

# Programmation linéaire. Méthode du simplexe.

S. EL BERNOUSSI

25 octobre 2010

## Table des matières

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction.</b>                                           | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Notion de programme linéaire.</b>                           | <b>2</b>  |
| 2.1      | Exemple. . . . .                                               | 2         |
| 2.2      | Forme générale d'un programme linéaire. . . . .                | 3         |
| 2.3      | Formes matricielles classiques et convensions. . . . .         | 3         |
| 2.4      | Interprétation économique. . . . .                             | 3         |
| <b>3</b> | <b>Résolution graphique.</b>                                   | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Principes de la résolution algébrique.</b>                  | <b>4</b>  |
| 4.1      | Bases , solutions de bases et solutions réalisables. . . . .   | 4         |
| 4.2      | Caractérisation algébrique des points extrêmes. . . . .        | 6         |
| 4.3      | Propriétés fondamentales de la programmation linéaire. . . . . | 7         |
| 4.4      | Opération de pivotage. . . . .                                 | 8         |
| 4.5      | Algorithme du simplexe à la main. . . . .                      | 8         |
| <b>5</b> | <b>Algorithme du simplexe .</b>                                | <b>8</b>  |
| 5.1      | Algorithme du simplexe. . . . .                                | 9         |
| 5.1.1    | Problèmes soulevés par la dégénérescence. . . . .              | 10        |
| 5.2      | Complexité de l'algorithme et efficacité pratique. . . . .     | 10        |
| <b>6</b> | <b>Exercices</b>                                               | <b>11</b> |

## 1 Introduction.

programmation linéaire est le domaine qui a eu le plus de succès en optimisation. Depuis sa formulation de 1930 à 1940, et le développement de la méthode de simplexe par Danzig en 1940, des chercheurs dans différents domaines : économie, finance, ingénierie etc..., ont été amenés à formuler et à résoudre des problèmes linéaires, et même quand le problème était non linéaire, il était modélisé sous forme linéaire, car les modèles non linéaires nécessitent des algorithmes plus élaborés et plus coûteux.

La publication en 1984 du papier de Karmarkar est probablement l'événement le plus significatif en programmation linéaire après la découverte de la méthode du simplexe. L'intérêt du travail de Karmarkar vient de la complexité polynomiale de son algorithme, ce travail a donné naissance aux méthodes de points intérieurs, qui restent jusqu'à présent un domaine de recherche très actif.

## 2 Notion de programme linéaire.

Un programme linéaire est la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire sous des contraintes linéaires.

### 2.1 Exemple.

Voici un petit exemple traitable par la programmation linéaire.

Une usine produit deux ciments, rapportant  $500Dh$  et  $700Dh$  par tonne.

Une tonne du ciment N°1 nécessite 40 min de calcination dans un four à chaux et 20 min de broyage.

Une tonne du ciment N°2 nécessite 30 min de calcination dans un four à chaux et 30 min de broyage.

Le four et l'atelier de broyage sont disponibles  $6h$  et  $8h$  par jour. Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

Ce problème se modélise comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max } z = 500x_1 + 700x_2 & (1) \\ 40x_1 + 30x_2 \leq 360 & (2) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 480 & (3) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & (4) \end{array} \right.$$

(1) : est le profit total qui est à optimiser appelé fonction objective.

(2) et (3) sont des contraintes. (2) est la disponibilité du four et (3) est la disponibilité du broyeur.

(4) est le domaine des variables.

## 2.2 Forme générale d'un programme linéaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \max \text{ ou } \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ (2) \quad \forall i = 1, \dots, m : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq, = \text{ ou } \geq b_i \\ (3) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

- (1) : fonction objective.  
 (2) :  $m$  contraintes linéaires.  
 (3) : contraintes de positivité.

## 2.3 Formes matricielles classiques et conventions.

Notons par  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  le vecteur des variables.  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$  le second membre des contraintes,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$  le vecteur coût ou profit associé aux variables et  $A$  la matrice  $m \times n$  des  $a_{ij}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Forme canonique :} \\ \max \quad z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Forme standard :} \\ \max \quad z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

La forme canonique avec des contraintes  $\leq$  s'utilise dans la représentation graphique, et la forme standard avec des contraintes égalité s'utilise dans la résolution algébrique.

**Remarque 1** Ces formes ne servent qu'à simplifier les représentations théoriques.

Dans la réalité un problème linéaire peut comporter des contraintes égalités ou inégalités.

