COURS DE MATHÉMATIQUES

AVEC SUPPORT MAPLE

FILIÈRE: SCIENCES DE LA VIE, DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS
PREMIER SEMESTRE
2019-2020

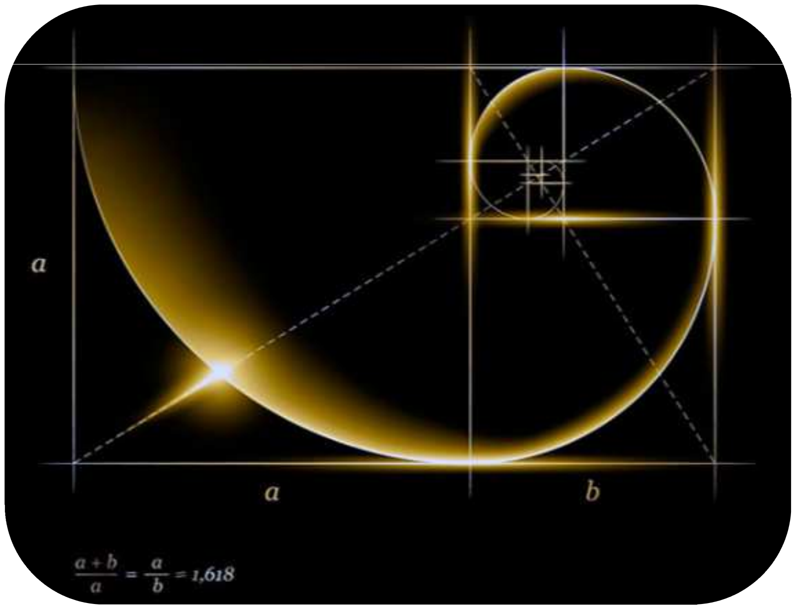
F. ZINOUN

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat

Ce support englobe l'ensemble du programme de mathématiques destiné aux étudiants entamant le premier semestre de la filière Sciences de la Vie, de la Terre et de l'Univers. Il s'agit d'un support de cours qui, d'une part, ne peut se substituer à un suivi régulier des séances de cours et des travaux dirigés en présentiel, et d'autre part, ne peut prétendre jouer le rôle d'un manuel. Il n'est pas nécessaire de préciser ici les particularités du cours: l'étudiant s'en rendra compte au fur et à mesure; mais s'il faudrait en citer une, ce serait bien les sessions Maple qui ponctuent le texte et qui lui confèrent - on l'espère - un certain élan et une certaine originalité. Les exemples en biomathématiques ne manquent pas dans le texte, et c'est tout à fait normal. Un accent particulier a été aussi mis sur les suites divergentes et bornées, ne serait-ce que pour vaincre la phobie de la suite à comportement exotique, la suite logistique de la dynamique des populations en étant un des exemples les plus enrichissants. Des suites numériques donc, à la méthode de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires, en passant par les grands théorèmes de l'analyse, l'intégration et les équations différentielles, le présent document se voulait être un premier compagnon de route pour tout étudiant amené à faire de la mathématique .. avec une petite teinte biologique !

Chapitre 1

Suites numériques



Suites

Définition générale

Une *suite* est une famille (généralement infinie) d'objets de notre intuition ou de notre pensée, appelés *termes*, famille indéxée par les (ou une partie des) entiers naturels. Lorsque tous les termes de la suite appartiennent à un même ensemble E, celle-ci peut être assimilée à une *application* u de $\mathbb{N}$ dans E. La suite sera alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n) si aucune confusion n'est à craintre, u_n étant le terme de la suite de rang (ou d'indice) n.

En particulier, on parle de suite *entière*, *réelle* ou *complexe* lorsque E est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, respectivement. Mais il se peut bien être question de suite d'ensembles, de relations entre ensembles, d'événements, de procédures, de mesures, etc.

Dans un sens, la notion de *suite numérique* est l'équivalent *discret* de celle de *fonction numérique*, notion dont l'analyse est détaillée au chapitre suivant.

On s'intéresse désormais dans ce cours aux suites numériques réelles, c.-à-d. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si u_n est donné explicitement en fonction de n, on dit que l'on connaît *le terme général* de la suite (u_n). Cependant, une suite peut être définie d'une quelconque autre manière (voir par exemple le paragraphe sur les suites récurrentes), et il s'avère parfois difficile - voire impossible - d'exprimer u_n en fonction de n.

$*)$ La suite harmonique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}$$

$*)$ La suite *constante* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = a \in \mathbb{R}$$

$*)$ La suite stationnaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour un entier p

$$u_n = a \in \mathbb{R} \ \ \textit{pour tout } n \geq p$$

$*)$ La suite *alternée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

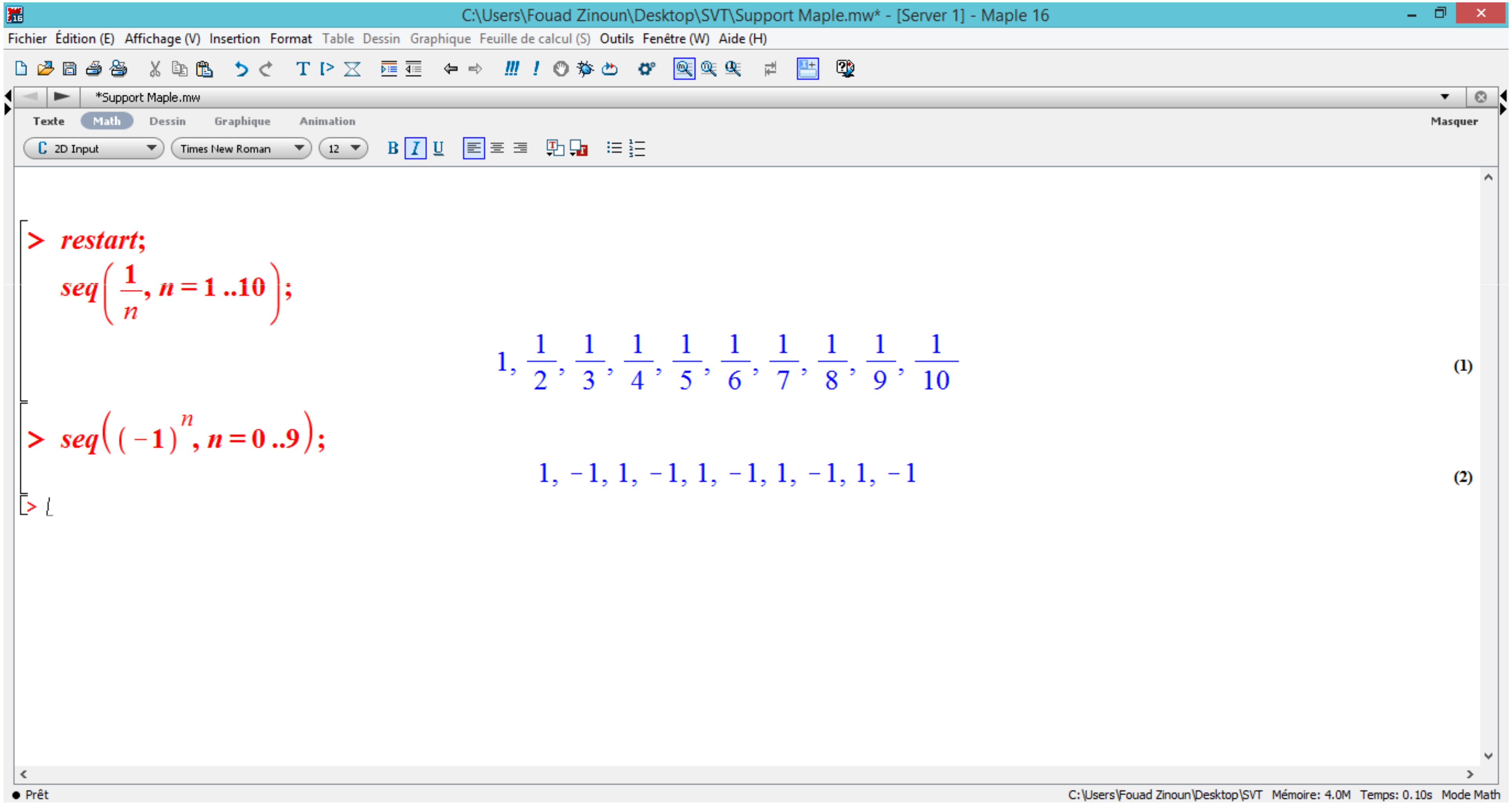
$$u_n = (-1)^n$$

à ne pas confondre avec l'ensemble des valeurs de la suite, donné par la paire $\{-1, 1\}$.

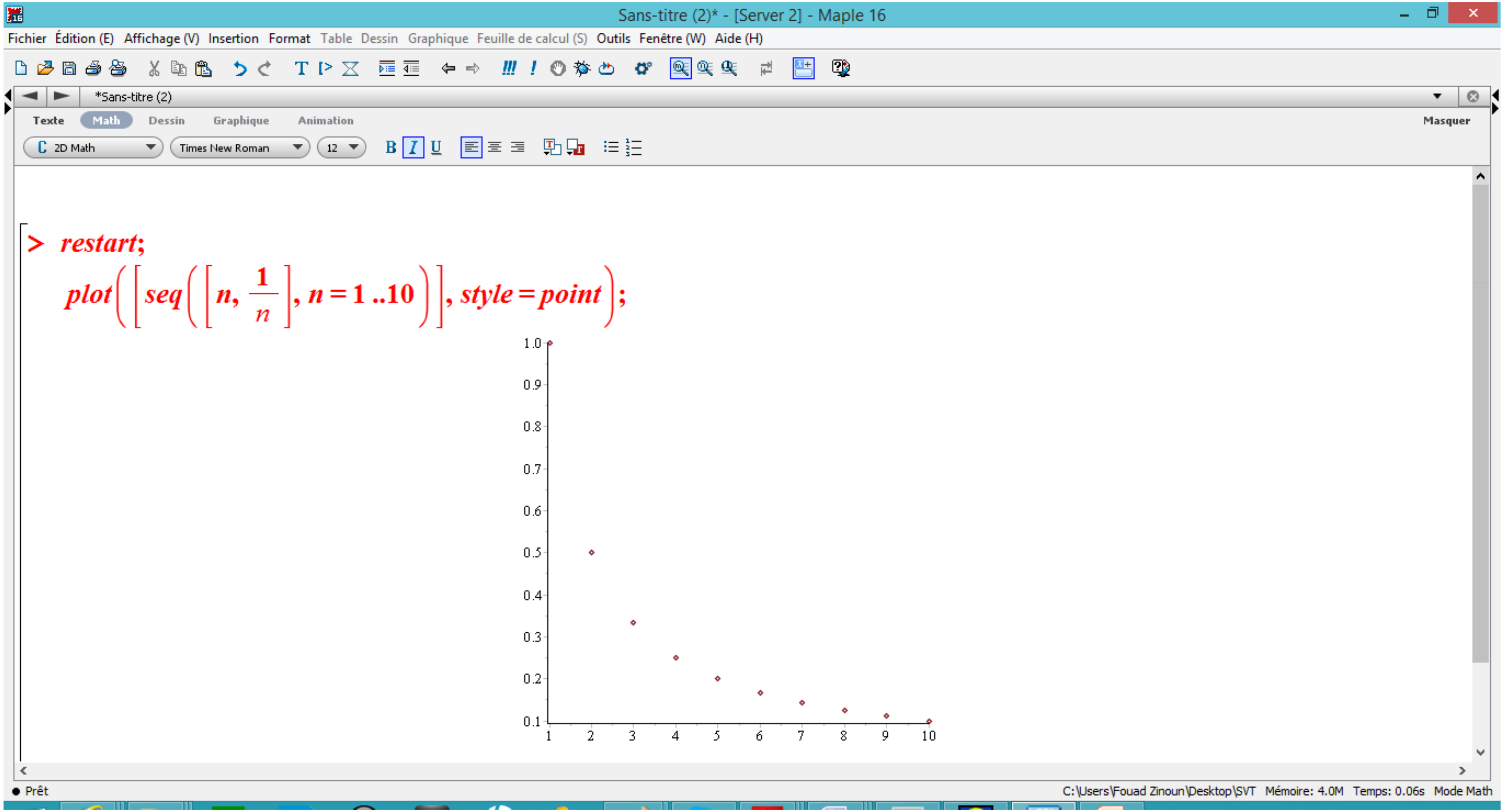
$*)$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$u_0 = 0, \ \ u_1 = \sqrt{1}, \ \ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \ \ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \ \ \textit{etc.}$$

Les dix premiers termes de la suite harmonique et de la suite alternée avec la commande "seq" :



Représentation graphique avec la commande "plot":



Chaque terme de la suite se détermine en annonçant les chiffres (avec leur nombre d'apparition) composant le terme précédent :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 11, \quad u_2 = 21, \quad u_3 = 1211, \quad u_4 = 111221, \quad u_5 = 312211, \quad etc.$$

Les premiers termes …

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211
1321132132111213122112311311222113111221131221
11131221131211131231121113112221121321132132211331222113112211
311311222113111231131112132112311321322112111312211312111322212311322113212221
132113213221133112132113311211131221121321131211132221123113112221131112311332111213211322211312113211

Image Wikipédia

On montre que

- Aucun terme de la suite ne comporte un chiffre supérieur à 3.
- Tous les termes de la suite possèdent un nombre pair de chiffres, sauf le terme initial.
- Les termes de rang pair se terminent par 11, ceux de rang impair par 21, à l'exception du terme initial.
- En moyenne, les termes de la suite possèdent 50% de chiffres 1, 31% de 2 et 19% de 3.

Et pour des analogies surprenantes entre la suite audioactive de Conway et la désintégration radioactive en physique, consulter la page suivante :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Conway

Sens de variation d'une suite

Croissance, décroissance, monotonie

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* (resp. *décroissante*) lorsque $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite est dite *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

On définit une suite *strictement* croissante ou strictement décroissante (et donc strictement monotone) en adoptant des inégalités strictes.

Il se peut que le sens de variation d'une suite ne se "stabilise" qu'à partir d'un certain rang. En éliminant les premiers termes de la suite, celle-ci devient monotone.

Pour montrer qu'une suite (u_n) est monotone, on peut étudier le signe de $(u_{n+1} - u_n)$ lorsque par exemple la suite est définie par des sommes, ou comparer le rapport (u_{n+1}/u_n) à 1 lorsque la suite est définie par des produits et garde un signe constant. On peut aussi, si l'on connaît le terme général, étudier les variations de u_n en tant que fonction de n ...

Bornitude

Suites majorées, minorées, bornées

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Elle est dite *minorée* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* lorsqu'elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à dire que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Attention: une suite non majorée n'est pas forcément croissante!

Convergence d'une suite

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers $l \in \mathbb{R}$ (ou est de limite l) lorsque son terme général admet l comme limite quand n tend vers l'infini. En d'autres termes,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ tq\ \ |u_n - l| \leq \varepsilon\ \ \textit{dès que}\ \ n \geq N_\varepsilon\ ,$$

et l'on écrit

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$$

La limite d'une suite convergente est *unique*.

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*. Il s'agit donc de suites dont le terme général admet une limite infinie ou n'a pas de limite du tout.

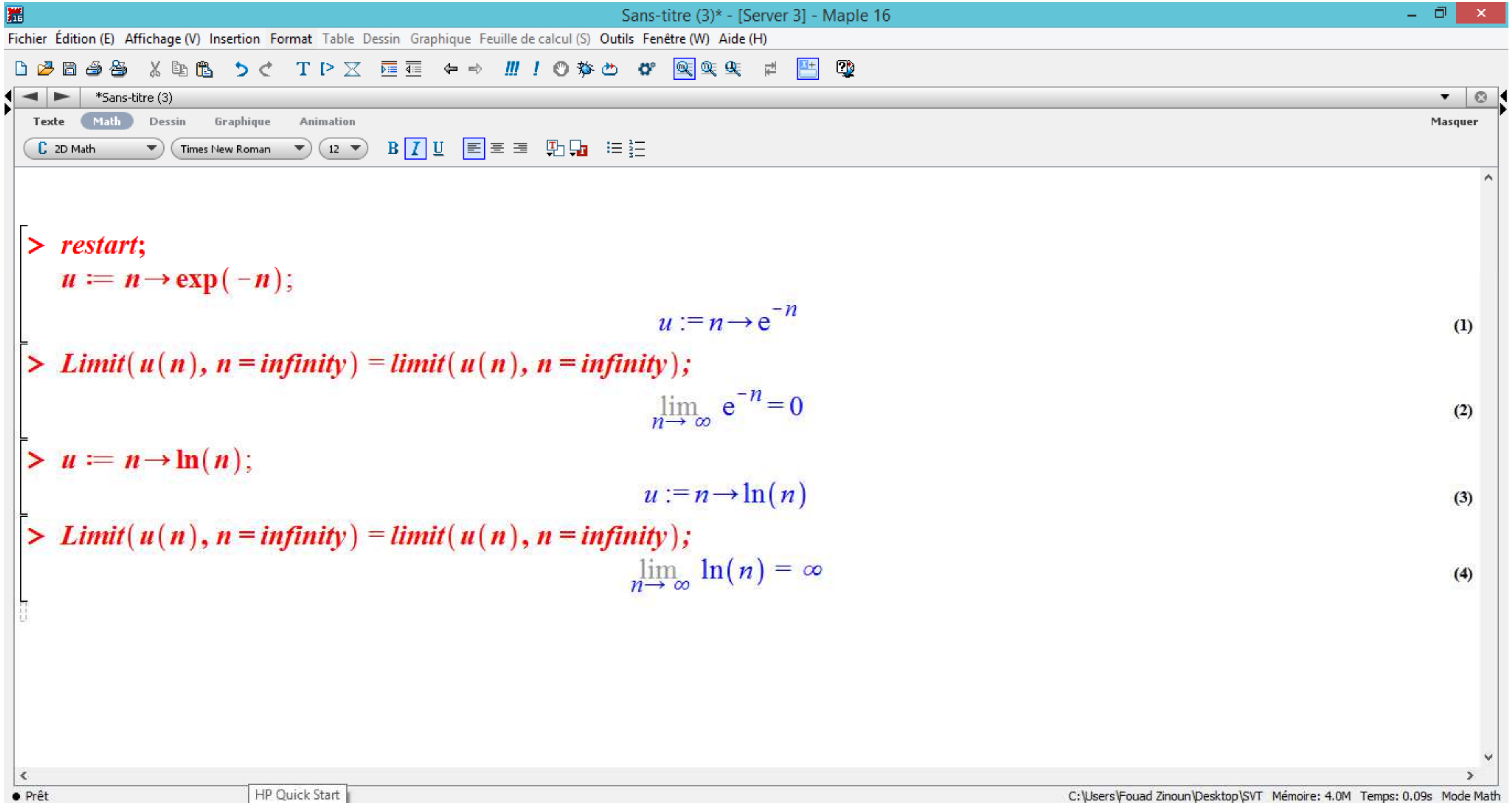
Etudier la *nature* d'une suite revient alors à chercher si celle-ci est convergente (sans nécessairement en calculer la limite) ou divergente.

La suite de terme général $u_n = e^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.

La suite de terme général $u_n = \ln(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est divergente.

La suite alternée de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, est divergente.

Calcul de la limite (lorsqu'elle existe) avec la commande "limit':



Supprimer un nombre quelconque de termes, aussi grand soit-il, mais *fini*, d'une suite ne change en rien sa nature. Ainsi, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in E}$, où E est un ensemble fini (strictement) inclus dans $\mathbb{N}$, sont de même nature et admettent la même limite, le cas échéant. En particulier, il en est de même pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n>N}$ pour tout $N\in\mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

La réciproque est fausse! Il suffit de considérer la suite alternée $(-1^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cependant, si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Toute suite convergente est bornée.

