Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

SMPC-S1
M3-E1 : Analyse

Série d'exercices 2

Exercice 1 *Les suites suivantes sont-elle majorées, minorées ? monotones ? :*

1. $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$, $\quad u_n = (-1)^n$
2. $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$, $\quad u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = n^2+1$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)}$

Exercice 2 *On considère la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.
En utilisant le fait que $\frac{1}{n^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ *pour tout* $0 \leqslant k \leqslant n$, *donner un encadrement de* u_n. *Que peut-on en déduire ?*

Exercice 3 *Soit* (u_n) *la suite réelle définie par récurrence en posant* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* (u_n) *est croissante et majorée.*
2. *Montrer que* (u_n) *converge vers le nombre réel positif* ℓ *qui vérifie* $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ *et calculer* ℓ.
3. *On suppose maintenant* $v_0 = 1$ *et* $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* v_n *est croissante non bornée.*

Exercice 4 *Etudier la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(u_n^2 - 3u_n + 5)$ $\forall n \geqslant 0$. *Montrer que* u_n *diverge. (On montrera que* $u_{n+1} \geqslant k u_n$ *pour un certain* $k > 1$.

Exercice 5 *Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?*

1. *Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.*
2. *Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?*
3. *La somme de deux suites converge si et seulement si les deux suites convergent.*

Exercice 6 *Une méthode ancienne (attribuée à Platon) permettait d'extraire la racine carrée d'un nombre par un procédé itératif. Pour calculer la racine carrée d'un nombre* k *construit la suite réccurente* $u_o = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n+k}{u_n+1}$. *On suppose dans notre cas* $k = 2$.

1. *Montrer que* $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ *pour tout* n
2. *Vérifier que* $V_n = u_{2n}$ *et* $W_n = u_{2n+1}$ *monotone*
3. *En déduire que* v_n *et* w_n *convergent toute les deux vers* $\sqrt{2}$
4. *donner* $\sqrt{2}$ *a 4 chiffre après la virgule.*

Exercice 7 *Dans l exercice préc"dent on au vu calculer* $\sqrt{2}$ *; On donne deux autre suites récurrente dont on admet la convergence* $v_0 = 1$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + \frac{1}{v_n}$ *et* $w_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n \frac{(x_n^2+6)}{3x_n^2+2}$.

1. *Montrer que* v_n *et* x_n *converge vers* $\sqrt{2}$
2. *en calculant* v_2 *et* x_2 *laquelle des deux suites vous semble la plus efficace.*

Correction 1 *1.* $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ *croissante bornée*

2. $u_n = (-1)^n$ *bornée non monotone*

3. $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{6}$, u_n *altèrne un nombre fini de valeurs : bornée non monotone*

4. $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *bornée decroissante*

5. $u_n = n^2+1$, *croissante non bornée*

6. $u_n = \dfrac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)}$ *borné non monotone (elle est toutefois decroissante a partir de* $n=2$*)*
$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(n+1)^2-(-1)^n(n+2)} - \frac{1}{n^2+(-1)^n(n+1)} = \frac{n^2+(-1)^n(n+1)-((n+1)^2-(-1)^n(n+2))}{((n+1)^2-(-1)^n(n+2))(n^2+(-1)^n(n+1))}$
$= \frac{n^2-(n+1)^2-(-1)^n)}{((n+1)^2-(-1)^n(n+2))(n^2+(-1)^n(n+1))} \leqslant 0$ *pour* $n \geqslant 2$

Correction 2 $\frac{1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ *pour* $n \geqslant 2$*. Donc* u_n *converge vers zéro.*

Correction 3 $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Par récurrence $0 \leqslant u_n \leqslant 2$*, et on a* $u_0 = 1 \leqslant u_1 = \sqrt{2}$ *et par induction si* $u_{n-1} \leqslant u_n$ *on aura*$u_n = \sqrt{1+u_{n-1}} \leqslant \sqrt{1+u_n} = u_{n+1}$*, donc* (u_n) *est croissante et majorée.*

2. (u_n) *est croissante et majorée, donc que* (u_n) *converge vers le nombre réel positif* ℓ *qui vérifie* $l = \sqrt{1+l}$ *et par suite* $\ell^2-\ell-1=0$*. On résoud l' équation pour avoir* $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. La croissance s obtient de la même manière,par contre si on suppose qu elle est majorée, on aura croissante majorée, donc convergente vers l *satisfaisant* $l = \sqrt{1+l^2}$ *et donc* $\ell^2-\ell+1=0$ *impossible.*

Correction 4 *On a* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(u_n^2-3u_n+5) = \dfrac{1}{2}u_n(u_n-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}) \geqslant \dfrac{11}{8}u_n$

Correction 5 *1. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang. Faux* $u_n = \frac{exp(-1)^n}{n}$

2. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Vrais (cours)
Réciproque Faux $u_n = \frac{1}{n}$

3. La somme de deux suites converge si et seulement si les deux suites convergent. Faux $u_n = n$ *et* $v_n = \frac{1}{n} - n$

Correction 6 *On pose* $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$*, alors* f *est décroissante, on ecrit* $f(x) = 1+\frac{1}{x+1}$ *si on veut eviter la dérivée.*

1. par induction $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ *on aura* $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ *ce qui donne* $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

2. v_n *et* w_n *verifient* $v_{n+1} = fof(v_n)$ *et* $w_{n+1} = fof(w_n)$ *et comme* fof *croissante, implique que* u_{2n} *et* u_{2n+1} *sont monotones*

3. les deux suiteS sont monotones bornées, donc convergente vers l_1 *et* l_2 *respectivement. On résoud* $l_1 = f(l_2$ *et* $l_2 = f(l_1$ *pour trouver* $l_1 = l_2 = \sqrt{2}$.

Correction 7 *1. On passe a la limite dans la formule de* x_n *et de* v_n *pour montrer que* $l = \sqrt{2}$

2. par la calculatrice $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096980$*. On a* $v_1 = 1.5, v_2 = 1.41, v_2 = 1,41421$ *et* $x_1 = 1.41 x_2 = 1,414213, x_3 = 1,414213562373095048$