Ainsi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i \end{array} \right.$$

et

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \iff \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \underbrace{e_i}_{\text{variable d'écart}} = b_i$$

$$\max z = - \min -z$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad x = x^+ - x^- \quad \text{avec } x^+ \text{ et } x^- \in \mathbb{R}^+.$$

## 2.4 Interprétation économique.

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :

Un acteur économique qui exerce  $n$  activités avec des intensités  $x_j$  à déterminer. Ces activités utilisent  $m$  ressources. La quantité  $a_{ij}$  de ressources  $i$  nécessaires

pour exercer l'activité  $j$  avec une intensité 1. On connaît le profit (en maximisation) et le coût (en minimisation).  $c_j$  correspond à une intensité 1 de l'activité  $j$ .

### 3 Résolution graphique.

On résout graphiquement le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

matriciellement on a  $m = 2$ ,  $n = 2$ ,  $c = (1, 2)$ ,

$$x = (x_1, x_2)^T, b = (6, 3)^T \text{ et } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(la résolution se fait en cours)

### 4 Principes de la résolution algébrique.

La résolution algébrique utilise la forme standard, où  $A$  est une matrice  $m \times n$  de rang  $m$ .

$$(P) \quad \begin{cases} \max \quad z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

#### 4.1 Bases, solutions de bases et solutions réalisables.

Les bases de  $A$  sont les matrices  $m \times m$  inversibles extraites de  $A$ .

Soit  $B$  une base de  $A$ . On partitionne  $A$  sous la forme suivante :  $A = [B \ N]$  (on suppose pour faciliter la présentation que les colonnes de bases sont les  $m$  premières colonnes), on partitionne de même les vecteurs  $x$  et  $c$ .  $x = (x_B, x_N)^T$  et  $c = (c_B, c_N)^T$ .

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \iff Bx_B + Nx_N &= b \\ \iff x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= cx = c_Bx_B + c_Nx_N \\ &= c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N. \end{aligned}$$

On note  $\overline{c_N} = c_N - c_B B^{-1} N$ .

Le problème  $(P)$  s'écrit alors sous la forme :

$$(P') \quad \begin{cases} \max & z = c_B B^{-1} b + \overline{c_N} x_N \\ & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{cases}$$

C'est la forme canonique par rapport à la base  $B$ .

$x^*$  est dite solution de base si elle vérifie  $Ax^* = b$  et  $x^* = \begin{pmatrix} x_B = B^{-1} b \\ x_N = 0 \end{pmatrix}$ .

Si en plus  $x_B \geq 0$  alors  $x^*$  est une solution de base réalisable.

$x^*$  est dite solution réalisable si elle vérifie les contraintes c'est à dire  $Ax^* = b$  et  $x^* \geq 0$ .

**Exemple 2** Déterminer les bases et les bases réalisables du système suivant :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\x_2 + x_4 &= 3 \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$1. B_1 = [A^1 \ A^2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{B_1} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

$B_1$  est une base réalisable.

$$B_2 = [A^1 \ A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B_2 = 0.$$

$B_2$  n'est pas une base.

$$B_3 = [A^1 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{B_3} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

$B_3$  est une base réalisable.

$$B_4 = [A^2 \ A^3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{B_4} = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0. B_4 \text{ est une base réalisable.}$$

$$B_5 = [A^2 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{B_5} = B_5^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \not\geq 0.$$

$B_5$  n'est pas une base réalisable.

$$B_6 = [A^3 \ A^4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{B_6} = B_6^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

$B_6$  est une base réalisable.

## 4.2 Caractérisation algébrique des points extrêmes.

**Définition 3** Un ensemble  $X$  est convexe si :  $\forall x, y \in X$  et  $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$  avec  $\alpha + \beta = 1$ ; on a  $\alpha x + \beta y \in X$ .

**Définition 4** Une combinaison linéaire d'éléments de  $X$   $(\sum_1^n \lambda_i x_i)$  est dite convexe si  $\sum_1^n \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i \geq 0$ .

Notons  $X = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ , l'ensemble des solutions réalisables de  $(P)$ . Cet ensemble est convexe.