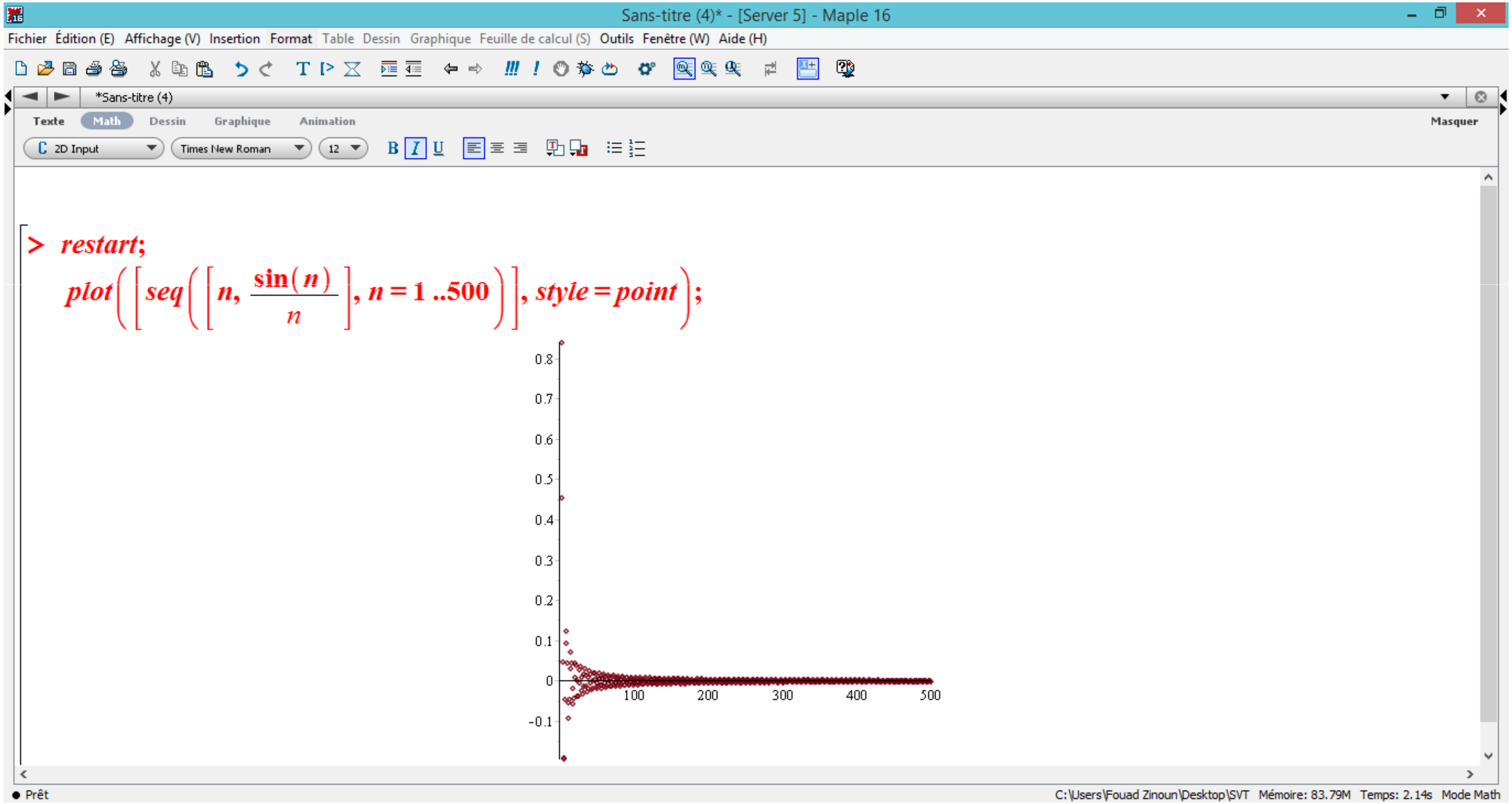
Le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 est une suite qui converge vers 0.

Exemple: Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers 0.

Comportement asymptotique de la suite $(\sin(n)/n)_n$:



Premiers critères de convergence

Suites monotones bornées

Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente.

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* lorsqu'elles sont monotones de sens contraires (c.-à-d. l'une croissante, l'autre décroissante) avec

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(u_n - v_n) = 0$$

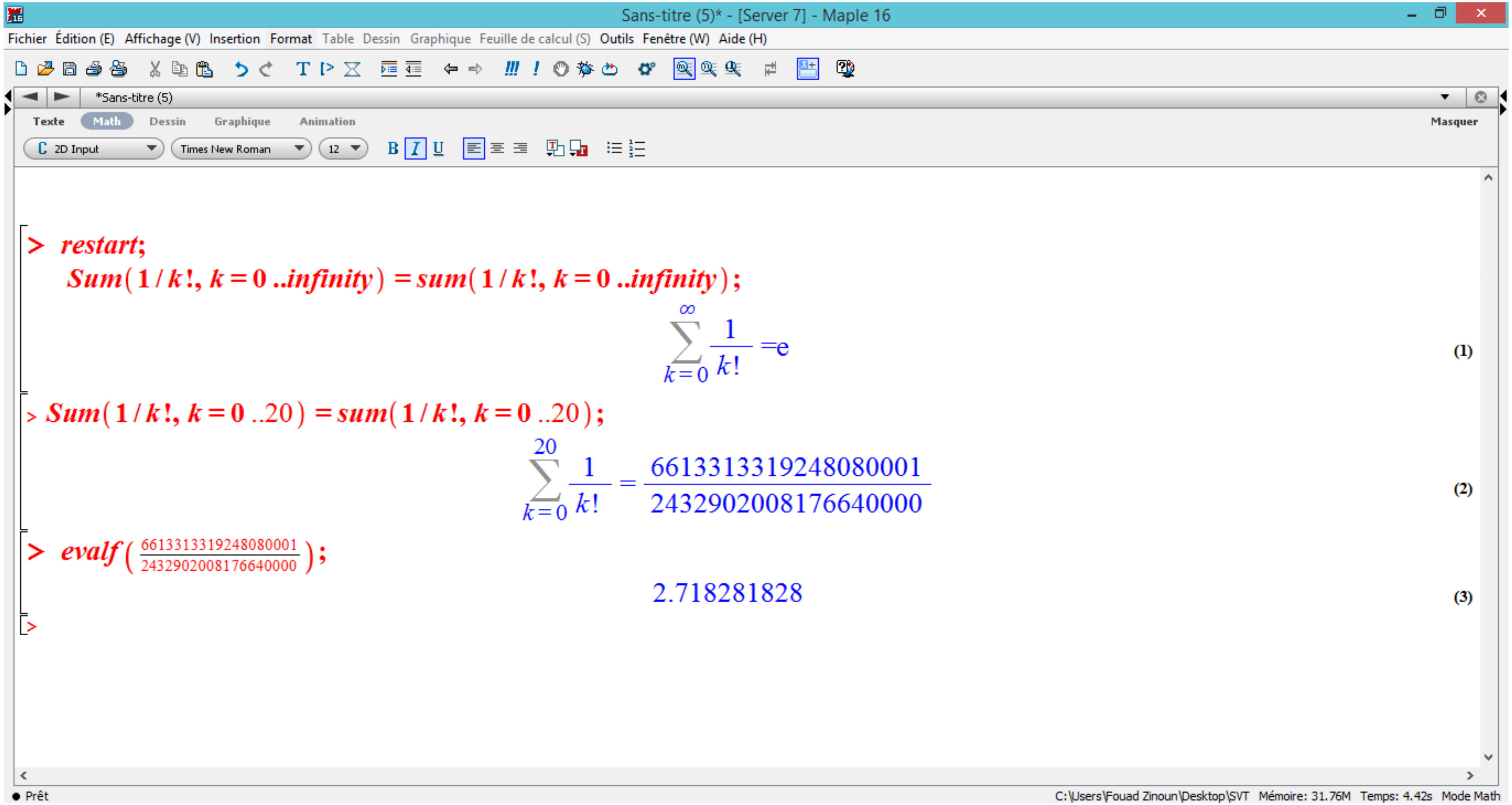
Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Exemple: Considérer les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

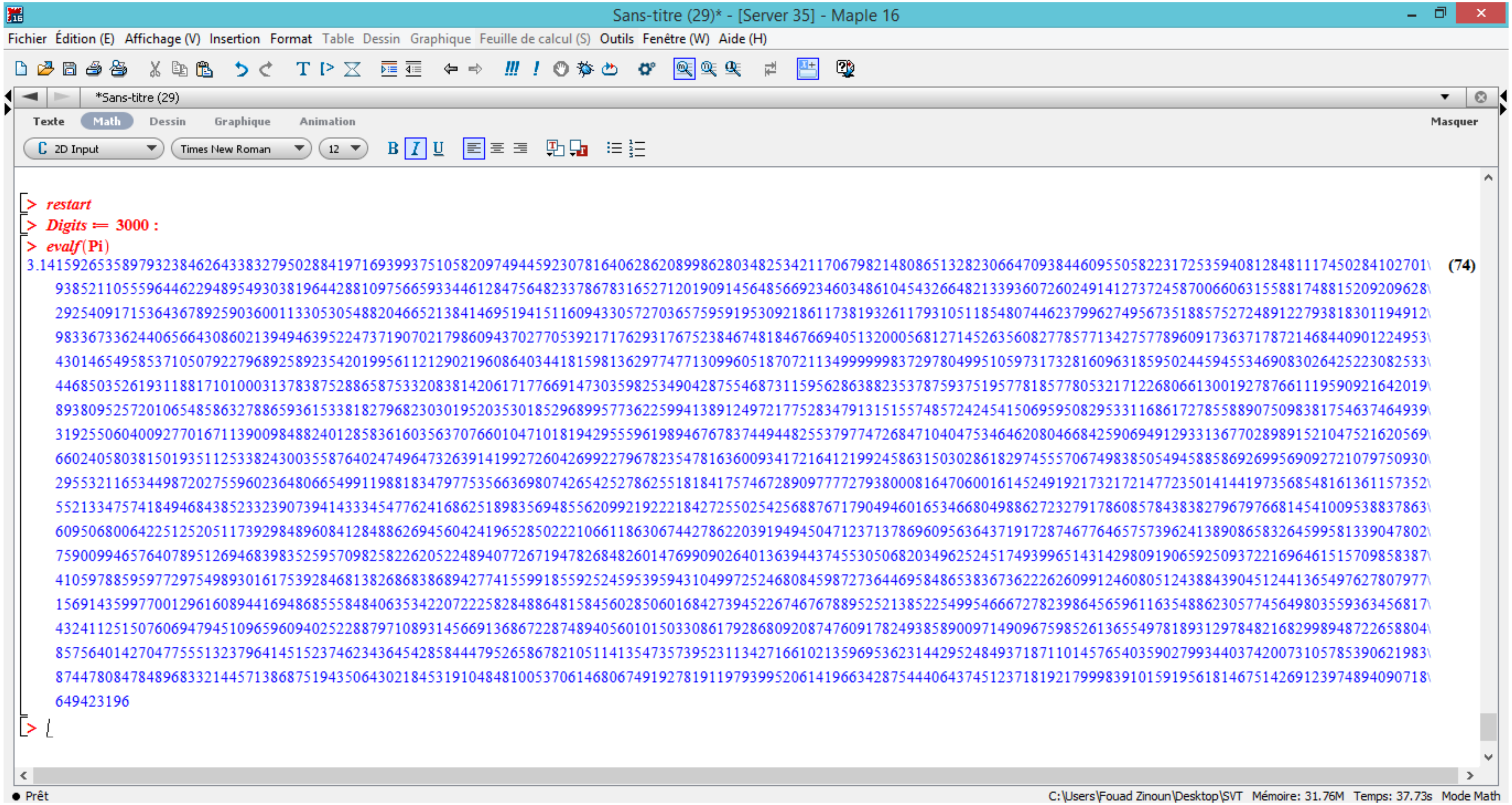
$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad , \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n} \ ,$$

et qu'on montre qu'elles convergent vers la constante de Neper e.

Approximation numérico-formelle de e avec les commandes "sum" et "evalf" :



Les 3000 premières décimales de π. A méditer ..



Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ou à partir d'un certain rang.

$$\text{Si } \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} w_n = l \in \mathbb{R}, \text{ alors } \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = l.$$

$$\text{Si } \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = +\infty, \text{ alors } \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = +\infty.$$

$$\text{Si } \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = -\infty, \text{ alors } \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = -\infty.$$

$$\text{Si } u_n < v_n, \text{ alors } \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} v_n \text{ lorsque ces deux limites existent.}$$

Suites récurrentes

Définition

Une suite *récurrente* (d'ordre 1) est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné}, \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

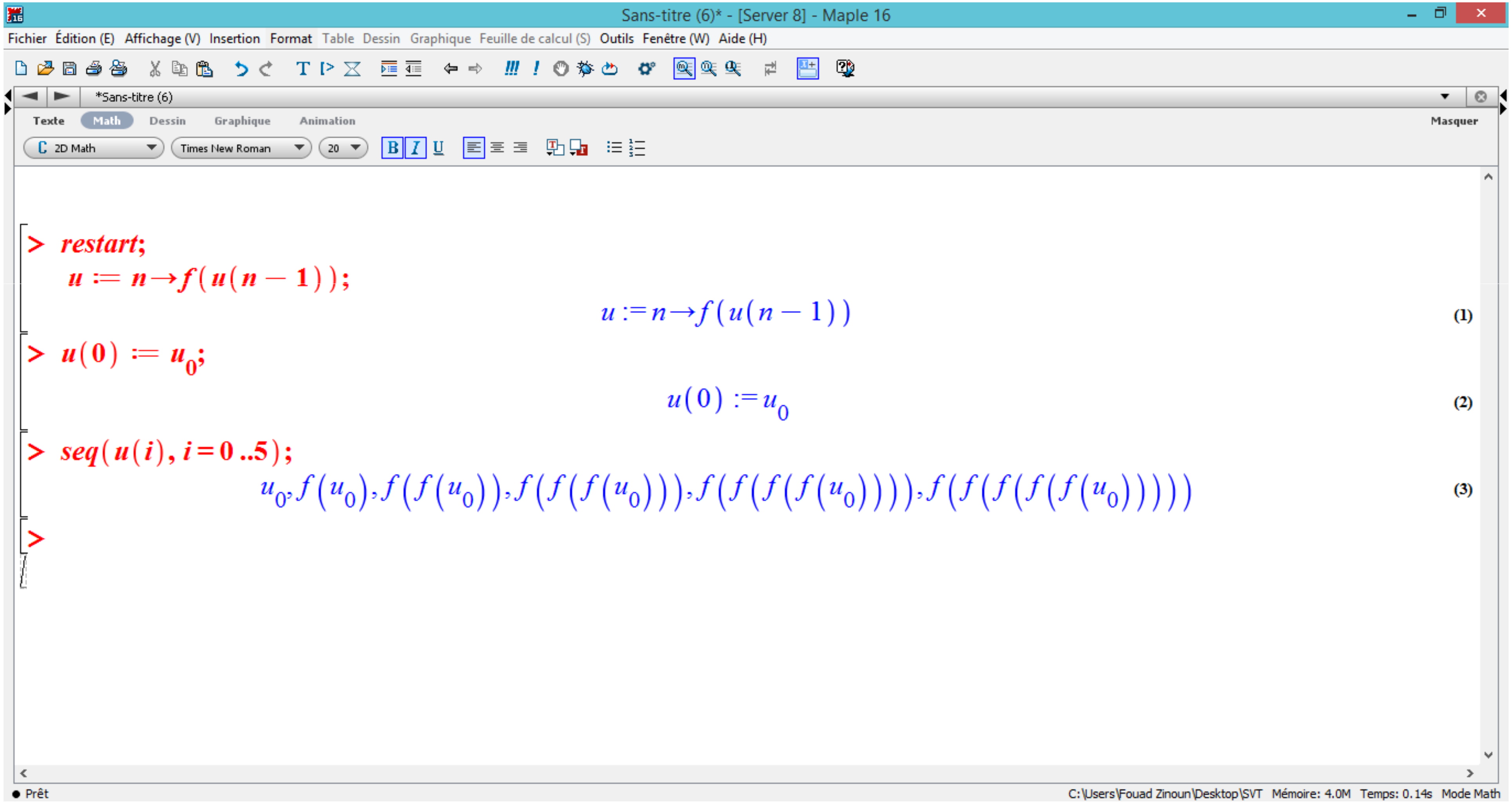
où, pour une suite réelle, f est une fonction numérique de la variable réelle, appelée *fonction de récurrence*, u_0 étant le *germe* de la suite récurrente.

Et l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^n(u_0) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n\ fois}(u_0)$$

"$\circ$" désignant la composition de fonctions, avec, par convention, $f^0(u_0) = u_0$.

Itération formelle d'une suite récurrente ..



S'il existe un intervalle I, inclus dans le *domaine de définition* de f, tel que

$$f(I) \subset I \ ,$$

alors, dès que le germe $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie dans I. L'intervalle I, qui est *stable* par f, est alors un *domaine (ou ensemble) de sécurité* pour la suite récurrente associée.

La mise en évidence du plus petit domaine de sécurité d'une suite récurrente est souvent la partie la plus compliquée pour étudier celle-ci. Ne pas confondre domaine de sécurité de la suite avec le domaine de définition de la fonction de récurrence associée !

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, toute la richesse pourrait ne pas résider dans la classe des suites convergentes, mais plutôt dans celle des suites *divergentes et bornées*. Comme exemple, considérons *la suite logistique* (dynamique des populations) définie sur le domaine de sécurité $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1[\ , \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) = ru_n\left(1-u_n\right) \ , \quad r \in [0,4] \end{cases}$$

Cette suite, pourtant simple, présente un comportement très complexe pour certaines valeurs de r. Elle fut popularisée par le biologiste Robert May en 1976 pour modéliser l'effectif d'une population au fil des générations. En voici le diagramme résumant en partie le comportement de la suite en fonction de r :

Diagramme de "bifurcation" de la suite logistique (Facultatif)

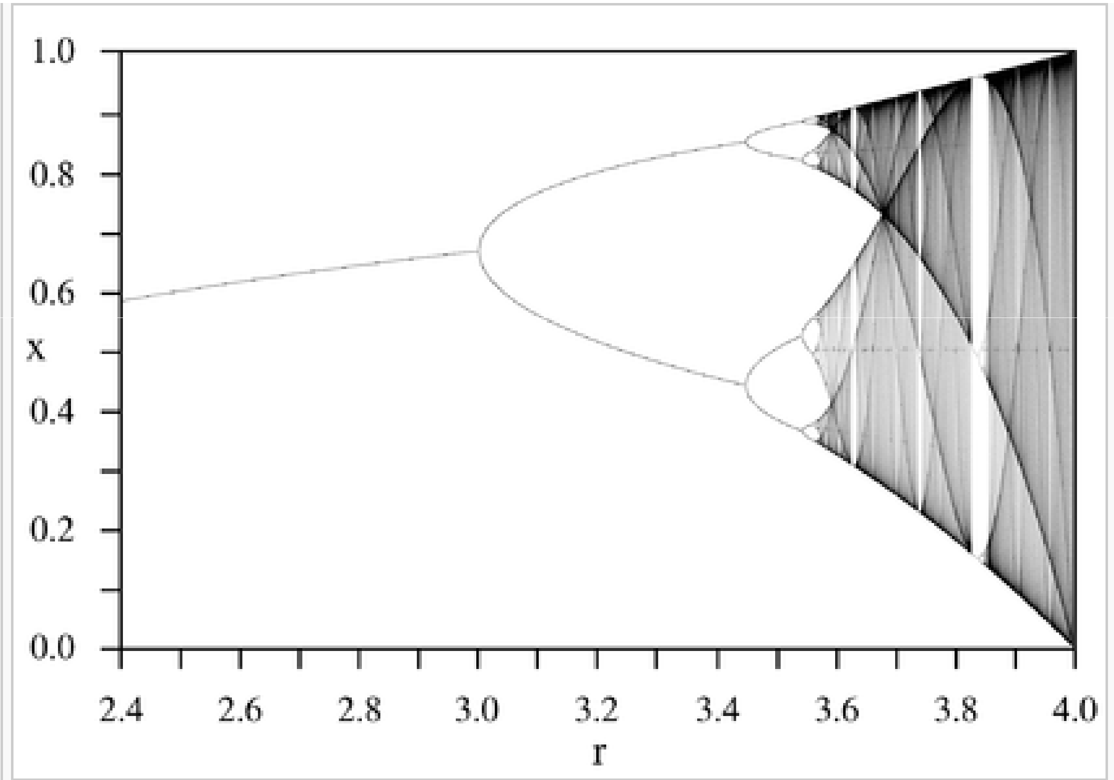


Image Wikipédia

Calculer les 100 premiers termes de la suite logistique pour $r = 4$ et $u_0 = 0,12586793$. On réalisera que la suite, bien que confinée dans l'intervalle $[0, 1]$, ne semble obéir à aucun ordre logique. C'est là un exemple des plus simples pour introduire à l'une des théorie les plus fascinantes des mathématiques modernes: *la théorie du chaos !*

Le saviez-vous ? La suite pseudo-aléatoire en bas de l'écran peut être utilisée pour chiffrer des données, la clé secrète pour le déchiffrement n'étant autre que le germe u(0) !

