R_i \longleftrightarrow R_j)$

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et $e(A)$ désigne les résultats obtenus après l'application de l'opération e sur une matrice A.

Soit E la matrice obtenue après l'application de e sur la matrice unité I, c'est à dire $E = e(I)$. E est alors appelée la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire e.

Exemple 7. *:*

Considérons la matrice unité d'ordre 3.

1) Permuter les lignes L_2 *et* L_3.

2) Remplacer ligne L_2 par $-6L_2$.

3) Remplacer ligne L_3 par $-4L_1 + L_3$.

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et*

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *sont les matrices élémentaires correspondantes.*

Théorème 1. *:*

Soit e une opération élémentaire sur les lignes et E la matrice élémentaire correspondante d'ordre m, alors $e(A) = EA$ pour toute matrice A de type (m, n).

Les opérations élémentaires ont des opérations inverses du même type

1) Permuter R_i et R_j est son propre inverse.

2) Remplacer R_i par kR_i et remplacer R_i par $\frac{1}{k}R_i$ sont inverses

3) Remplacer R_j par $kR_i + R_j$ et remplacer R_j par $-kR_i + R_j$ sont inverses.

Supposons que e' est l'inverse d'une opération élémentaire sur les lignes e, et soit E' et E les matrices correspondantes. Alors E est inversible et son inverse est E'. En particulier un produit de matrices élémentaires est inversible.

Théorème 2. *:*

Soit A une matrice carrée, alors A est inversible si et seulement si A est un produit de matrices élémentaires.

3.2 Application pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée

Exemple 8. *:*

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ *si elle existe.*

Pour ce faire nous écrivons la matrice unité à la droite de A et nous appliquons les mêmes opérations à cette matrice que celles effectuées sur A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - 4L_1]{L_2 - 2L_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3+L_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2-L_3]{L_1+2L_3}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-L_3]{-L_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$d\text{'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons cette inverse sous forme de produit de matrices élémentaires :

$A^{-1} = BC$ *avec*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$