**Définition 5** \* *L'ensemble  $X$  est appelé un polytope convexe.*

\* *Un polytope borné est un polyèdre convexe.*

\* *Un point extrême d'un polytope ou d'un polyèdre convexe  $X$ , est un point qui ne peut être exprimé comme combinaison convexe d'autres points de  $X$ .*

\* *On appelle support de  $x$ , l'ensemble des indices des composantes non nulles. On le note  $\text{supp}(x)$ .*

**Théorème 6** *L'ensemble des points extrêmes du polytope  $X$ , correspond à l'ensemble des solutions de base réalisables.*

**Théorème 7** *Si  $\bar{c}_N \leq 0$  alors la solution de base réalisable correspondante est solution optimale du programme linéaire  $(P)$ .*

( Voir la démonstration en cours)

**Exemple 8** *déterminer les bases optimales du problème suivant :*

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

nous avons déjà vérifié que  $B_1, B_3, B_4, B_6$  étaient réalisables pour vérifier l'optimalité nous allons calculer le  $\bar{c}_N$  associé.

$$B_1 : \bar{c}_N = c_N - c_B B^{-1} N \\ = (0 \ 0) - (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(1 \ 1) < 0.$$

.  $B_1$  est optimale,  $z^* = c_B B^{-1} b = 9$ .

$B_3 : \bar{c}_N = (1 \ -1)$ .  $B_3$  est non optimale, et  $z^* = 6$ .

$B_4 : \bar{c}_N = (1 \ -2)$ .  $B_4$  est non optimale, et  $z^* = 6$ .

$B_6 : \bar{c}_N = (1 \ 2)$ .  $B_6$  est non optimale, et  $z^* = 0$ .

D'où la seule base optimale est  $B_1$ , la solution optimale correspondante est

$$x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 4.3 Propriétés fondamentales de la programmation linéaire.

**Proposition 9** *Si une fonction linéaire atteint son maximum (ou minimum) sur le polytope  $X$  alors cet optimum a lieu en un sommet de  $X$  (point extrême de  $X$ ).*

**Proposition 10** Si  $X \neq \emptyset$ , il existe au moins un sommet (point extrême).

**Remarque 11** – Pour 100 contraintes de 400 variables choisir 100 colonnes parmi 400 est de l'ordre de  $100^{100}$  sommets.

- L'algorithme du simplexe empreinte un chemin astucieux de façon à maximiser le profit.

#### 4.4 Opération de pivotage.

**Définition 12** Etant donnée une  $m \times n$  matrice  $A$ ,  $1 \leq r \leq m$  et  $1 \leq s \leq n$  tels que  $A_r^s \neq 0$ . La matrice  $D$  définie par :

$$D_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, j \neq r \\ \frac{1}{A_r^s} & \text{si } j = i = r \\ -\frac{A_i^s}{A_r^s} & \text{si } j = r, i \neq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelée matrice de pivotage sur l'élément  $A_r^s$  de  $A$ .

**Théorème 13** Si on applique l'opération de pivotage à la matrice  $(A, b)$  du système  $Ax = b$ , on obtient la matrice  $(DA, Db)$ . Le système  $DAx = Db$  est équivalent à  $Ax = b$ .

#### 4.5 Algorithme du simplexe à la main.

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

l'algorithme consiste à construire une suite de bases réalisables, de profit croissant jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de gain possible.  
(voir cours pour l'exemple)

### 5 Algorithme du simplexe .

**Théorème 14** Etant donné un programme linéaire

$$(PP) \quad \begin{cases} \max z = \zeta + cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $A$  est une matrice  $m \times n$  de rang  $m$ .  $(PP)$  est écrit sous forme canonique par rapport à une base  $B$ .



1. Si  $c \leq 0$  la base  $B$  est optimale, et la solution de base associée est solution optimale de (PP).
2. S'il existe  $s$  une colonne de  $A : A^s \notin B$ , avec  $c_s > 0$  et  $I = \{i : A_i^s > 0\} = \emptyset$  alors (PP) n'a pas de solution optimale.
3. S'il existe  $s$  une colonne de  $A : A^s \notin B$ , avec  $c_s > 0$  et  $I = \{i : A_i^s > 0\} \neq \emptyset$ . Soit  $r$  tel que  $\frac{b_r}{A_r^s} = \min_{i \in I} \left[ \frac{b_i}{A_i^s} \right]$  et soit  $x_t$  la variable correspondant à la  $r^{ième}$  ligne de base càd que  $A^t = e_r$  alors on vérifie après pivotage de la matrice des coefficients de (PP) sur  $A_r^s$ , que la base  $B' = B + \{A^s\} \setminus \{A^t\}$  est réalisable et que le nouveau programme est écrit sous forme canonique par rapport à la nouvelle base  $B'$ .