Sans-titre (7)* - [Server 10] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

*Sans-titre (7)

Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

2D Input Times New Roman 12

> restart;
$f := x \rightarrow r \cdot x \cdot (1 - x);$

$$f := x \rightarrow r\, x\, (1 - x) \qquad (1)$$

> $u := n \rightarrow f(u(n-1));$

$$u := n \rightarrow f(u(n-1)) \qquad (2)$$

> $r := 4;\ u(0) := 0.12586793;$

$$r := 4$$
$$u(0) := 0.12586793 \qquad (3)$$

> $seq(u(n), n = 0..100);$

0.12586793, 0.4401007768, 0.9856483321, 0.05658279011, 0.2135247119, 0.6717276372, 0.8820384746, 0.4161864157, 0.9719011325, 0.1092372846, 0.3892180010, 0.9509093948, 0.1867228707, 0.6074297610, 0.9538353858, 0.1761337704, 0.5804426613, 0.9741159129, 0.1008564046, 0.3627375610, 0.9246360914, 0.2787367596, 0.8041703135, 0.6299216815, 0.9324814267, 0.2518392623, 0.7536649929, 0.7426162856, 0.7645493517, 0.7200545621, 0.8063039587, 0.6247115396, 0.9377881274, 0.2333662221, 0.7156257139, 0.8140222061, 0.6055602162, 0.9554281631, 0.1703407530, 0.5652991235, 0.9829440979, 0.06705999322, 0.2502518021, 0.7505033503, 0.7489922859, 0.7520113663, 0.7459610850, 0.7580125787, 0.7337180370, 0.7815035167, 0.6830230804, 0.8660102083, 0.4641461097, 0.9948579943, 0.02046226191, 0.08017423099, 0.2949852947, 0.8318758826, 0.5594335941, 0.9858705914, 0.05571907366, 0.2104578339, 0.6646613362, 0.8915465775, 0.3867651106, 0.9487114390, 0.1946321780, 0.6270019731, 0.9354819952, 0.2414217274, 0.7325491078, 0.7836836498, 0.6780943473, 0.8731296138, 0.4430971652, 0.9870482697, 0.05113593193, 0.1940841936, 0.6256620776, 0.9368361689, 0.2366966462, 0.7226853755, 0.8016448942, 0.6360414313, 0.9259709158, 0.2741951156, 0.7960486164, 0.6494208670, 0.9106936180, 0.3253230085, 0.8779517946, 0.4286097638, 0.9796137366, 0.07988265465, 0.2940056646, 0.8302653349, 0.5636992343, 0.9837696301, 0.06386777997, 0.2391547466, 0.7278390151 (4)

>

Prêt C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.07s Mode Math

Si f est une fonction *croissante* sur un intervalle I avec $f(I) \subset I$, la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

est monotone.

Ainsi, si $u_0 < u_1$ (resp. $u_0 > u_1$), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).

Si f est *décroissante* sur I, les deux “sous-suites” $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

Si f est une fonction *continue* sur I avec $f(I) \subset I$, et si l'on sait que la suite récurrente définie par $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est convergente, alors sa limite l vérifie

$$f(l) = l$$

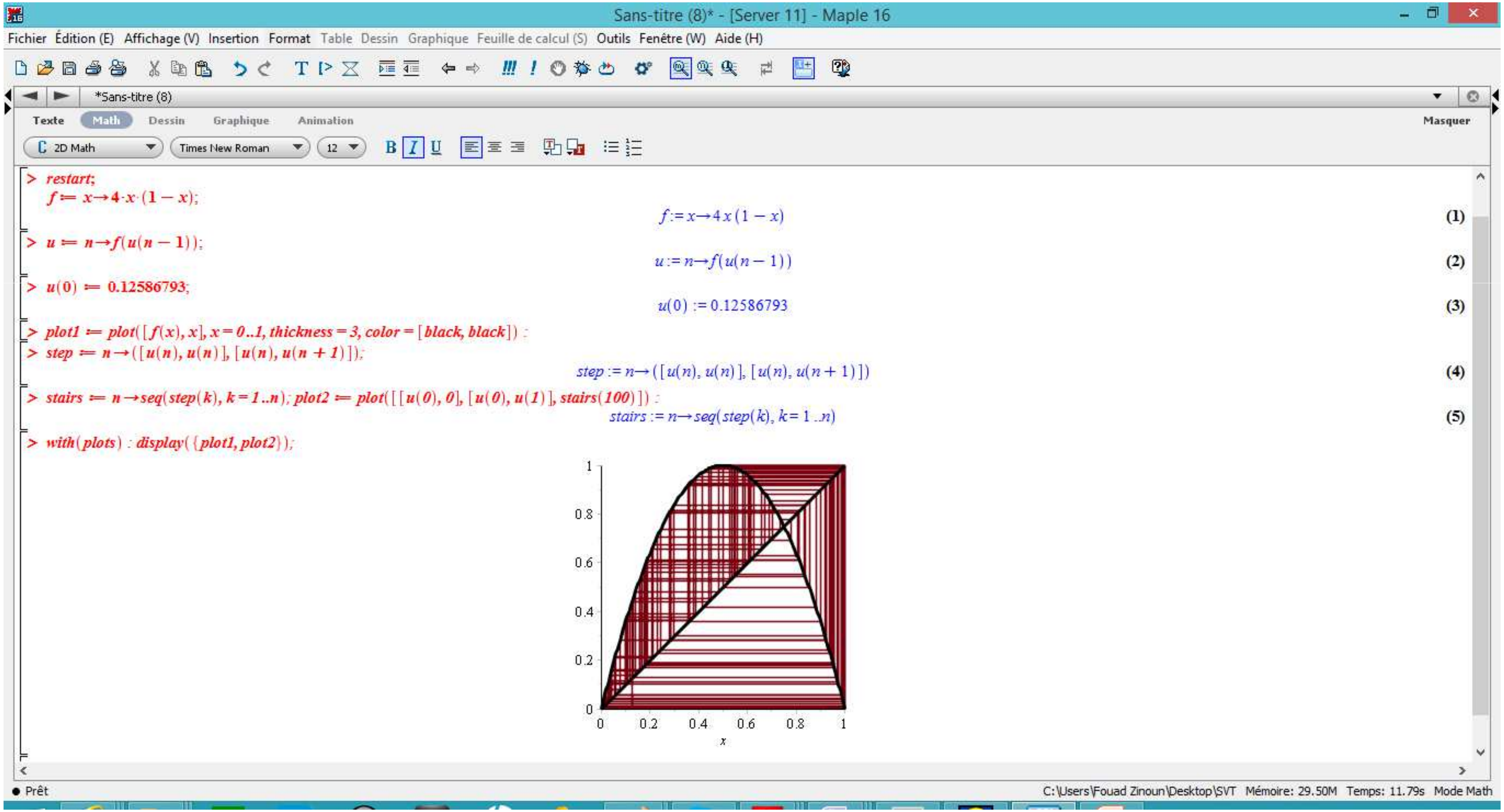
Attention! Il se peut que l'équation $f(x) = x$ admette une (voir plusieurs) solution(s) sans pour autant que la suite récurrente correspondante soit convergente. Il suffit de considérer la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \ , \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Elle est divergente alors que l'équation $x^2 = x$ admet les solutions 0 et 1.

Par contre, si on avait pris $u_0 = 1/2$, la suite serait convergente vers 0 qui est bien une solution de l'équation $x^2 = x$.

Diagramme en toile d'araignée de la suite logistique à l'aide des fonctions "step" et "stairs"



Suites récurrentes particulières

Suites arithmétiques

Ce sont les suites récurrentes (divergentes) de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n + r \ , \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$r \in \mathbb{R}^*$ étant la *raison* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On déduit alors le terme général en fonction de n :

$$u_n = u_0 + nr$$

ou, de manière générale, pour tous les entiers n et p :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

$$\frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} = u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On montre que la somme de termes successifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$S_n = \frac{(nombre\ de\ termes\ à\ sommer)(1^{er}\ terme + dernier\ terme)}{2}$$

Remarquer que S_n est indépendante de r.

Exemple:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

Quelques formules ..

Sans-titre (9)* - [Server 12] - Maple 16

```
> restart;
  Sum(k, k=1..n) = factor(sum(k, k=1..n));
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\, n\, (n+1) \qquad (1)$$

```
> Sum(k, k=1..n-1) = factor(sum(k, k=1..n-1));
```

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}\, n\, (n-1) \qquad (2)$$

```
> Sum(k+1, k=0..n) = factor(sum(k+1, k=0..n));
```

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{1}{2}\, (n+2)\, (n+1) \qquad (3)$$

```
>
```

Ce sont les suites récurrentes de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^*, \\ u_{n+1} = qu_n \ , \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$q \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$ étant la *raison* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On déduit alors le terme général en fonction de n :

$$u_n = q^n.u_0$$

ou, de manière générale, pour tous les entiers n et p :

$$u_n = q^{(n-p)}.u_p$$

Pour $q > 0$ et $u_0 > 0$,

$$\sqrt{u_{n+1}u_{n-1}} = u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Remarquer que pour éviter les suites constantes, et qui auraient pu être considérées dans la définition comme des suites arithmétiques de raison $r = 0$ ou encore des suites géométriques de raison $q = 1$, nous avons imposé à r d'être non nul ainsi qu'au germe d'une suite géométrique, et à q d'être différent de l'unité. Le cas $q = 0$ menant à une suite stationnaire a lui aussi été exclu.

On montre que la somme de termes successifs d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule :

$$S_n = 1^{er}\ terme.\frac{(1 - q^{(nombre\ de\ termes\ à\ sommer)})}{(1-q)}$$

Exemple:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{(1 - q^{(n+1)})}{(1-q)}$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + \cdots + u_n = u_1 \frac{(1 - q^n)}{(1-q)}$$

Une suite géométrique de raison q converge (vers 0) ssi $|q| < 1$. Et l'on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q^n = 0$$

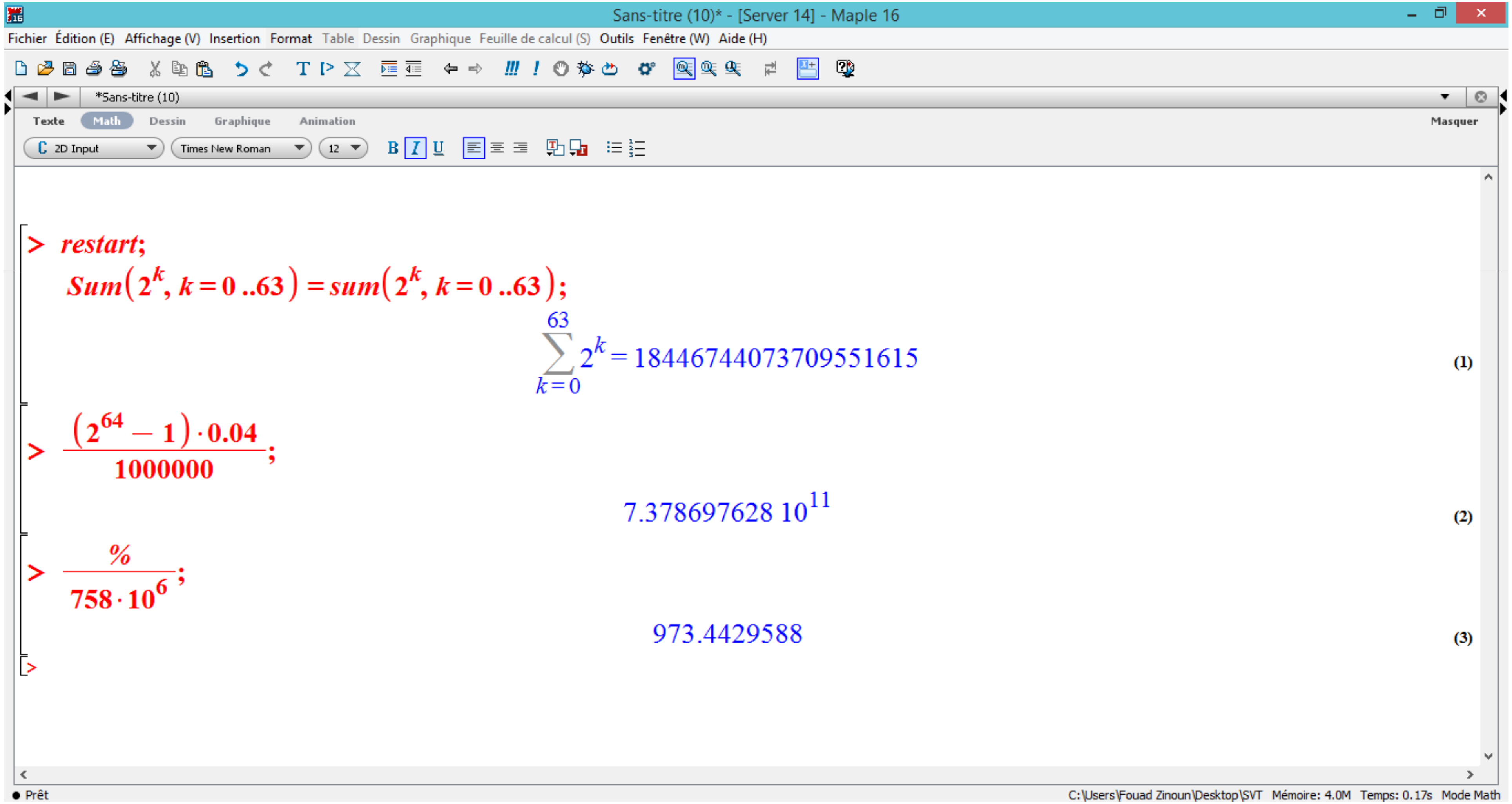
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \frac{1^{er}\ terme}{1 - q}$$

Avec une notation intuitive,

$$n^p \underset{+\infty}{<<} a^n \underset{+\infty}{<<} n! \quad \text{pour tout } a > 1 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

D'après la célèbre légende perse, chercher le nombre de grains de blé que le roi devrait offrir au sage, en commençant par poser un grain sur la première case de l'échiquier, et en doublant à chaque fois le nombre de grains en passant à la case suivante, et ce jusqu'à la $64^{ème}$ case.

Le nombre total de grains sur l'échiquier et plus de 900 fois la production mondiale de blé en 2018 (source FAO), sachant qu'un grain pèse en moyenne 40 mg (source Wikipédia)



Imaginer aussi la vitesse avec laquelle une information se diffuse sur Internet lorsque chaque personne recevant ladite information la fait aussitôt transférer à d'autres personnes différentes ...

Combien de fois peut-on pratiquement plier en deux une feuille de papier format A4 ?

Test de compréhension

(Source: Exercices mis en ligne par L. Claessens et C. Donadello de l'université de Franche-compté)

Vrai ou faux ?

1. Une suite est toujours soit majorée soit minorée.
2. Toute suite convergente est monotone.
3. Toute suite convergente est bornée.
4. Si une suite est monotone et bornée, alors elle converge.
5. Si une suite converge, alors elle est monotone et bornée.
6. Une suite positive qui converge vers zéro est décroissante à partir d'un certain rang.
7. Si la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou vers $-\ell$.
8. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, la suite (x_{2n+n^2}) converge vers ℓ.
9. Si la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
10. Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
11. Toute suite encadrée par deux suites convergentes est convergente.

Nombre d'or,

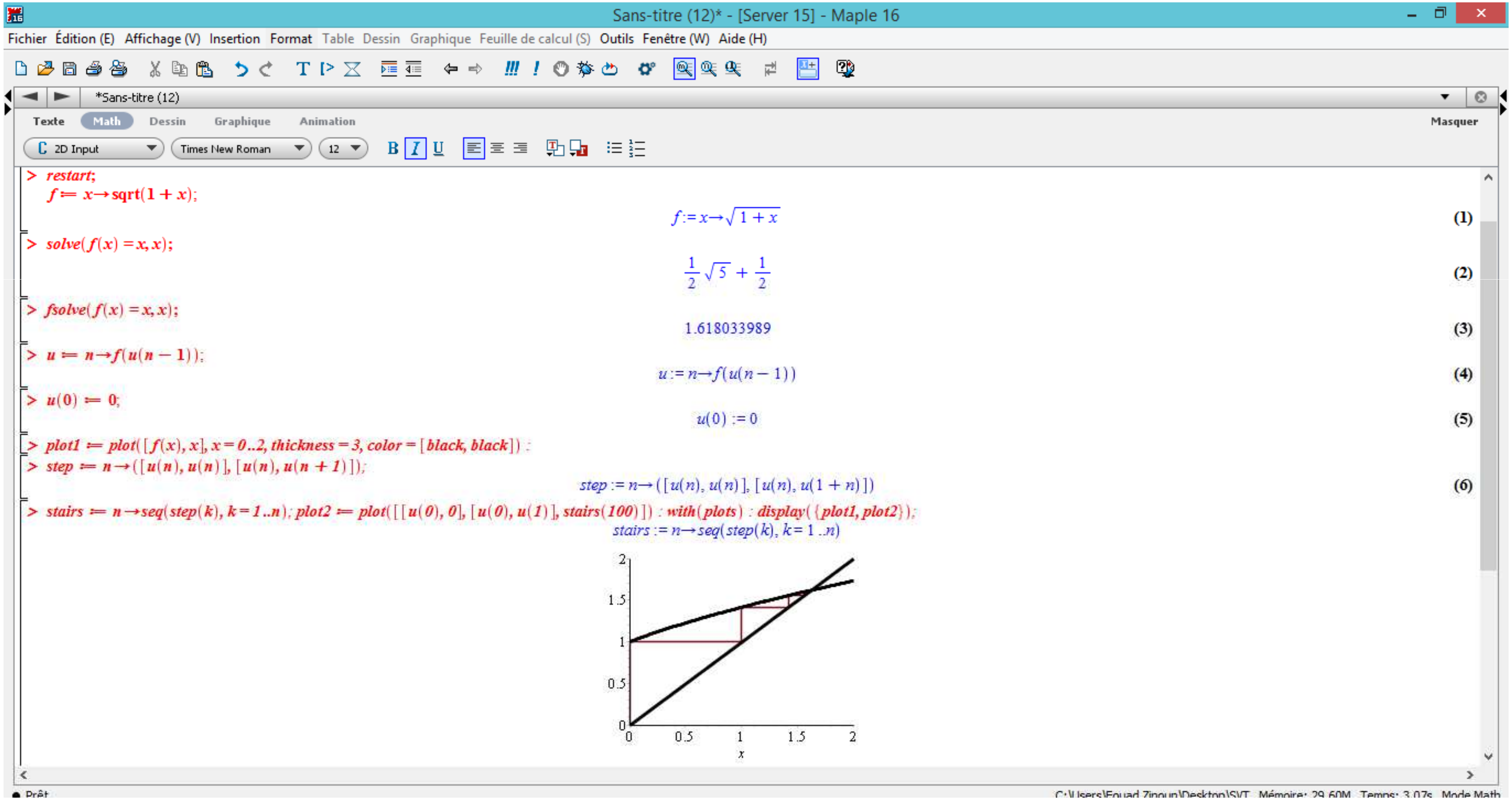
comme limite d'une suite récurrente …

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \sqrt{1}, \quad u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \quad etc.$$

Donner une forme récurrente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étudier sa nature et chercher sa limite en cas de convergence.

Convergence graphique vers le nombre d'or ..
Le point fixe s'obtient formellement à l'aide de
la commande "solve" et numériquement par "fsolve"



Suite de Fibonacci,

comme modèle de reproduction en dynamique des populations …

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Sa forme récurrente *(d'ordre 2)* est alors donnée par

$$\begin{cases} u_0 \text{ et } u_1 \text{ donnés,} \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ , \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suite commence généralement par les termes 0 et 1 (parfois 1 et 1) et ses premiers termes sont :

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ etc.$$

Elle doit son nom à Leonardo Fibonacci, mathématicien italien du XIIIe siècle qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le Liber Abaci, publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : « Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

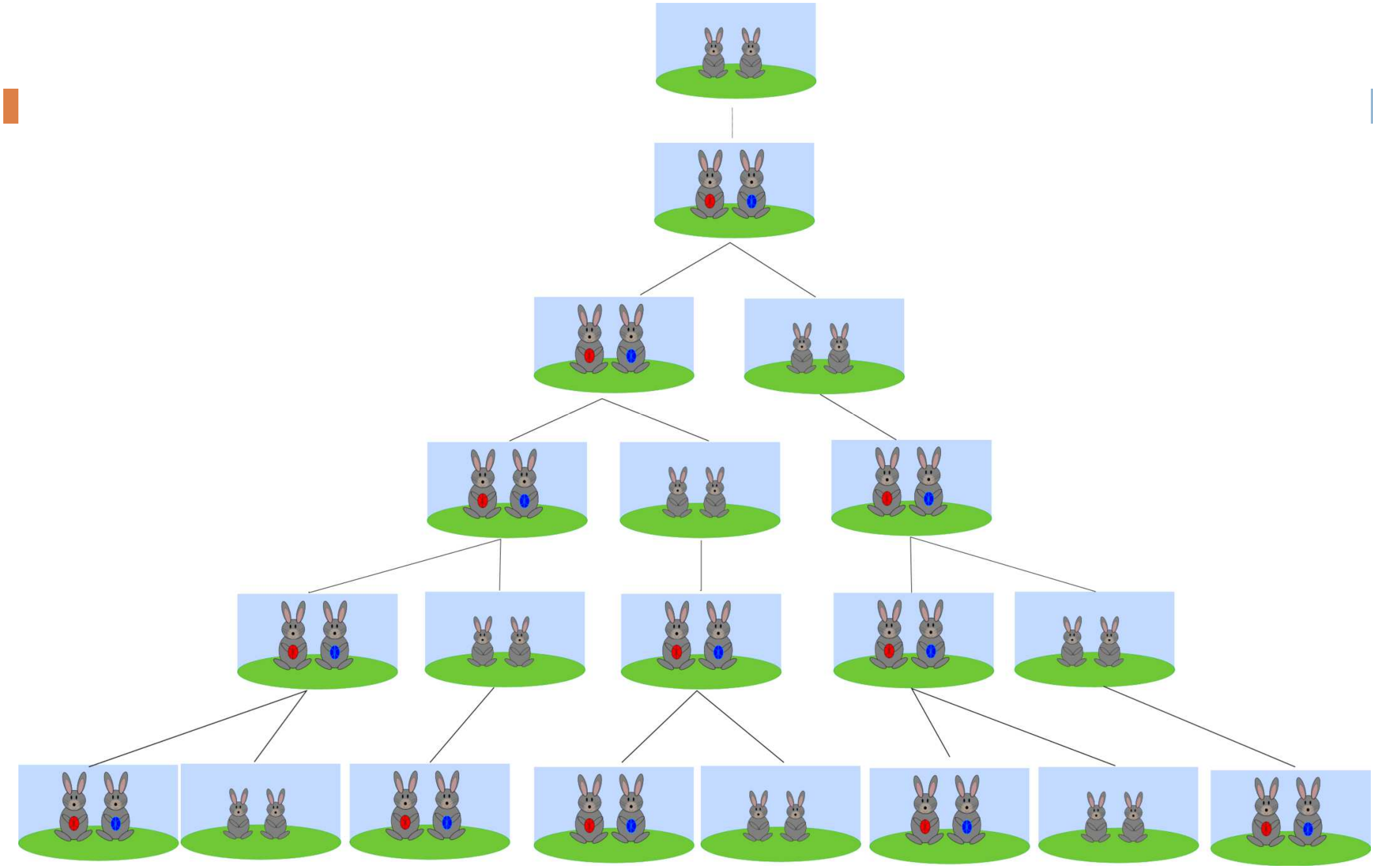


Image Wikipédia

Nombre d'or,

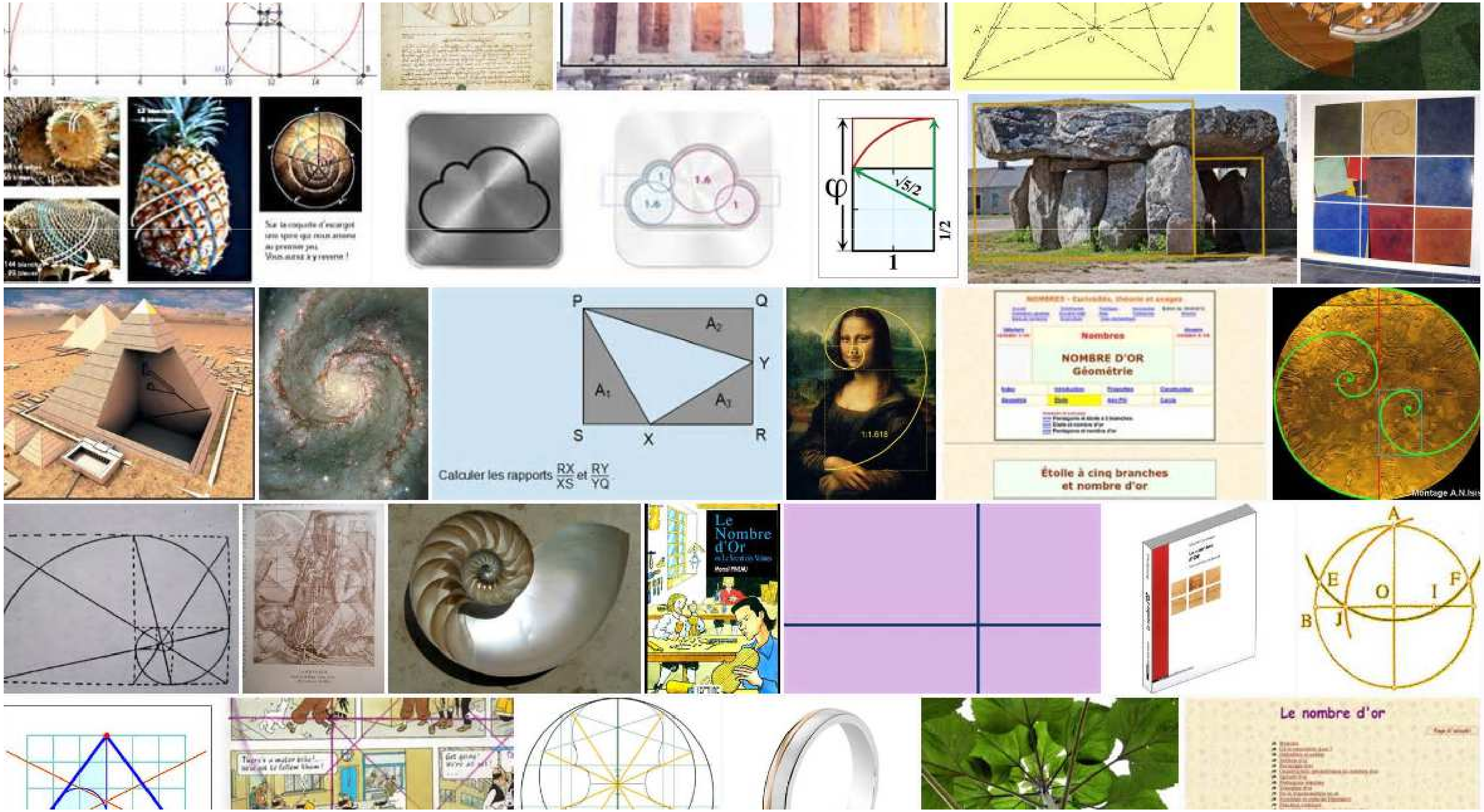
comme limite du rapport de deux termes consécutifs dans la suite de Fibonacci

Si l'on note par $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, et comme l'avait déjà remarqué Johannes Kepler, le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire $\mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n$, converge vers le nombre d'or :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Suite de Fibonacci et nombre d’or dans la nature et dans l’art *(Source: Google)*

Pour se rendre compte de la richesse du sujet, faire une recherche en ligne …



Quelques exercices

Exercice 1.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n\ , & n \in \mathbb{N} \\ u_0 = x \end{cases}$$

a étant un réel et x un entier naturel non nuls.

1) Vérifier que $u_n = xa^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Discuter de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de a.

3) En posant $a = 1/2$, $x = 1000$ et en supposant que n représente un nombre d'années et u_n l'effectif d'une population, chercher le temps (en nombre d'années) au bout duquel il y aura extinction de la population $(u_n < 1)$.

4) Pour $a = x = 2$, chercher le nombre d'années nécessaires pour que la population atteigne un effectif de 1000 individus.

Exercice 2.
Une balle lâchée d'une hauteur de 4 mètres rebondit une infinité de fois. A chaque rebondissement, la balle atteint une hauteur égale à la moitié de celle atteinte au précédent rebondissement. Quelle sera la distance totale parcourue par la balle ?

Exercice 3.
Etudier la nature des suites de terme général

a) $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{1 + n^2 + n^3}$

b) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

c) $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$, $v_n = \dfrac{1-n^2}{n+1}$, $w_n = u_n + v_n$. Quelle remarque peut-on faire ?

d) $u_n = \dfrac{\ln(n^{100})}{n+2}$

e) $u_n = \dfrac{2^n}{n^5+3n+1}$

f) $u_n = (n^4+1)(n^3+2)e^{-n}$

g) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2\ , \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}\ , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Vérifier que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que la limite éventuelle de (u_n) est $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3) Montrer que

$$|u_n - l| \leq k^n\, |u_0 - l|$$

où $0 < k < 1$.

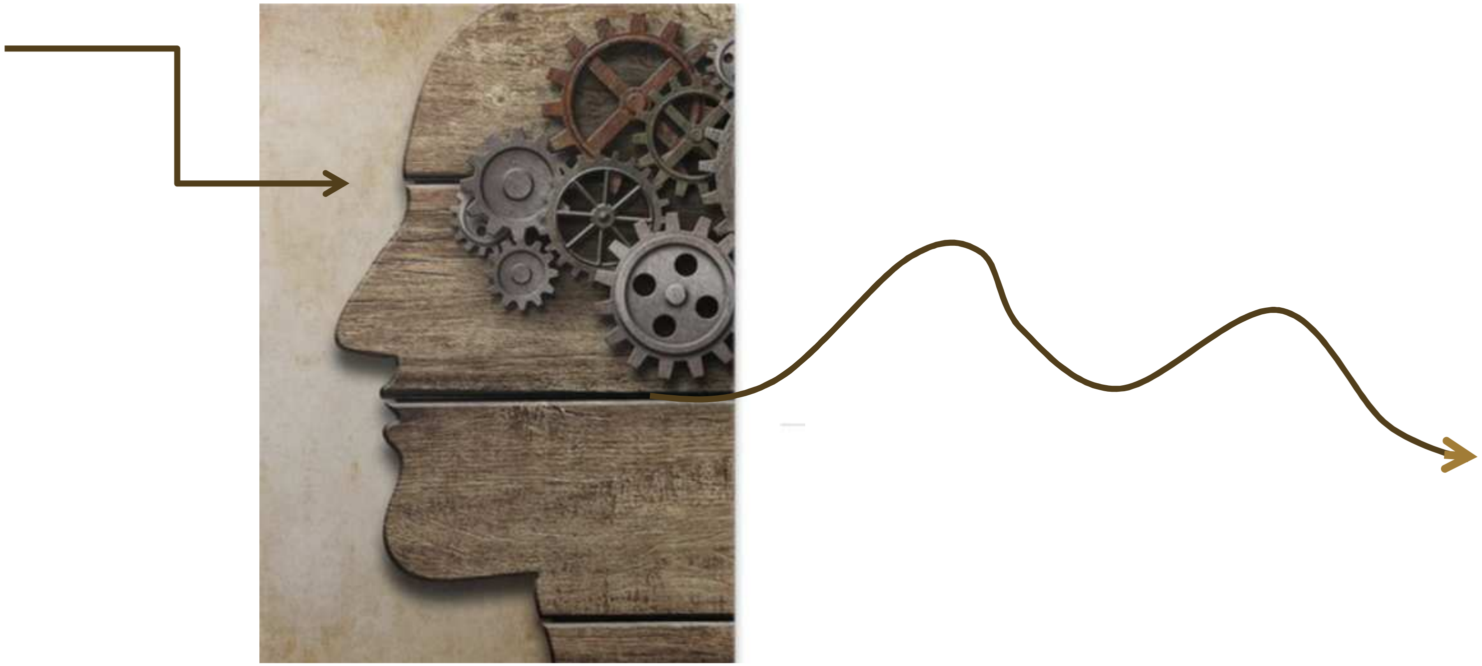
4) En déduire que (u_n) converge vers l.

Exercice 5.

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et en déduire leur limite commune si l'on admet que $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 2

Analyse de fonctions numériques de la variable réelle



Généralités

Notion de fonction : Au commencement des mathématiques était .. la flèche !

Une *fonction* numérique de la variable réelle (resp. *application*) est une *relation* f qui associe à tout réel x *au plus un* (resp. *un et un seul*) réel, noté $f(x)$, et qui sera son *image* par f. Ce que l'on représente par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Notre objet mathématique étant ici un élément, un ensemble ou une relation, nous avons :

x et $f(x)$: éléments (ici, des réels),
$\mathbb{R}$: ensemble (ici, le corps des nombres réels,
à la fois *ensemble de départ* et *ensemble d'arrivée*),
f : relation.

Dans la représentation ci-dessus, la première flèche "$\longrightarrow$" désigne une relation entre ensembles, alors que la deuxième "$\longmapsto$" traduit une relation entre éléments.

Une fonction peut être donnée à l'aide de tables, telles les tables des fonctions trigonométriques, les tables des logarithmes ou encore des tables exprimant la dépendance fonctionnelle entre des grandeurs mesurées telles les relevés de la température de l'air faits dans une station météorologique durant une journée:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	3	2	0	-2	-2	$-0,5$	1	3	$4,5$

Température T (en degrés) en fonction du temps t (en heures)

On parle aussi de *représentation analytique* d'une fonction lorsque celle-ci est donnée en tant qu'expression analytique de la variable x, comme par exemple,

$$x^3 - 1\ , \quad \frac{\ln x - \cos x}{2x^2 - 1}\ , \quad 2^x - \sqrt{3x+1}\ , \quad \text{etc.}$$

On verra aussi ce qu'est la *représentation graphique* d'une fonction ..

Une fonction peut être représentée (analytiquement) de différentes manières. Par exemple, la fonction valeur absolue peut s'exprimer comme

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \text{ est positif} \\ -x \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}, \end{array}$$

ou encore, comme

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sup\{x, -x\} \end{array}$$

Et pour plus de précision, on peut spécifier $\mathbb{R}_+$ comme ensemble d'arrivée.

Lorsqu'une fonction f est exprimée analytiquement, on peut parler de son *domaine (naturel) de définition*. C'est l'ensemble

$$\mathcal{D}_f := \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$$

En général, c'est un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. Mais il se peut que ce ne soit ni l'un ni l'autre! (Penser à une fonction qui ne soit définie que pour les nombres rationnels ...)

Comme $f(x)$ est donnée explicitement comme expression algébrique de x, déterminer $\mathcal{D}_f$ revient alors à repérer essentiellement :

- les dénominateurs $\frac{1}{X}$ $(X \neq 0)$,
- les racines carrées $\sqrt{X}$ $(X \geq 0)$,
- les logarithmes $\ln(X)$ $(X > 0)$.

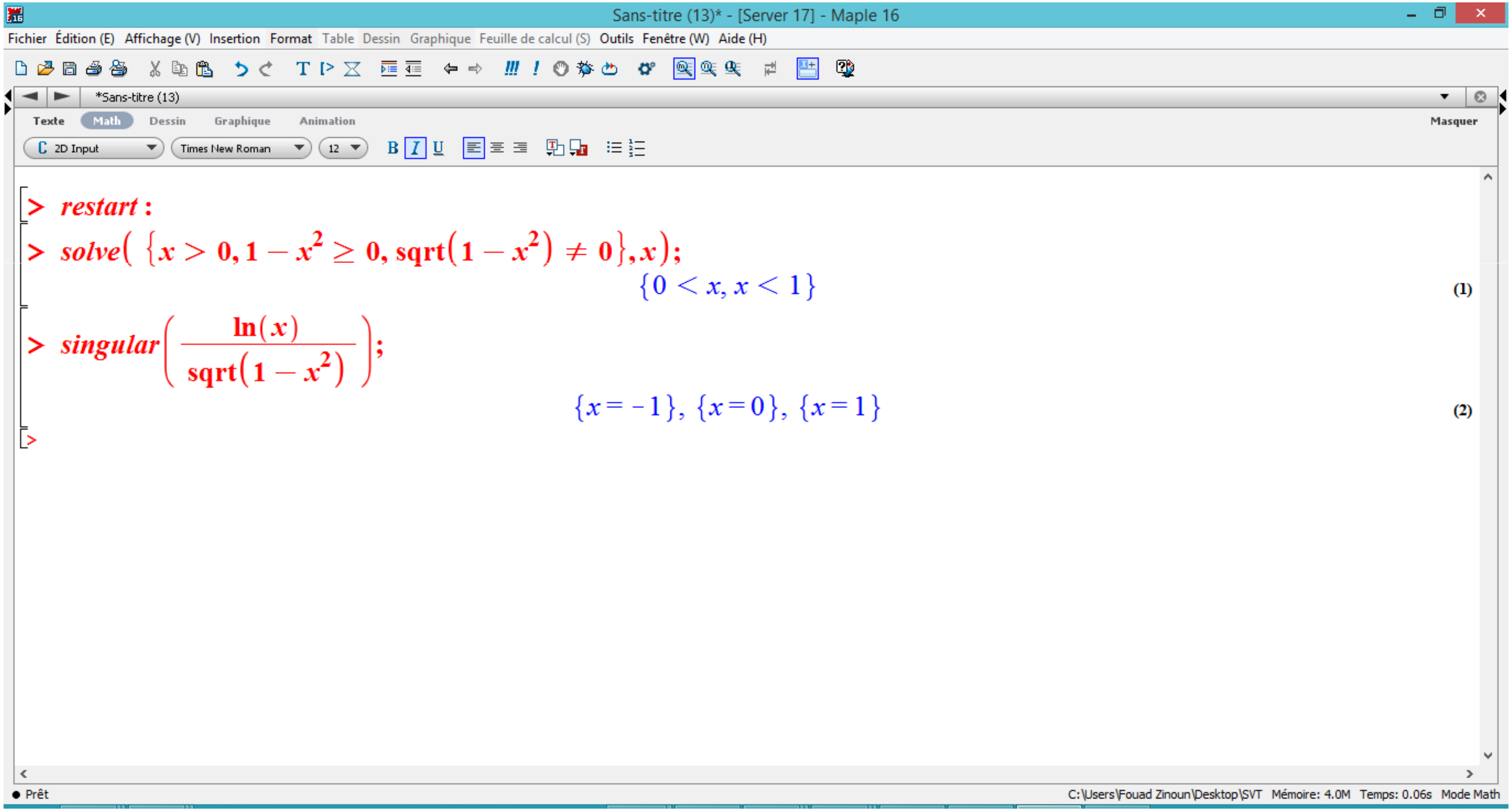
Une fonction *restreinte* à son domaine de définition

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

définit une application de celui-ci dans $\mathbb{R}$.
Exemple : Chercher $\mathcal{D}_f$ où f est définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Résolution d'un système d'inéquations : Df =]0,1[

Les singularités s'obtiennent à l'aide de la commande ''singular''



En général, il est plus facile de chercher **le domaine de définition** de f que de mettre en évidence le plus petit **domaine de sécurité** $(\mathcal{D}_s)$ de la suite récurrente associée :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{D}_s \ , \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \ , \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On a, bien entendu,

$$\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_f$$

mais on n'a pas nécessairement égalité.

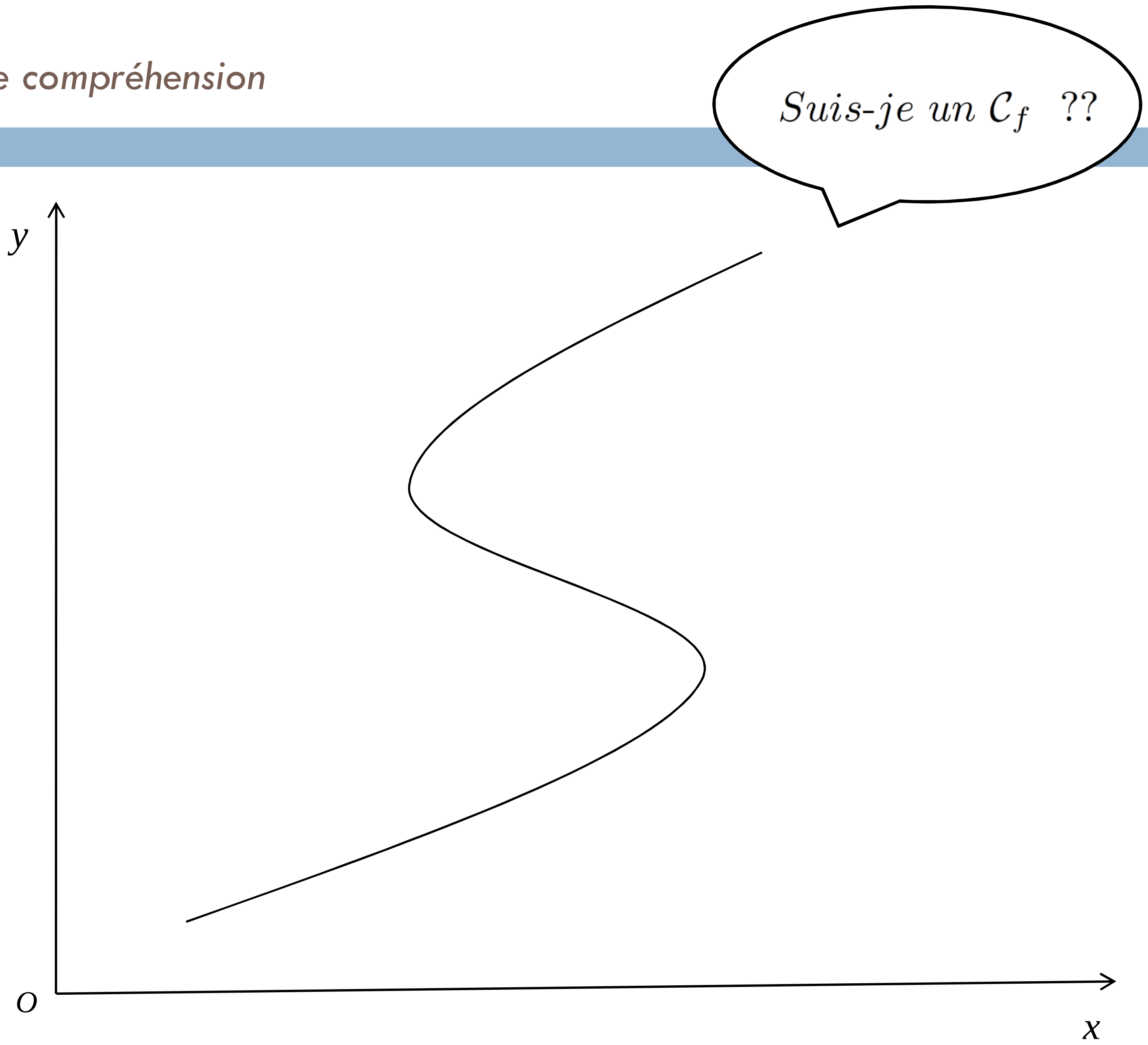
Exemple : Fonction logistique $f(x) = \lambda x(1-x)$.