### 5.1 Algorithme du simplexe.

On dispose d'une base réalisable  $B^0$ .

1.  $B^0$  base réalisable du départ. Itération  $k = 0$ .
2.  $k \leftarrow k + 1$ .
3. à l'itération  $k$ . Soit  $B$  la base courante  $x = (x_B, x_N)$  la solution de base correspondante : calculer

$$\begin{aligned}\bar{b} &= B^{-1}b \\ \pi &= c_B B^{-1} \text{ (les multiplicateurs du simplexe)} \\ \bar{c}_N &= c_N - \pi N\end{aligned}$$

4. si  $\bar{c}_N \leq 0$  : l'optimum est atteint.  
si  $\exists s$  tel que  $\bar{c}_s > 0$  alors
5. soit  $A^s$  la colonne  $s$  de  $A$  : calculer  $\bar{A}^s = B^{-1}A^s$ 
  - si  $A^s \leq 0$  stop : l'optimum est non borné  $(+\infty)$
  - sinon calculer  $\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s} : \bar{A}_i^s > 0 \right\}$
6. soit  $x_t$  la variable correspondant à la  $r^{ième}$  ligne de la base, càd telle que  $B^{-1}A_t = e_r$  ( $m$ -vecteur à composantes toutes nulles sauf la composante  $r$  égale à 1); alors la variable  $s$  prend la valeur  $\hat{x}_s > 0$  (entre en base); la variable  $t$  s'annule ( $\hat{x}_t = 0$ ) (sort de la base) la nouvelle base réalisable  $\hat{B} = B + \{A^s\} - \{A^t\}$ , calculer l'inverse de la nouvelle base  $\hat{B}^{-1}$  et retourner à (2).

**Remarque 15** - Dans (6) on a supposé que  $\hat{x}_s > 0$  càd que  $\bar{b}_r > 0$ . Si  $\bar{b}_r = 0$  alors la nouvelle solution obtenue est la même que la précédente, et ce sommet est représenté par plusieurs bases réalisables c'est un cas de dégénérescence. Si (P) est écrit sous forme canonique par rapport à une base optimale  $\hat{B}$  alors :  
- Si  $\bar{c}_N < 0$  la solution de (P) est unique.

- Si  $\exists \bar{c}_s = 0$ ,  $s \in \hat{N}$  alors la solution n'est pas unique en générale.  
On peut choisir  $\hat{x}_s = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_i^s} : \hat{A}_i^s > 0 \right\}$ , on détermine ainsi un ensemble de solutions réalisable pour lesquels  $z = \hat{\zeta}$ .

**Théorème 16** *Convergence finie.*

*Sous l'hypothèse de non-dégénérescence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre fini d'itérations.*

**Démonstration.** Il suffit d'observer que le nombre de sommets est fini, et que la croissance stricte de  $z$  interdit de passer deux fois par le même sommet.

■

### 5.1.1 Problèmes soulevés par la dégénérescence.

Dans le cas de dégénérescence où  $\bar{b}_r = 0$ , on a  $\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = 0$ . Alors la valeur de la fonction  $z$  ne varie pas après le changement de base (en effet  $z(\hat{x}) = z_B + \bar{c}_s \hat{x}_s = z_B$ ).

Il est possible après un certain nombre de changements de bases de retrouver une base déjà rencontrée et de cycliser indéfiniment.

On peut régler le problème de plusieurs façons.

1. Par perturbation des données du problème.
2. Par des règles de sélection du pivot (R.G. Bland 1977).

A chaque itération de l'algorithme du simplexe

- parmi toutes les variables susceptibles d'entrer en base (càd telles que  $\bar{c}_s > 0$ ) choisir celle du plus petit indice.
- parmi toutes les variables susceptibles de quitter la base (càd toutes les variables  $x_r$  telles que  $\frac{\bar{b}_r}{\bar{A}_r^s} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_i^s} : \bar{A}_i^s > 0 \right\}$ ) choisir celle du plus petit indice.

Bland a montré que même en cas de dégénérescence cette règle assure la convergence finie de la méthode du simplexe.

## 5.2 Complexité de l'algorithme et efficacité pratique.

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas.

Kelle et Minty (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissant exponentiellement en fonction de la taille du problème (contraintes et variables) la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle.