On montre que pour $0 \leq u_0 \leq 1$ et $0 \leq \lambda \leq 4$, $\mathcal{D}_s \subset [0,1]$ alors que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
Pour $\lambda > 4$, l'étude de $\mathcal{D}_s$ est beaucoup plus compliquée que ne peuvent le permettre les outils d'un simple cours d'analyse. Pour les curieux, et pour des valeurs "bien choisies" de u_0, il s'agit d'un *Cantor* ..

C'est, dans un plan muni d'un système de coordonnées rectangulaires, le *graphique* constitué des points $M(x, f(x))$ où x décrit $\mathcal{D}_f$:

$$\mathcal{C}_f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in \mathcal{D}_f\right\}$$

La *représentation graphique* d'une fonction consiste alors à tracer la courbe dont les *abscisses* représentent les valeurs de la variable (indépendante) et les *ordonnées* les valeurs correspondantes de la fonction. Pour la commodité de la représentation, les échelles varient souvent selon les axes ..

Test de compréhension



Soit $I \subset \mathcal{D}_f$, un intervalle de $\mathbb{R}$. f est dite *croissante* (resp. *décroissante*) sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$, on a :

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(y))$$

Si l'implication est aussi vraie avec des inégalités strictes, on parle de croissance ou de décroissance stricte.

f est dite (strictement) monotone lorsqu'elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

On verra plus loin une méthode plus pratique pour étudier les variations d'une fonction "suffisamment régulière", et ce en introduisant la notion de *fonction dérivée* ...

Une fonction f est dite *majorée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D_f$.

Elle est dite *minorée* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

La fonction f est dite *bornée* lorsqu'elle est majorée et minorée, ce qui équivaut à dire que la fonction $|f|$ est majorée.

Attention: une fonction non majorée n'est pas forcément croissante!

Quelques exemples de fonctions en biologie

Biologie des organismes

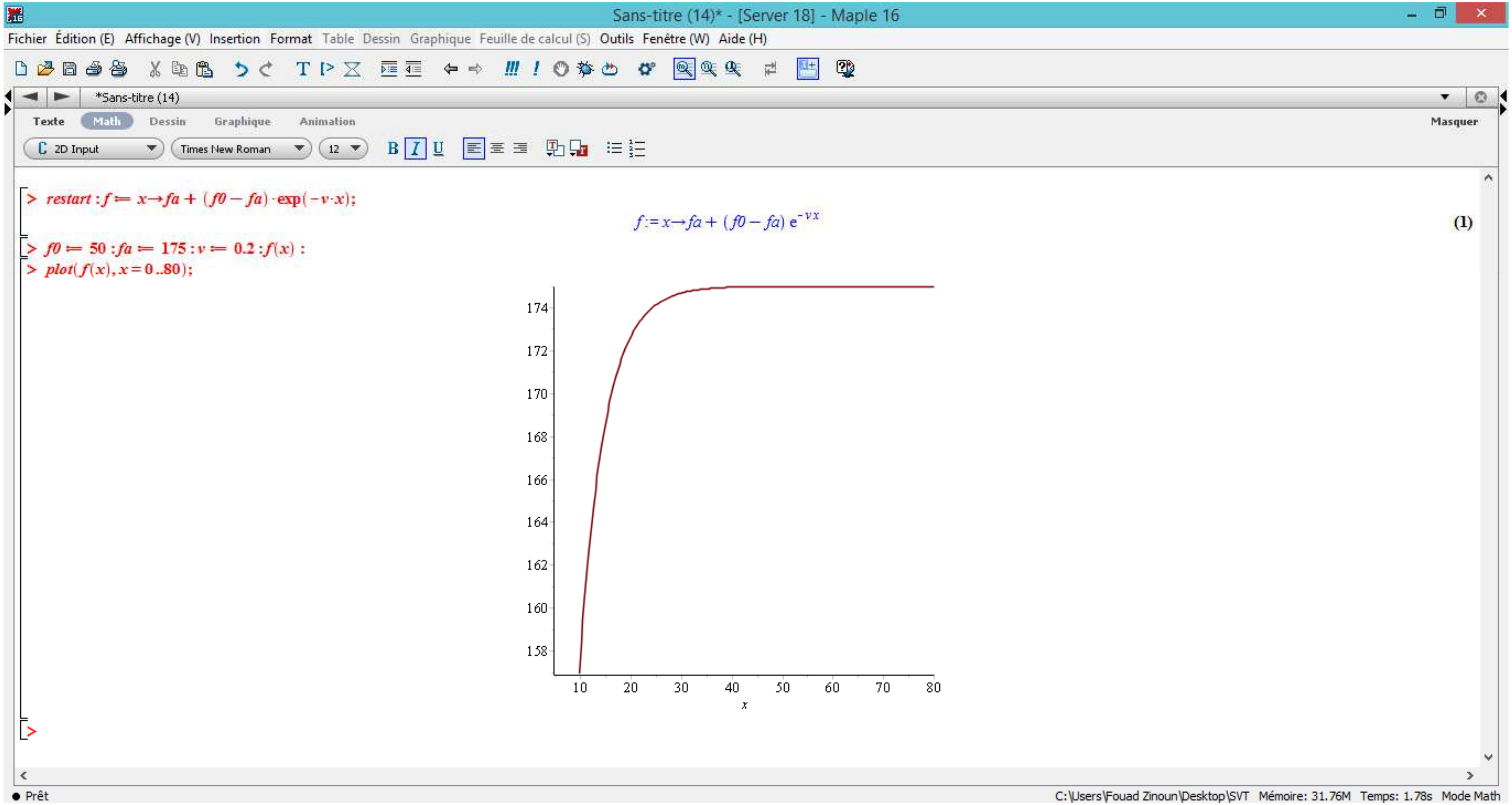
Une relation bien connue, qui s'applique à de nombeuses espèces vivantes, est la loi de Von Bertalanffy qui exprime la taille d'un organisme en fonction de son âge x :

$$f(x) = f_a + (f_0 - f_a)e^{-vx}$$

où f_0 et f_a sont, respectivement, la taille à la naissance et celle à l'âge adulte, v étant la vitesse de croissance de l'organisme.

Il s'agit d'une fonction croissante et bornée : plus l'âge augmente, plus la taille augmente, mais de moins en moins vite, jusqu'à une taille maximale.

Courbe approchant l'évolution de la taille (en cm) d'un être humain



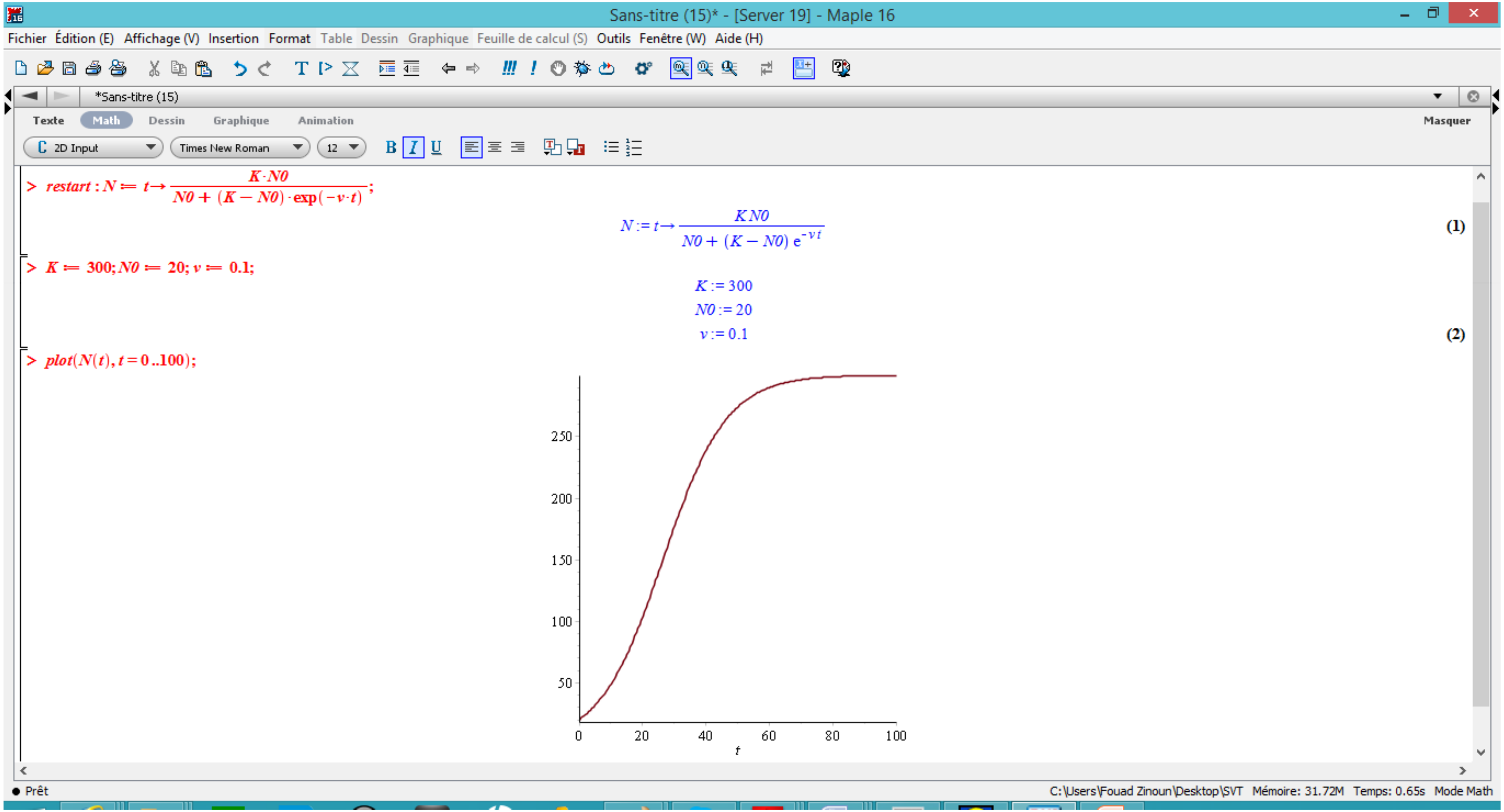
L'un des premiers modèles rencontrés en dynamique des populations dans le cas où, à forte densité, les organismes entrent en compétition pour une ressource, est le modèle logistique. Celui-ci permet de prédire la densité N de la population en fonction du temps t :

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-vt}} \;, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

où N_0 est la densité initiale et K est le seuil de saturation ou encore la capacité d'accueil de l'environnement.

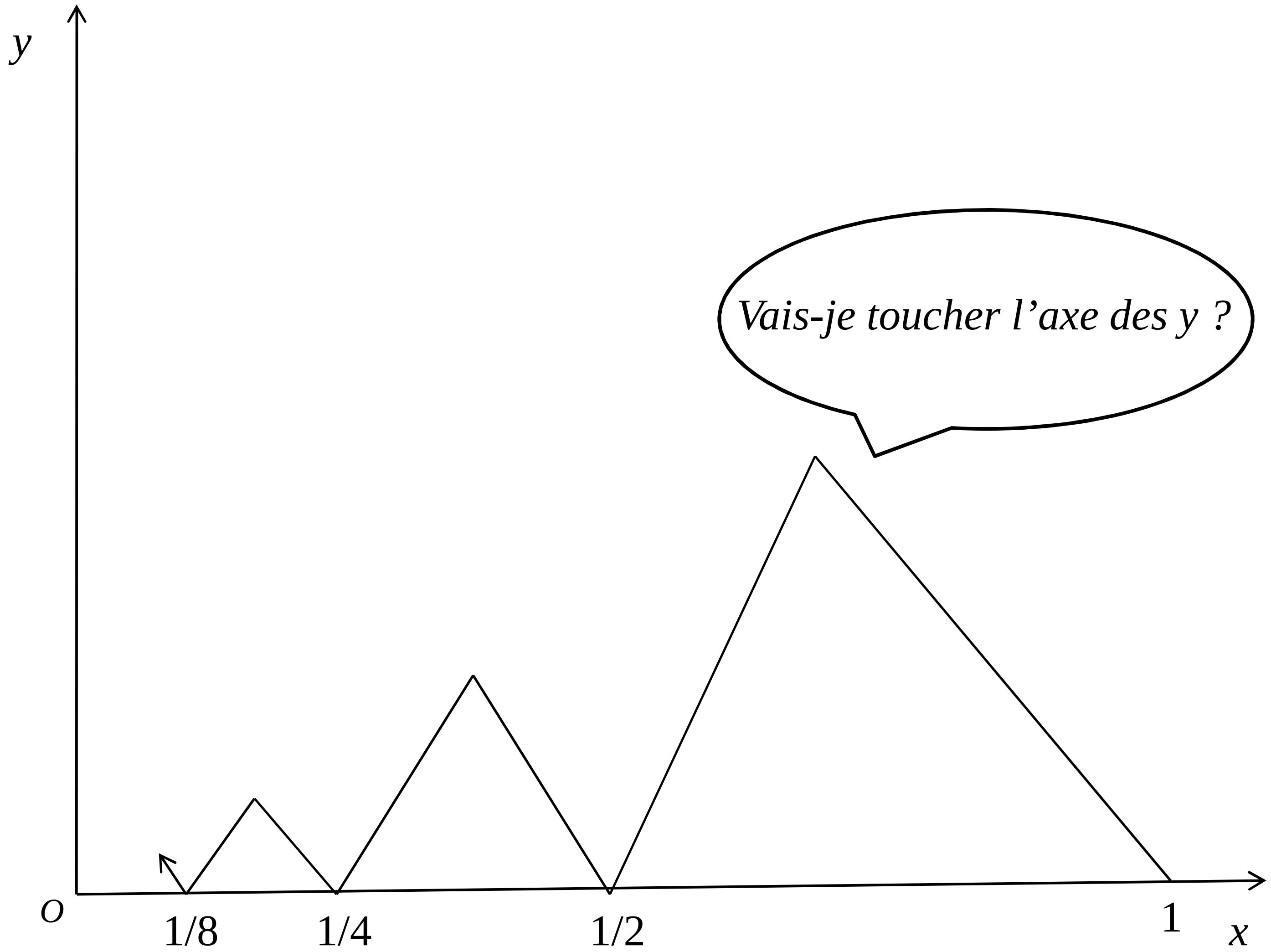
Il s'agit à nouveau d'une fonction croissante et bornée. Par contre, celle-ci semble "fléchir" à un moment (en fait, il s'agit d'un *point d'inflexion* dont on donnera la définition plus loin). Cela signifie que la croissance est d'abord de plus en plus forte à petite densité, mais à partir d'une densité critique, la compétition se fait sentir, et la croissance devient de moins en moins forte pour que la densité se stabilise à terme sur la valeur-limite K.

Baby boom d'une population puis redressement ..



La notion de *limite* est un concept central en analyse. Elle sert (entre autres) à introduire les notions fondamentales de *continuité* et de *dérivabilité* d'une fonction (voir plus loin).

Dans un premier temps, on va dire qu'une limite est une valeur (éventuellement infinie) dont on peut "s'approcher" autant que l'on veut sans nécessairement l'atteindre.


y
Vais-je toucher l'axe des y ?
O
1/8
1/4
1/2
1
x

Définition mathématique d'une limite finie en une valeur finie

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0, sauf peut être en x_0, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers le réel l en x_0 lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ \left(\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \ \right)$$

l est alors unique; on l'appelle limite de la fonction f en x_0 et on note

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \quad , \lim_{x_0} f = l \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} l$$

Exemples

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} e^{x} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ \left(\, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) > A \ \right)$$

On dit que f tend vers $-\infty$ en x_0 lorsque

$$\forall A < 0,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ \left(\, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow f(x) < A \ \right)$$

On suppose qu'un intervalle de la forme $I = [a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, est inclus dans $\mathcal{D}_f$. On a alors

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I, \left(x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right)$$

On suppose qu'un intervalle de la forme $I =]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, est inclus dans $\mathcal{D}_f$. On a alors

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in I, \left(x < A \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right)$$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-vt}} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} K \quad \text{si } v > 0.$$

La commande "assume"

$$> \; restart : N := t \rightarrow \frac{K \cdot N0}{N0 + (K - N0) \cdot \exp(-v \cdot t)};$$

$$N := t \rightarrow \frac{K\,N0}{N0 + (K - N0)\,\mathrm{e}^{-v\,t}} \qquad (1)$$

$$> \; assume(v > 0);$$

$$> \; Limit(N(t), t = infinity) = limit(N(t), t = infinity);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K\,N0}{N0 + (K - N0)\,\mathrm{e}^{-v\sim\,t}} = K \qquad (2)$$

$$>$$

On suppose, pour simplifier, que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On a alors

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \ \text{ si } \ (\ \forall A > 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ x > B \Longrightarrow f(x) > A\ )$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty \ \text{ si } \ (\ \forall A < 0,\ \exists B > 0 \ \text{ tq } \ x > B \Longrightarrow f(x) < A\ )$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty \ \text{ si } \ (\ \forall A < 0,\ \exists B < 0 \ \text{ tq } \ x < B \Longrightarrow f(x) < A\ )$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty \ \text{ si } \ (\ \forall A > 0,\ \exists B < 0 \ \text{ tq } \ x < B \Longrightarrow f(x) > A\ )$$

Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ n'admettent de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

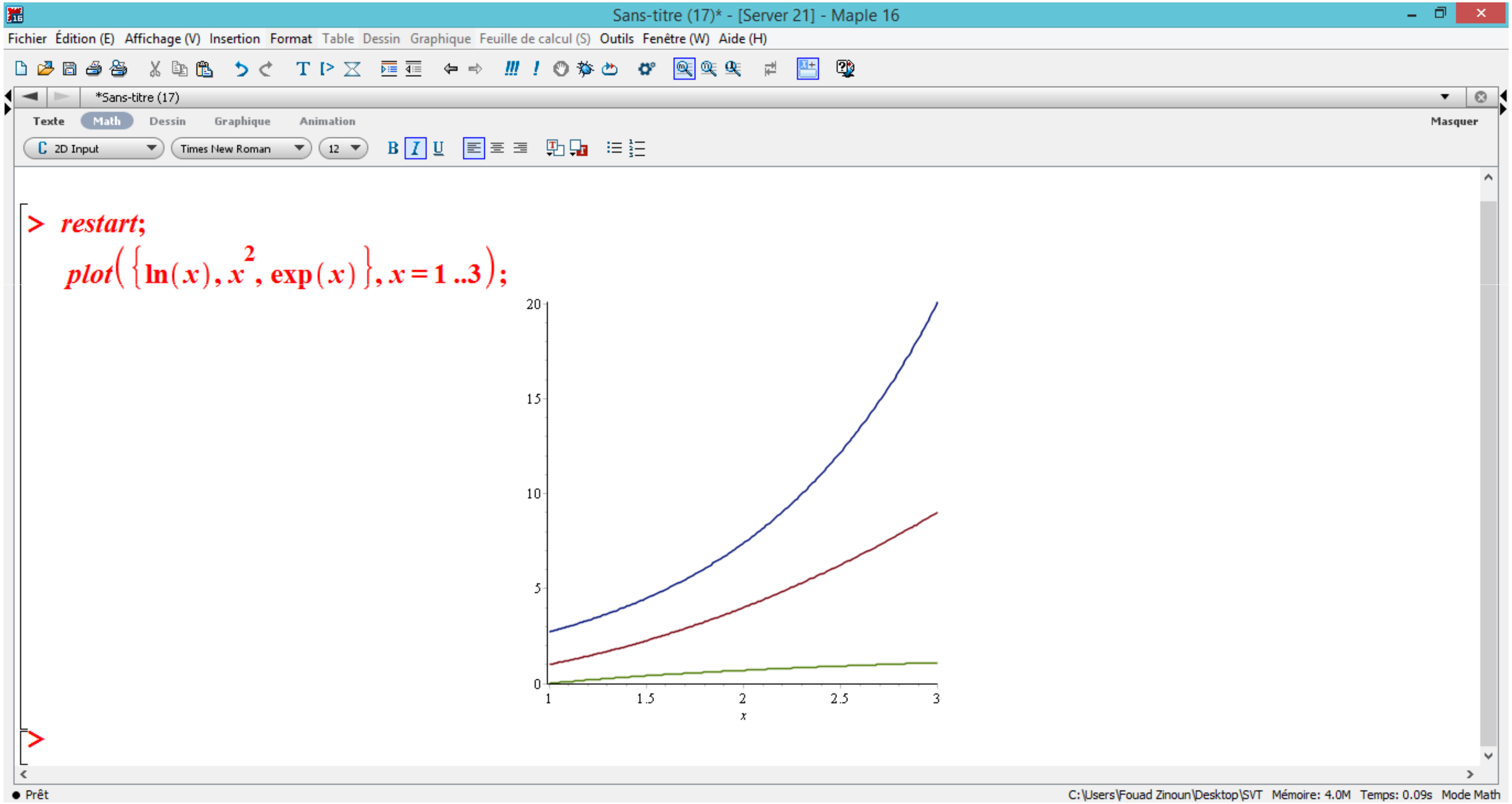
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x = +\infty \ ,$$

bien que les fonctions logarithme et exponentielle ne tendent pas "de la même manière" vers $+\infty$ (voir ci-après le théorème des croissances comparées.)

Au voisinage de $+\infty$, (une puissance positive de) la fonction logarithme est "négligeable" devant la fonction puissance, laquelle fonction est elle-même "négligeable" devant la fonction exponentielle, ce que l'on note par

$$(\ln(x))^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x} \ , \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Logarithme vs puissance vs exponentielle



Pour tout $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, la fonction définie par

$$f_{\alpha,\beta,\gamma}:\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\alpha x}x^{\beta}(\ln x)^{\gamma} \end{array}$$

vérifie les propriétés suivantes :

(1) Si $\alpha\neq 0$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_{\alpha,\beta,\gamma}(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{\alpha x}$, c.-à-d. $+\infty$ si $\alpha>0$ et 0 si $\alpha<0$;

(2) Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$ alors $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_{\alpha,\beta,\gamma}(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^{\beta}$, c.-à-d. $+\infty$ si $\beta>0$ et 0 si $\beta<0$.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$$

Comme on a déjà pu remarquer, lors du calcul de limites, certaines formes ne permettent pas de conclure directement : ce sont les *formes indéterminées*, que l'on note symboliquement

$$\frac{0}{0}\ ;\quad \frac{\infty}{\infty}\ ;\ +\infty-\infty\ ;\quad 0\times\infty\ ;\quad 0^0\ ;\ +\infty^0\ ;\quad 1^\infty$$

et que l'on peut ramener au calcul de la limite du rapport de deux infiniment petits $\frac{0}{0}$. En fait, chaque forme indéterminée en cache une autre, et sans qu'il y ait de méthode générale (voir par exemple le théorème des croissances comparées ou, plus loin, la règle de L'Hôpital), on parle du *calcul de la vraie valeur de l'indétermination* de la forme $\frac{0}{0}$; on dit aussi *lever l'indétermination* de la forme $\frac{0}{0}$. Pour ce faire, on peut faire appel à des procédés algébriques (factorisation pour les fonctions rationnelles, transfert de l'indétermination par multiplication par une quantité conjuguée en cas de racines carrées), des procédés analytiques (utilisation des propriétés de dérivabilité après avoir fait apparaitre des taux d'accroissement), ou encore à un changement de variable, qui s'appuie sur la propriété de la limite d'une fonction composée.

Mise en garde : $1^{\infty} \neq 1$

A titre d'exemple, on montre que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \underset{x \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} e$$

Et plus généralement,

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^{x} \underset{x \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} e^{y}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Une fonction f admet l pour limite à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]x_0, +\infty[$ admet l pout limite en x_0. On note alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = l \ , \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ >}} f(x) = l \ \text{ ou encore } \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l$$

Une fonction f admet l pour limite à gauche en $x_0 \in \mathbb{R}$ si la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, x_0[$ admet l pout limite en x_0. On note alors

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = l \ , \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x) = l \ \text{ ou encore } \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l$$

f admet alors une limite l en x_0 si et seulement si elle en admet une limite l_1 à droite et une limite l_2 à gauche, avec $l_1 = l_2 = l$.

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0 \ , \quad \forall \alpha, \beta > 0$$

En particulier, pour $\alpha = 1/2, \ \beta = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x) = 0$$

La fonction $\frac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0 car elle en admet une limite à droite et une limite à gauche qui ne valent pas la même chose.

Les options "right" et "left"