## 6 Exercices

### Série N° 1 Programmation linéaire

**Exercice 17** Montrer que le problème d'optimisation :

$$(P) \quad \begin{cases} \min r.x + s.y \\ B.x + D.y \geq f \\ M.x + N.y \leq g \\ P.x + Q.y = h \\ x \geq 0 \end{cases}$$

est un programme linéaire.

**Exercice 18** Considérons le programme linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Mettre ce programme sous forme canonique, sous forme standard.
2. Le problème étant mis sous la forme standard, on a  $m = 3$  et  $n = 6$   
Ecrire  $A_2, A^3, A^4$  posons  $I = \{1, 3\}$  et  $J = \{2, 4, 5\}$ .  
Ecrire  $b_I, C^J, A_I, A^J, A_I^J$ .

**Exercice 19** Montrer que le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \min C.x \\ A.x = b \\ \alpha_j \leq x_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

est un programme linéaire. L'écrire sous forme standard.

**Exercice 20** Montrer que le problème d'optimisation :

$$(P) \quad \begin{cases} \min c.x - \sum_{i=1}^n |v_i| \\ A.x - Uv = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(où  $U$  est la matrice unité de la forme  $(m, m)$ ), peut s'écrire sous forme d'un programme linéaire.

**Exercice 21** Un grossiste désire renouveler son stock de savon. Il s'adresse à trois fabricants  $F1, F2$  et  $F3$  pour une commande de 20 unités (unité=100kg). Il est cependant tenu d'acheter une quantité non nulle aux fabricants  $F1$  et  $F2$ .

Quelles sont les commandes à passer à chacun de ces fournisseurs de manière à avoir une dépense minimale, si l'on sait que

- $F1$  peut fournir au maximum 10 unités, mais n'accepte jamais une commande inférieure à 5 unités.
- $F2$  peut fournir au maximum 8 unités, mais n'accepte jamais une commande inférieure à 4 unités.
- $F3$  peut fournir au maximum 9 unités.
- Les prix d'achat unitaires (en centaines de DH) auprès de chaque fabricant sont les suivants :
  - $F1$  : 11 pour les 5 premiers et 9 pour les suivants.
  - $F2$  : 8.
  - $F3$  : 10.

**Exercice 22** Un éditeur dispose de deux dépôts,  $D_1$  et  $D_2$ , possédant respectivement 5 et 4 exemplaires d'un ouvrage. Trois libraires,  $L_1, L_2, L_3$  lui demandant respectivement 2, 3 et 4 exemplaires de cet ouvrage au cours de la journée. Si les coûts unitaires de transport des dépôts vers les libraires sont les quantités indiquées dans le tableau ci-dessous, déterminer le plan de transport de coût minimums.

|       | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $D_1$ | 2     | 5     | 2     |
| $D_2$ | 7     | 3     | 6     |

**Exercice 23** On considère le problème linéaire suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \max z = x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1. Donner toutes les solutions de bases de  $(P)$ .
2. Donner les solutions de bases réalisables de  $(P)$ .
3. Représenter graphiquement les solutions de bases et les solutions de bases réalisables. Résoudre graphiquement le problème.
4. Déterminer la base optimale, puis écrire le problème sous forme canonique par rapport à cette base.

**Exercice 24** Soit le système linéaire

$$(1) \quad Ax = b. \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad , \quad b \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$$

3 cas sont possibles :

1. Le système est de plein rang. Montrer que l'ensemble des solutions  $\{x \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ . La solution est unique si  $m = n$ .

2. Le système n'est pas de plein rang et  $\{x \mid Ax = b\} = \emptyset$ . Montrer que dans ce cas  $\exists y \in (\mathbb{R}^m)^t$  tel que  $yA = 0$  et  $yb \neq 0$ . (on dit que le système est incompatible)
3. Le système n'est pas de plein rang et  $\{x \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ . Montrer qu'il existe  $y \in (\mathbb{R}^m)^t$  tel que
- (a)  $yA = 0$  et  $yb = 0$ .
- (b)  $\exists I \subset \{1, \dots, m\}$  tel que (2)  $A_I x = b_I$  est de plein rang et équivalent à (1).

Les équations  $A_i x = b_i$   $i \notin I$  sont dites rédundantes. Chaque équation rédundante peut être exprimée comme combinaison linéaire des équations de l'ensemble  $I$ .

4. Application :

- (a) Déterminer le rang du système  $Ax = b$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (b) Donner un système équivalent (2)  $A_I x = b_I$ .
- (c) Donner une base de  $A_I$  et résoudre (2) suivant cette base.