```
> restart;
  Limit(x·ln(x), x = 0, right) = limit(x·ln(x), x = 0, right);
```

$$\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = 0 \quad (1)$$

```
> Limit(sqrt(x)·ln(x), x = 0, right) = limit(sqrt(x)·ln(x), x = 0, right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x}\, \ln(x) = 0 \quad (2)$$

$$> Limit\left(\frac{\mathrm{abs}(x)}{x}, x = 0, right\right) = limit\left(\frac{\mathrm{abs}(x)}{x}, x = 0, right\right);$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad (3)$$

$$> Limit\left(\frac{\mathrm{abs}(x)}{x}, x = 0, left\right) = limit\left(\frac{\mathrm{abs}(x)}{x}, x = 0, left\right);$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad (4)$$

$$> limit\left(\frac{\mathrm{abs}(x)}{x}, x = 0\right);$$

undefined (5)

Soient f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies en x_0, fini ou infini. Alors, on a les deux implications suivantes:

$$f < g \text{ sur } I \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)$$

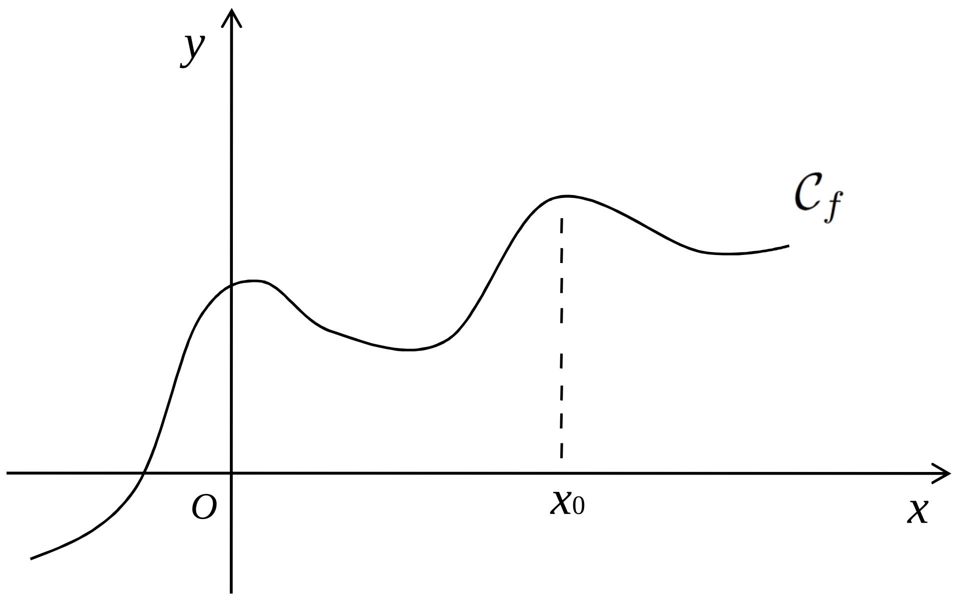
$$\left(f \leq g \leq h \text{ sur } I \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l\right) \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l$$

Exemple : Montrer que

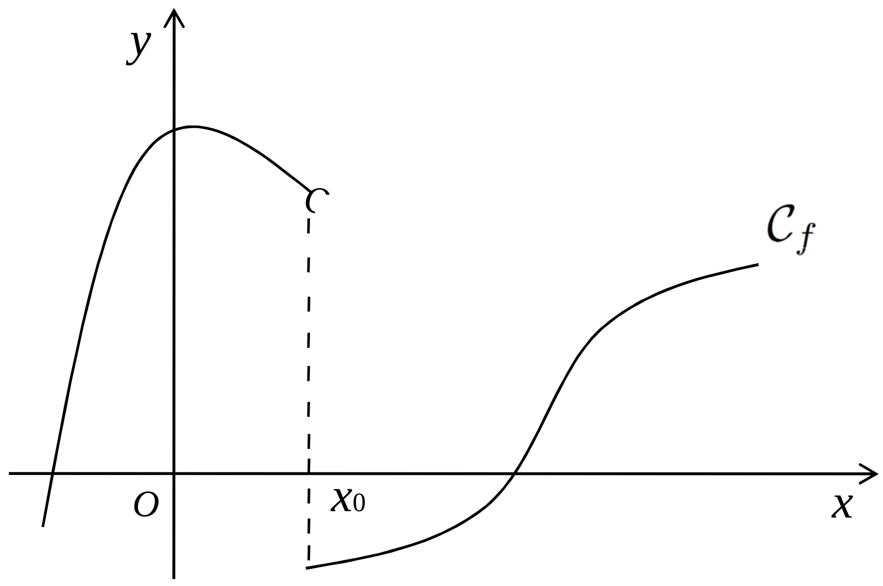
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{2x + 1} = \frac{1}{2}$$

Continuité d'une fonction

Continuité en un point



f est continue en x_0



f est discontinue en x_0

Question : Repérer $f\,(x_0)$ *dans le graphique à droite.*

Soit f une fonction définie sur un untervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, contenant x_0. f est dite *continue* en x_0 lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ (\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ )$$

Ainsi, f est continue en x_0 si et seulement si f admet une limite en x_0, et dans ce cas, elle vaut nécessairement $f(x_0)$:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

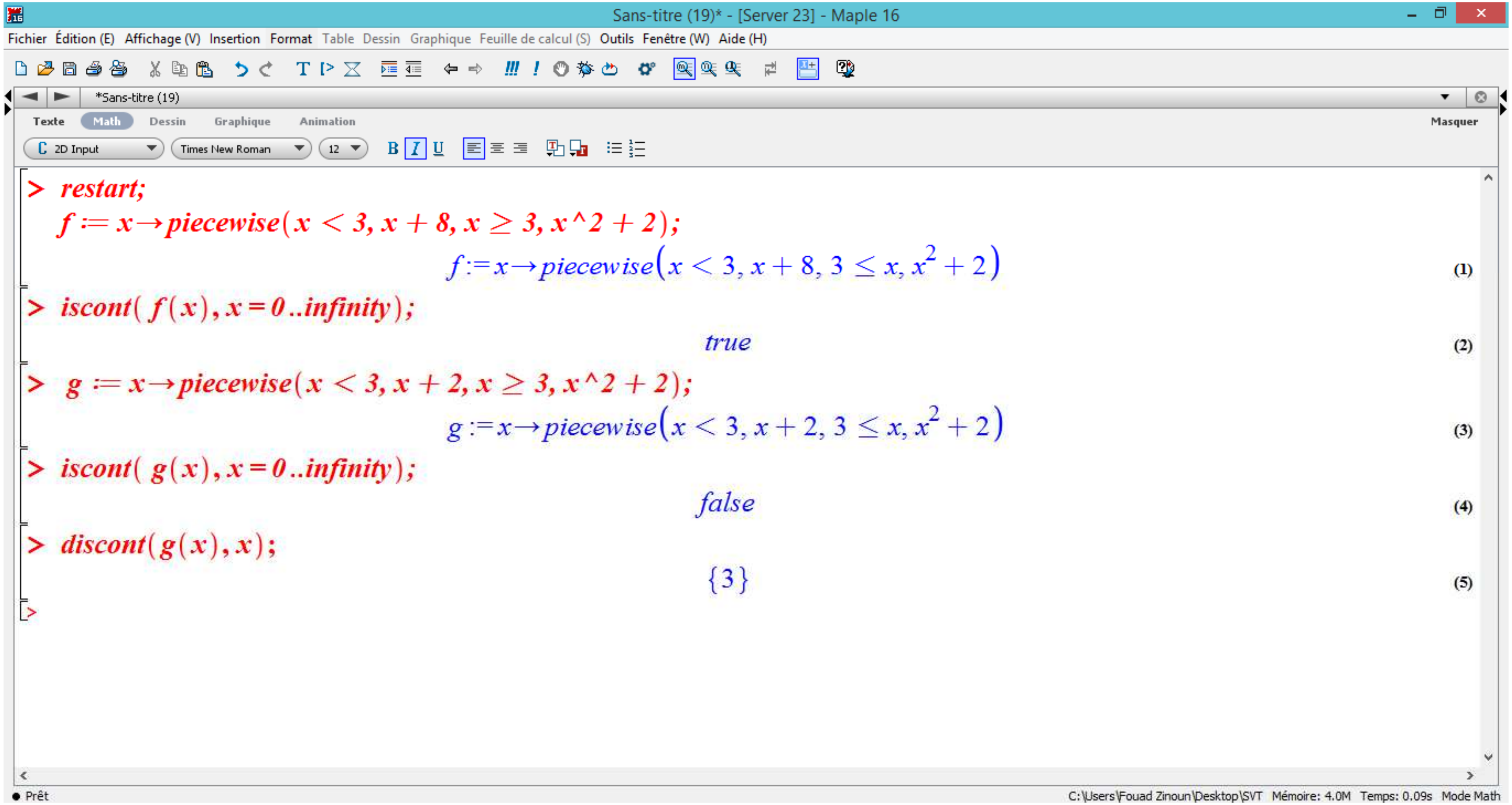
Dire que la fonction f est continue en x_0 revient à dire qu'elle l'est à droite ($\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$) et à gauche ($\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$) en x_0.

f est dite continue sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ lorsqu'elle est continue en tout point de I.

Une grande partie des fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition : fonctions polynômes, rationnelles, exponentielles, logarithmes, hyperboliques, trigonométriques, racine et puissance n-ièmes, valeur absolue, etc. La fonction partie entière sur les réels est toutefois discontinue : on "lève le crayon" en arrivant à chaque entier.

Test de continuité sur un intervalle avec la commande ''iscont''

Les points de discontinuité s'obtiennent par la commande ''discont'



La fonction indicatrice des rationnels définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

n'est continue en aucun point ! Intuitivement, aucune “ligne de longueur non nulle” ne peut être tracée ...

Par combinaison linéaire et par multiplication :
Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors les fonctions fg et $(\alpha f + \beta g)$ sont continues sur I pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Par division :
Si en plus g ne s'annule pas sur I, la fonction quotient f/g est continue sur I.

Par composition :

Si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$, l'image de I par f, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I. De plus, la composée d'une fonction f continue sur un intervalle I et d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, dont les termes et la limite appartiennent à I, est une suite convergente. Plus précisément :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = l \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} f(u_n) = f(l)$$

La question de continuité de f en un point x_0 situé hors de son domaine de définition n'a aucun sens. Par contre, on peut se poser la question si f est *prolongeable par continuité* en x_0. En fait, si $x_0 \notin \mathcal{D}_f$, mais $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & \mathcal{D}_f \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \in \mathcal{D}_f \\ l \text{ si } x = x_0 \end{array} \right. \end{array}$$

est continue en x_0. Elle est appelée *prolongement par continuité* de f en x_0.

Déterminer $a > 0$ pour que les fonctions définies ci-dessous soient prolongeables par continuité en 0 :

$$1) \qquad \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 + x + \ln(a) & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \quad \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$2) \qquad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \sin(\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} + a^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Soit f une fonction définie sur un untervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant x_0.
f est dite *dérivable* en x_0 lorsque

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

Si on a seulement

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$(\text{resp. } \lim_{x \longrightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2 \in \mathbb{R})$$

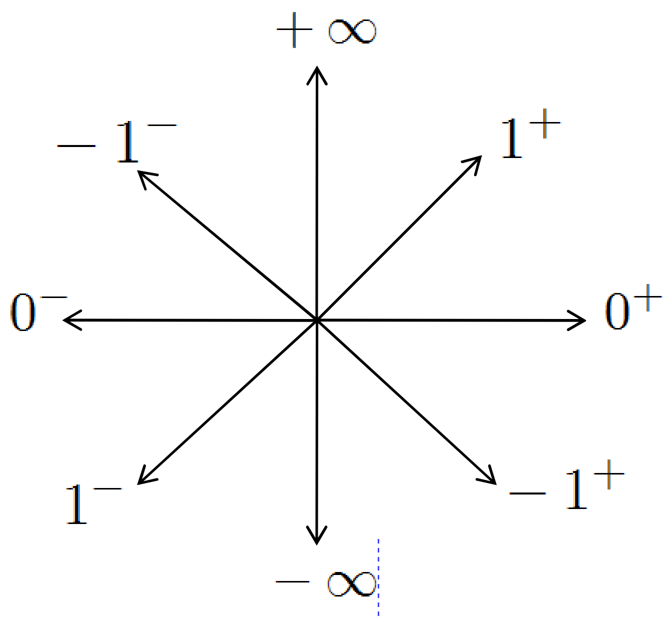
f est dite dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0.

f est alors dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $l_1 = l_2$.

Interprétation géométrique

f est dérivable (à droite, à gauche) en x_0 se traduit par le fait que C_f admet une (demi-) *tangente* (non verticale) au point d'abscisse x_0.

$\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^{(\pm)}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (même infinie) mesure alors la *"pente"* de cette (demi-) tangente :



La fonction valeur absolue est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \ ,$$

dérivable à gauche

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \ ,$$

mais n'est pas dérivable en 0. Sa courbe représentative admet un *point anguleux* à l'origine du repère.

La fonction racine carrée n'est pas dérivable à droite en 0 car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

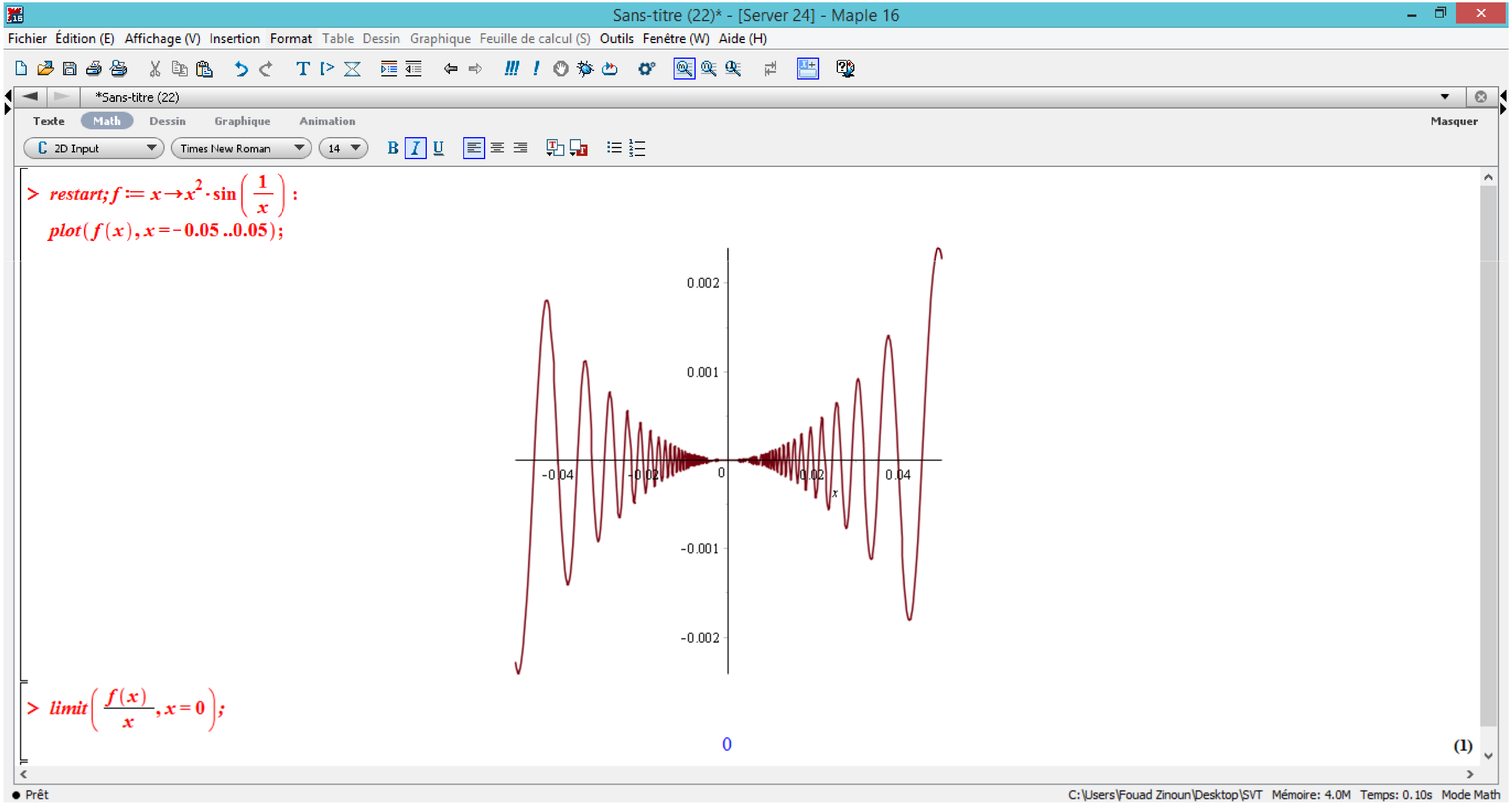
Sa courbe représentative admet un *point d'arrêt* à l'origine du repère.

Exercice

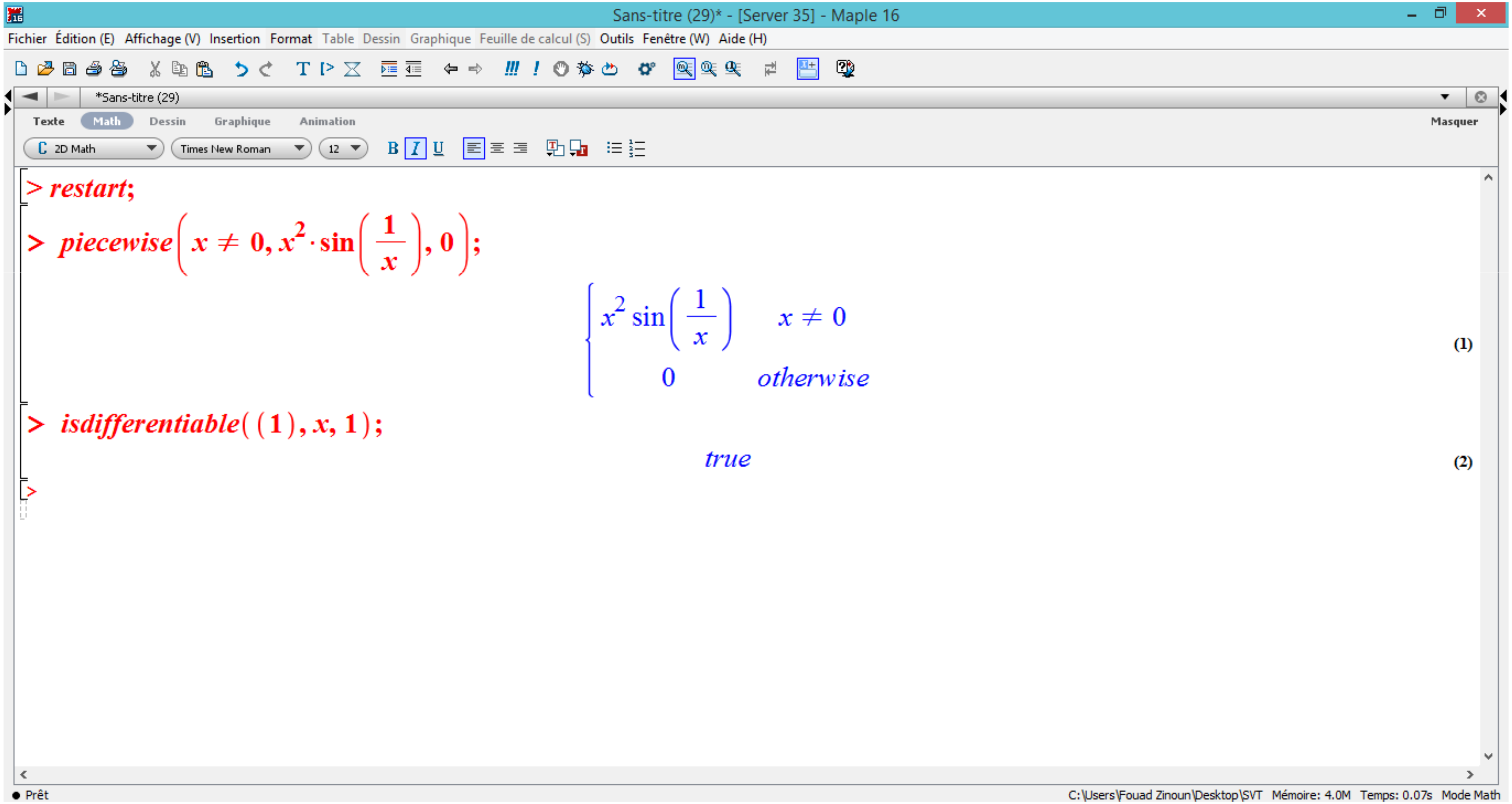
Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Résolution


Sans-titre (22)* - [Server 24] - Maple 16
Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)
*Sans-titre (22)
Texte Math Dessin Graphique Animation
Masquer
2D Input
Times New Roman
14
> restart; f := x → x^2 · sin(1/x) :
plot(f(x), x = −0.05 ..0.05);
0.002
0.001
−0.001
−0.002
−0.04
−0.02
0
0.02
0.04
x
> limit(f(x)/x, x = 0);
0
(1)
Prêt
C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.10s Mode Math

Réponse Maple à l'aide de la commande "isdifferentiable":
La fonction est de classe C1



Une fonction dérivable (à droite, à gauche) en un point est continue (à droite, à gauche) en ce point. La réciproque n'est pas vraie; il suffit de considérer la fonction valeur absolue qui est continue (sur $\mathbb{R}$) mais non dérivable en 0.

f est dite dérivable sur un intervalle ouvert $I \subset \mathcal{D}_f$ lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. On peut alors considérer la fonction

$$\begin{array}{rccl} f': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x_0 & \longmapsto & f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

appelée *fonction dérivée* de f sur I.
On notera $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ les dérivées à droite et à gauche en x_0, respectivement.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Alors, lorsque les fonctions suivantes sont bien définies sur I, elles y sont dérivables et l'on a :

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad , \quad (fg)' = f'g + fg' \quad , \quad (f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$$

En particulier, $(\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Par ailleurs,

$$(e^f)' = f'e^f \quad , \quad (\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f).f' \quad , \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Quelques dérivées usuelles avec la commande "diff"

Sans-titre (23)* - [Server 26] - Maple 16

```
> restart;
> Diff(x^a, x) = simplify(diff(x^a, x));
```

$$\frac{\partial}{\partial x} x^a = x^{a-1} a \qquad (1)$$

```
> Diff(sqrt(x), x) = diff(sqrt(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (2)$$

```
> Diff(ln(x), x) = diff(ln(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad (3)$$

```
> Diff(exp(x), x) = diff(exp(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad (4)$$

```
> Diff(sin(x), x) = diff(sin(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad (5)$$

```
> Diff(cos(x), x) = diff(cos(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \qquad (6)$$

```
> Diff(tan(x), x) = diff(tan(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan(x)^2 \qquad (7)$$

Prêt — C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.10s Mode Math

Lorsque c'est possible, la fonction $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, obtenue par n dérivations successives de f sur I est appelée dérivée $n-ième$ de f, où l'on convient que $f^{(0)} = f$. f est dite alors *de classe* C^n si $f^{(n)}$ est une fonction continue sur I. Elle est dite de classe C^∞ si on peut la dériver "autant de fois que l'on veut" sur I.

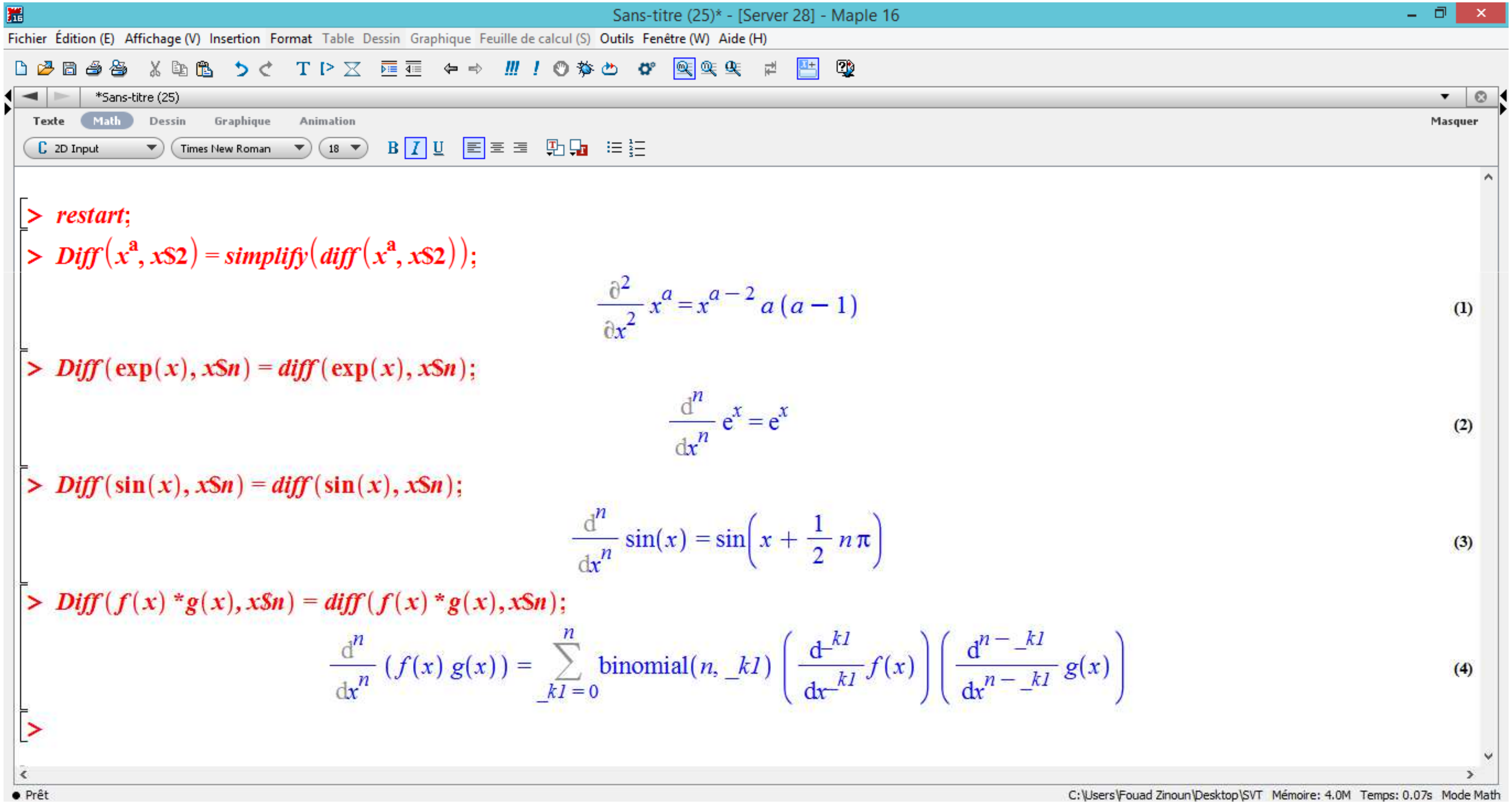
On montre, par récurrence sur n, que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

où les entiers C_n^k sont les coefficients binomiaux

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Quelques dérivées successives avec l'option "$n"



Lorsqu'une fonction est dérivable, étudier son sens de variation revient à étudier tout simplement le signe de sa fonction dérivée:

Si f est dérivable sur I, alors f est monotone croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I.

f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I ssi $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I, "sauf peut-être en des points isolés." En fait, la fonction $f(x) = x^3$, par exemple, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$.

Remarquer aussi que

$$f \text{ est (strict.) décroissante sur } I \iff -f \text{ est (strict.) croissante sur } I$$

Les fonctions logarithme et exponentielle sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$, respectivement :

$$\ln(x)' = \frac{1}{x} > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$e^{x\prime} = e^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Toutefois, la fonction logarithme est *à croissance lente* alors que l'exponentielle est *à croissance rapide* ...

La fonction $f(x) = x^3$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, admet une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où elle est nulle.

Dans toute la suite, extremum veut dire *minimum* ou *maximum*.

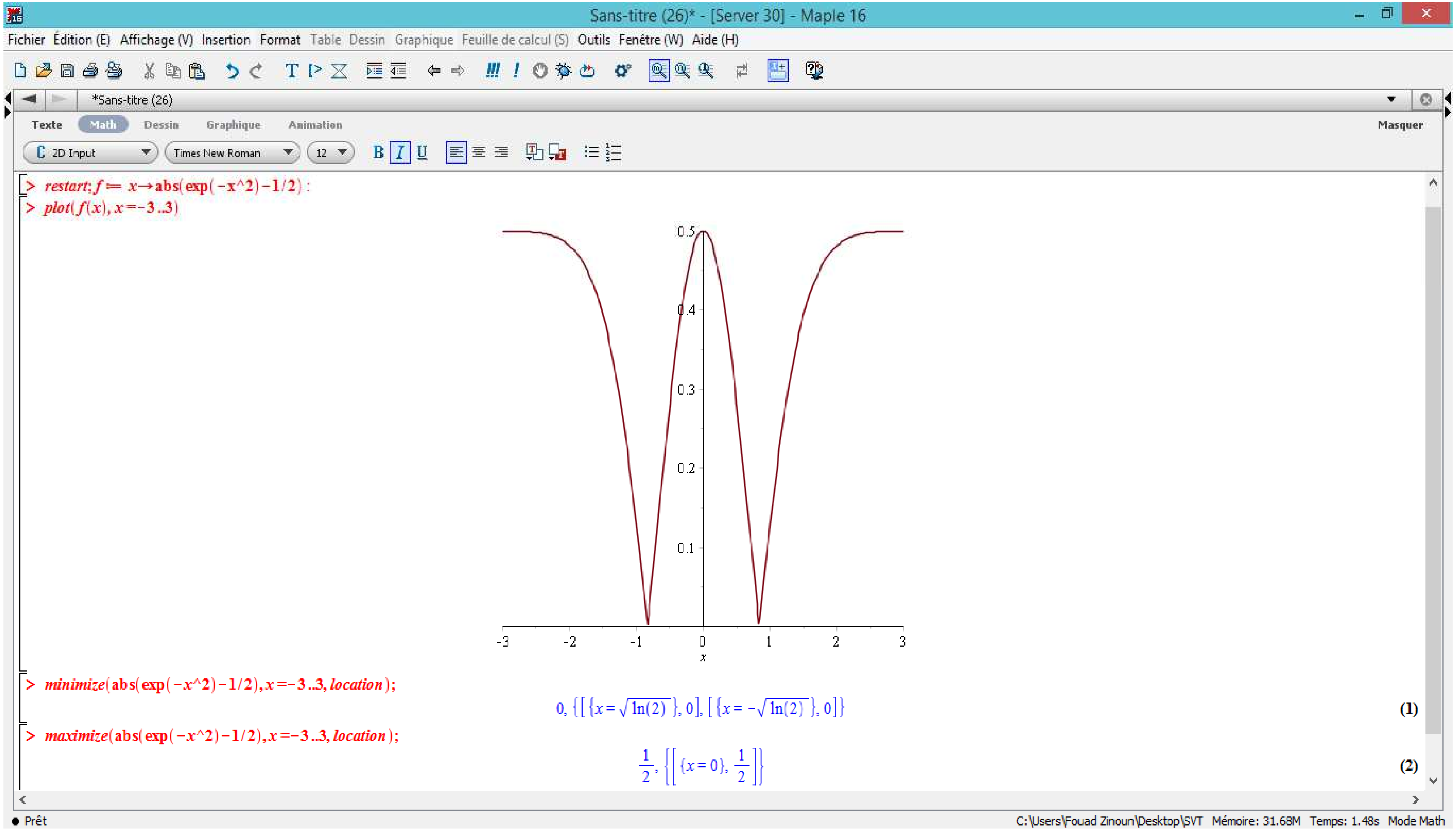
On dit que f admet un maximum (resp. minimum) en $x_0 \in E \subset \mathcal{D}_f$ lorsque

$$\forall x \in E,\ f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

f admet un *maximum local* (resp. *minimum local*) en x_0 s'il existe *un voisinage* de x_0 sur lequel f admet un maximum (resp. minimum) en x_0. En d'autres termes,

$$\exists h > 0 \text{ tq } \forall x \in E,\ |x - x_0| \leq h \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Recherche d’extremums à l’aide des commandes ‘‘minimize’’ ou ‘‘maximize’’ avec l’option ‘‘location’’



Un maximum ou un minimum en $x_0 \in E$, lorsqu'il existe, est *unique*. Il est égal à $f(x_0)$. Par contre, x_0 n'est pas nécessairement unique. Pour illustrer ce fait, il suffit de considérer la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$. Elle admet un maximum égal à 1, atteint en tout $x_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et un minimum égal à -1, atteint en tout $x_0 = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un *point intérieur* à I (c.-à-d. qui n'en est pas une borne), tel que f' s'annule en x_0 *en changeant de signe*, alors f atteint un extremum local en x_0. Plus précisément, en supposant que $f'(x_0) = 0$:

s'il existe $h > 0$ tq $]x_0 - h, x_0 + h[\subset I$, avec $f' > 0$ sur $]x_0 - h, x_0[$, $f' < 0$ sur $]x_0, x_0 + h[$, alors il s'agit d'un maximum local,

s'il existe $h > 0$ tq $]x_0 - h, x_0 + h[\subset I$, avec $f' < 0$ sur $]x_0 - h, x_0[$, $f' > 0$ sur $]x_0, x_0 + h[$, alors il s'agit d'un minimum local.

Remarquer que "f' change de signe en x_0" équivaut à "f change de sens de variation en x_0."

La condition $f'(x_0) = 0$, seule, est insuffisante :

La fonction $f(x) = x^3$ est de dérivée nulle en 0, mais elle ne présente pas d'extremum en ce point. En fait, cela vient du fait que f ne change pas de sens de variation en 0 : elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Une fonction peut présenter un extremum en un point sans être dérivable en ce point : considérer la fonction valeur absolue qui admet un minimum en 0 ...

Lorsque I est un intervalle fermé, f peut présenter un extremum (local) en un point d'extrémité sans que la dérivée soit nulle en ce point : considérer la fonction $f(x) = x$ sur $[0, 1]$, qui admet un minimum en 0 et un maximum en 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle réel I.

Définition. f est dite *convexe* (resp. *concave*) sur I lorsque, pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha \in]0,1[$, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

$$(\text{resp. } f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y))$$

Avec des inégalités strictes et $x \neq y$, on parle de convexité (concavité) stricte. Etudier la concavité de f revient alors à chercher les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

Proposition. Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe (resp. concave) sur I ssi $f'' \geq 0$ (resp. $f'' \leq 0$) sur I.
f est strictement convexe (resp. strictement concave) sur I ssi $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) sur I, "sauf peut être en des points isolés."

Dans ce cas, pour décider si un extremum en x_0 est un minimum ou un maximum, il suffit d'étudier le signe de f'' au voisinage de x_0 :
si $f'' < 0$, il s'agit d'un maximum,
si $f'' > 0$, il s'agit d'un minimum.

La fonction $|x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions x^2 et e^x sont (strictement) convexes sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\ln(x)$ est (strictement) concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f(x) = x^4$ est *strictement* convexe sur $\mathbb{R}$, bien que sa dérivée seconde s'annule en 0.

Définition. Un point où la courbe représentative d'une fonction admet une tangente et change de concavité est appelé *point d'inflexion*.

Proposition. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en x_0 ssi f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.

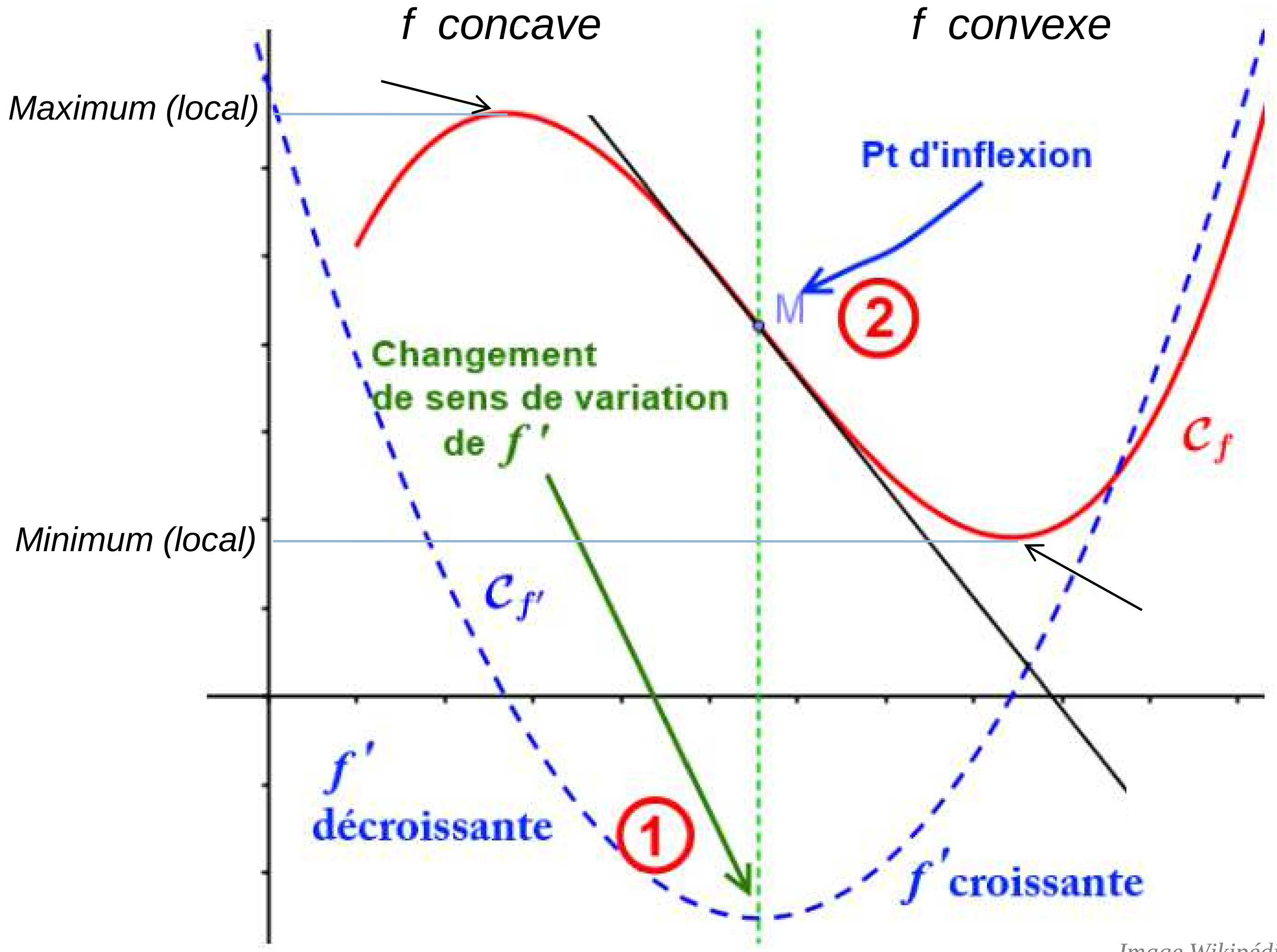


Image Wikipédia

Chercher les points d'inflexion de la fonction suivante, de la dynamique des populations :

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-vt}}\ , \quad t \in \mathbb{R}_+,\ v > 0$$

Réponse Maple avec la commande "InflectionPoints" du Student Package

```
> restart;
```

$$> N := t \rightarrow \frac{K \cdot N0}{N0 + (K - N0) \cdot \exp(-v \cdot t)};$$

$$N := t \rightarrow \frac{K\, N0}{N0 + (K - N0)\, \mathrm{e}^{-v\, t}} \qquad (1)$$

```
> assume(v > 0) : assume(K > N0 > 0) :
> with(Student[Calculus1]);
```

[AntiderivativePlot, AntiderivativeTutor, ApproximateInt, ApproximateIntTutor, ArcLength, ArcLengthTutor, Asymptotes, Clear, CriticalPoints, CurveAnalysisTutor, DerivativePlot, DerivativeTutor, DiffTutor, ExtremePoints, FunctionAverage, FunctionAverageTutor, FunctionChart, FunctionPlot, GetMessage, GetNumProblems, GetProblem, Hint, InflectionPoints, IntTutor, Integrand, InversePlot, InverseTutor, LimitTutor, MeanValueTheorem, MeanValueTheoremTutor, NewtonQuotient, NewtonsMethod, NewtonsMethodTutor, PointInterpolation, RiemannSum, RollesTheorem, Roots, Rule, Show, ShowIncomplete, ShowSolution, ShowSteps, Summand, SurfaceOfRevolution, SurfaceOfRevolutionTutor, Tangent, TangentSecantTutor, TangentTutor, TaylorApproximation, TaylorApproximationTutor, Understand, Undo, VolumeOfRevolution, VolumeOfRevolutionTutor, WhatProblem] (2)

```
> InflectionPoints( N(t),t);
```

$$\left[-\frac{\ln(N0\sim) - \ln(K\sim - N0\sim)}{v\sim} \right] \qquad (3)$$

```
> 
```

La condition $f''(x_0) = 0$, seule, est insuffisante :

La fonction $f(x) = x^4$ n'admet aucun point d'inflexion, bien que sa dérivée seconde s'annule en 0. Ceci vient du fait que la fonction $f''(x) = 12x^2$ ne change pas de signe en 0 : elle est toujours positive.

Quelques théorèmes fondamentaux en analyse des fonctions numériques de la variable réelle

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application *continue*. Alors, pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

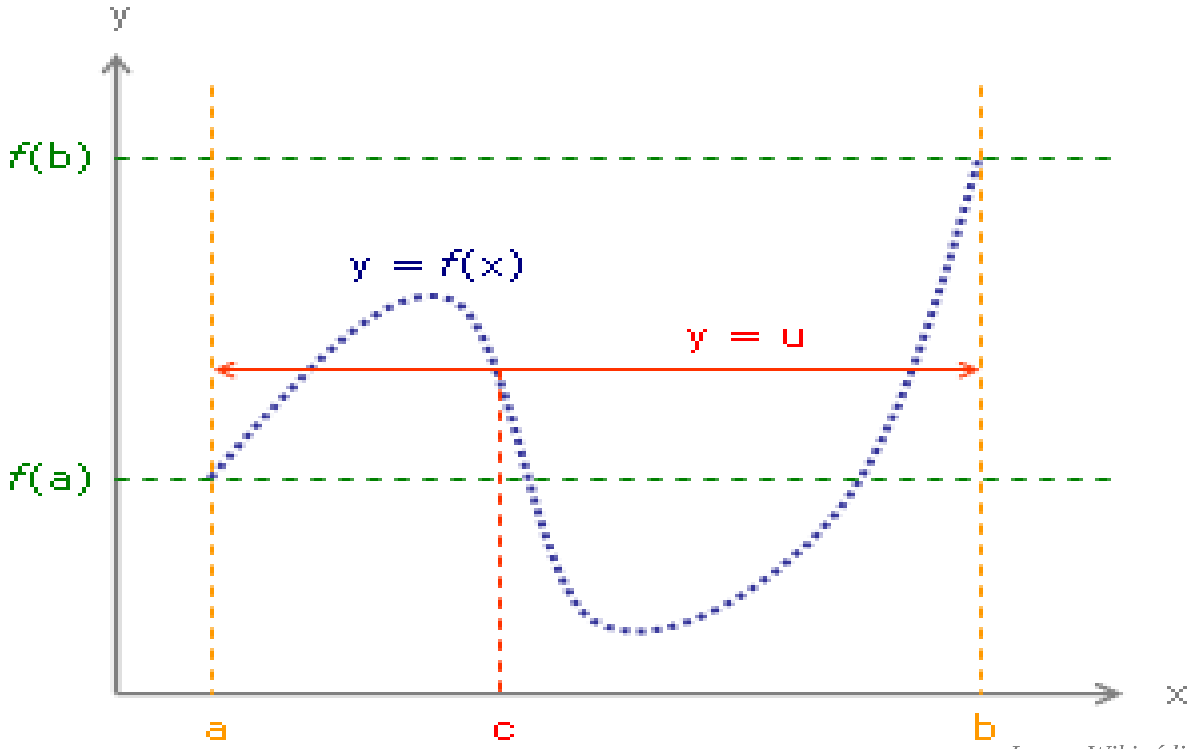


Image Wikipédia

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a).f(b) < 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe), Alors, il existe (au moins un) $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ (car 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$).

La fonction $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle admet *un zéro* (c.-à-d. un c tel que $f(c) = 0$) sur l'intervalle $]-2, -1[$ (puisque $f(-2).f(-1) < 0$) et un autre sur l'intervalle $]1, 2[$ (puisque $f(1).f(2) < 0$).

Tout polynôme P à coefficients réels, de *degré impair*, admet au moins *une racine* réelle (c.-à-d. un $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$). En fait, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} P(x) = signe(a_n) \times \infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} P(x) = -signe(a_n) \times \infty$, a_n étant le coefficient du monôme de plus haut degré. Par le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme étant continu sur $\mathbb{R}$, il s'en suit que P prend toutes les valeurs réelles, en particulier la valeur 0.

La méthode de *dichotomie* est une méthode itérative d'approximation de zéros réels de fonctions, se basant sur le théorème des valeurs intermédiaires. Comme exemple, on considère la fonction $f(x) = x-2+e^{-x}$ sur l'intervalle $]1, 2[$. En admettant son unicité, cherchons une approximation de la valeur $c \in]1, 2[$ telle que $f(c) = 0$.

On a $f(1).f(2) < 0$. Plus précisément, $f(1) \simeq -0.63$ et $f(2) \simeq 0.13$. On se place alors au milieu de l'intervalle et on calcule $f(3/2)$. On trouve $f(3/2) \simeq -0.27$. Comme $f(1).f(3/2) > 0$ et $f(3/2).f(2) < 0$, et par le théorème des valeurs intermédiaires, la solution x_0 ne peut être que sur l'intervalle $]3/2, 2[$, et non sur l'intervalle $]1, 3/2[$. On se place donc au milieu de l'intervalle en question et on calcule $f(7/4)$. On trouve $f(7/4) \simeq -0.07$. Par le même théorème, on déduit que $x_0 \in]7/4, 2[$. On calcule alors $f(15/8) \simeq 0.02$, ce qui implique que $c \in]7/4, 15/8[$. On réitère alors le processus en cernant à chaque fois c dans un intervalle de plus en plus petit, et ce jusqu'à obtention d'une précision satisfaisante pour c. Pour les curieux, on trouve après un nombre assez grand d'itérations, $c \simeq 1.84140566$.

Isolation des racines et approximation numérique (Par défaut, Maple procède par Newton-Raphson)

Sans-titre (28)* - [Server 33] - Maple 16

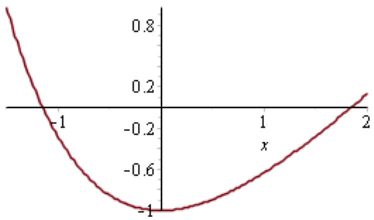
```
> restart;
> f := x -> exp(-x) + x - 2;
```

$$f := x \rightarrow e^{-x} + x - 2 \qquad (1)$$

```
> solve(f(x) = 0);
```

$$\mathrm{LambertW}\left(-e^{-2}\right) + 2,\ \mathrm{LambertW}\left(-1, -e^{-2}\right) + 2 \qquad (2)$$

```
> plot(f(x), x = -1.5..2);
```



$$1.841405660 \qquad (3)$$

```
> fsolve(f(x) = 0, x = -1.5..-1);
```

$$-1.146193221 \qquad (4)$$

```
> fsolve(f(x) = 0, x = 1..2);
```

$$1.841405660 \qquad (5)$$

Prêt   C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT   Mémoire: 4.0M   Temps: 0.10s   Mode Math

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, *dérivable* sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe (au moins un) $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$, f admettant un extremum (local) en c.

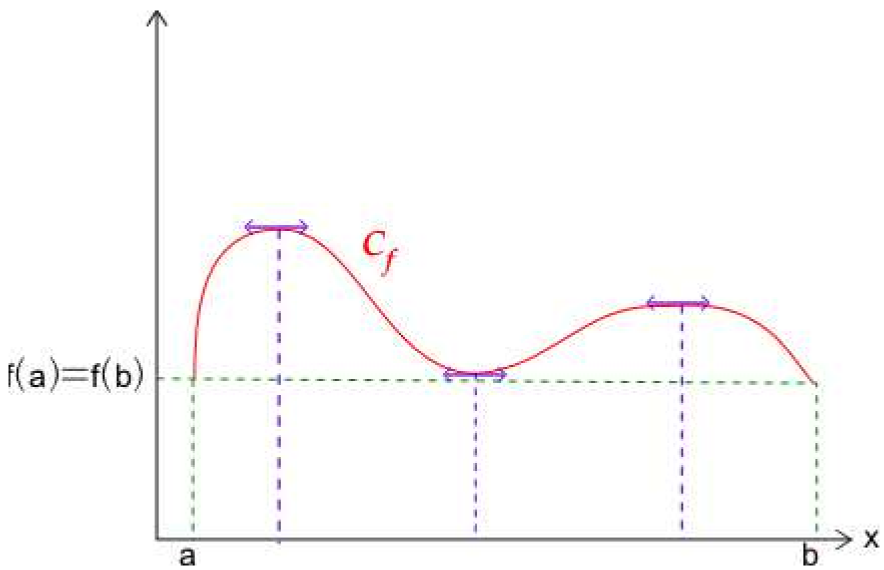


Image Wikipédia

“Rolle estimait que le calcul différentiel est logiquement contradictoire et naturellement ne pouvait énoncer le théorème en question. Il lui appartient un théorème d’algèbre d’où il découle que si a et b sont les racines de l’équation

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0 \ ,$$

alors il existe entre a et b une racine de l’équation

$$n x^{n-1} + (n-1) p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} = 0$$

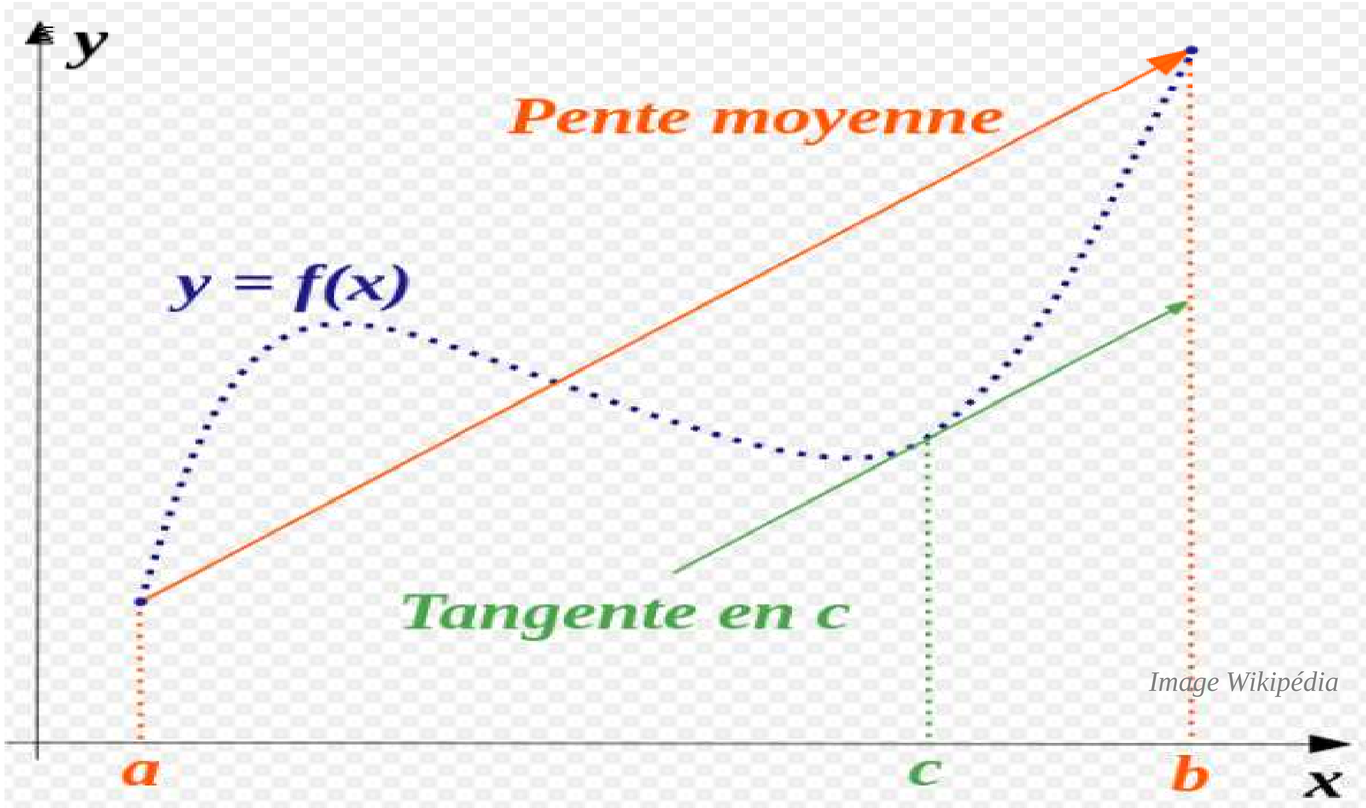
Cette proposition, cas particulier du "théorème de Rolle" (le premier membre de la seconde équation est la dérivée du premier membre de la première équation), est à l’origine de l’appelation du théorème.” M. Vygodski, Aide-mémoire de mathématiques supérieures, Editions MIR (Moscou), 1973, page 334.

Le théorème de Rolle n'est pas vrai si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$. Il suffit de considérer la fonction $f(x) = |x|$ sur un intervalle de la forme $]-a, a[$, $a \neq 0$: il n'existe aucun $x \in]-a, a[$ tel que $f'(x) = 0$.

La généralisation (sous une certaine forme) du théorème de Rolle dans le cas multi-dimensionnel n'est pas encore résolue. C'est l'objet de la *conjecture jacobienne* proposée en 1939 par le mathématicien allemand Ott-Heinrich Keller.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, *dérivable* sur $]a, b[$ où $a < b$. Alors, il existe (au moins un) $c \in]a, b[$ vérifiant

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Pour référer à nos théorèmes, personnellement, même pressé, je n'utilise jamais les abréviations telles (on les aura devinées ..) T.V.I, T.A.F., etc. Elles m'ont plutôt l'air de bien aller pour une taxe foncière que pour un théorème fondamental en analyse !

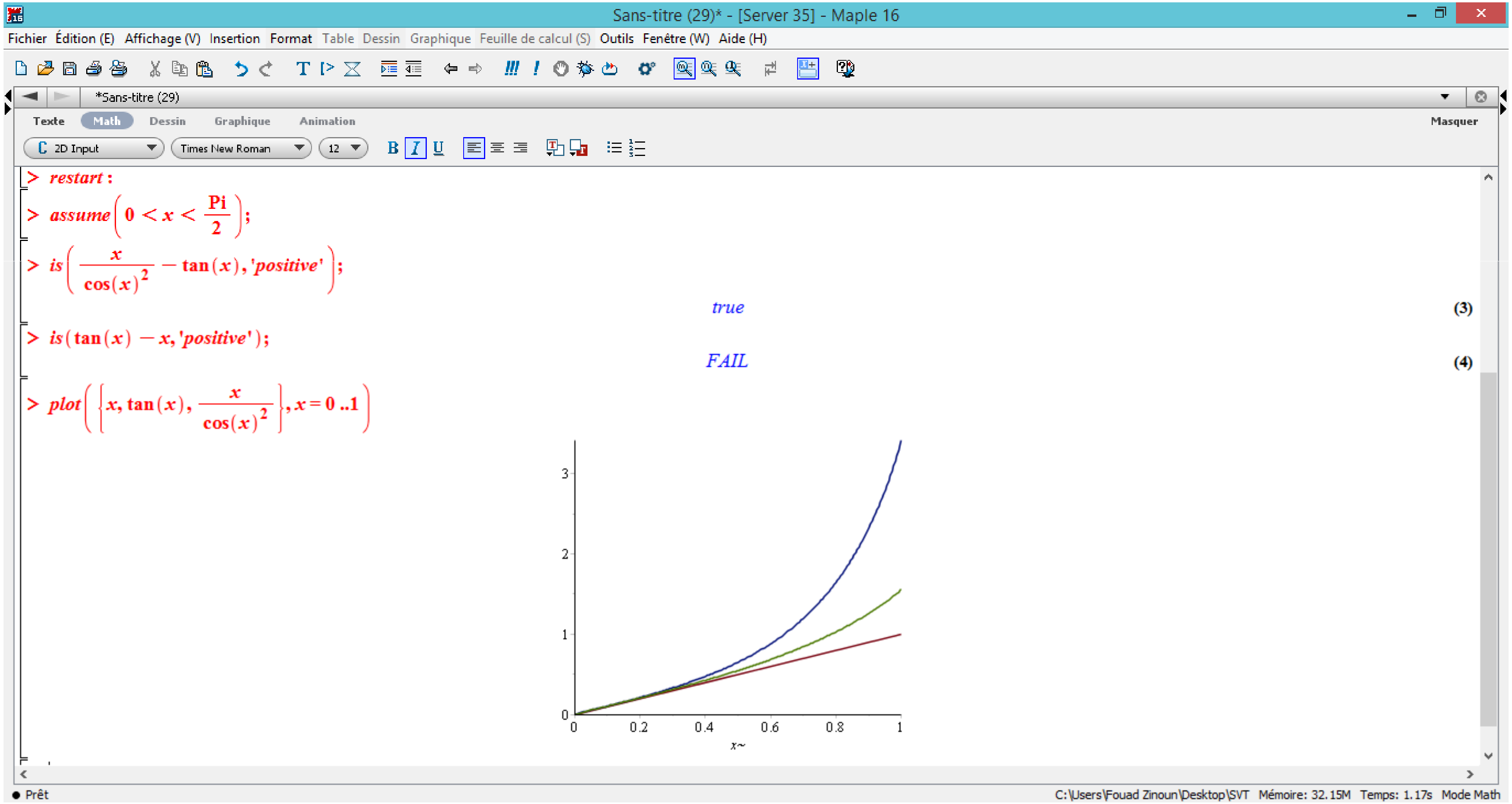
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, *dérivable* sur $]a,b[$ avec $|f'(x)| \leq k \; \forall x \in]a,b[$, alors on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \quad \forall x, y \in]a,b[$$

Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$x < \tan(x) < \frac{x}{\cos(x)^2}$$

Réponse analytique par théorème des accroissements finis (traitée en classe)
Réponse Maple à l'aide des commandes "assume" et "is" :
Remarquer que Maple (du moins sous cette version) échoue dans l'étude du signe de tg(x)-x sur l'intervalle]0,π/2[



Soient f et g deux fonctions dérivables dans un *voisinage épointé* de x_0, c.-à-d. de la forme $]x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$. On suppose que f et g admettent en x_0 une limite nulle ou des limites infinies. Alors si f'/g' possède une limite l en x_0, il en est de même pour la fonction f/g et l'on a

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Le résultat est valable que x_0 et l soient finis ou infinis.

Exemples

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}=\cdots=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$$

La règle n'est utilisable qu'en cas d'indétermination $0/0$ ou ∞/∞ :

$$2 = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2+1}{2x-1} \neq \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x}{2} = 1$$

Il se peut que la limite de f/g existe sans pour autant que celle de f'/g' le soit :

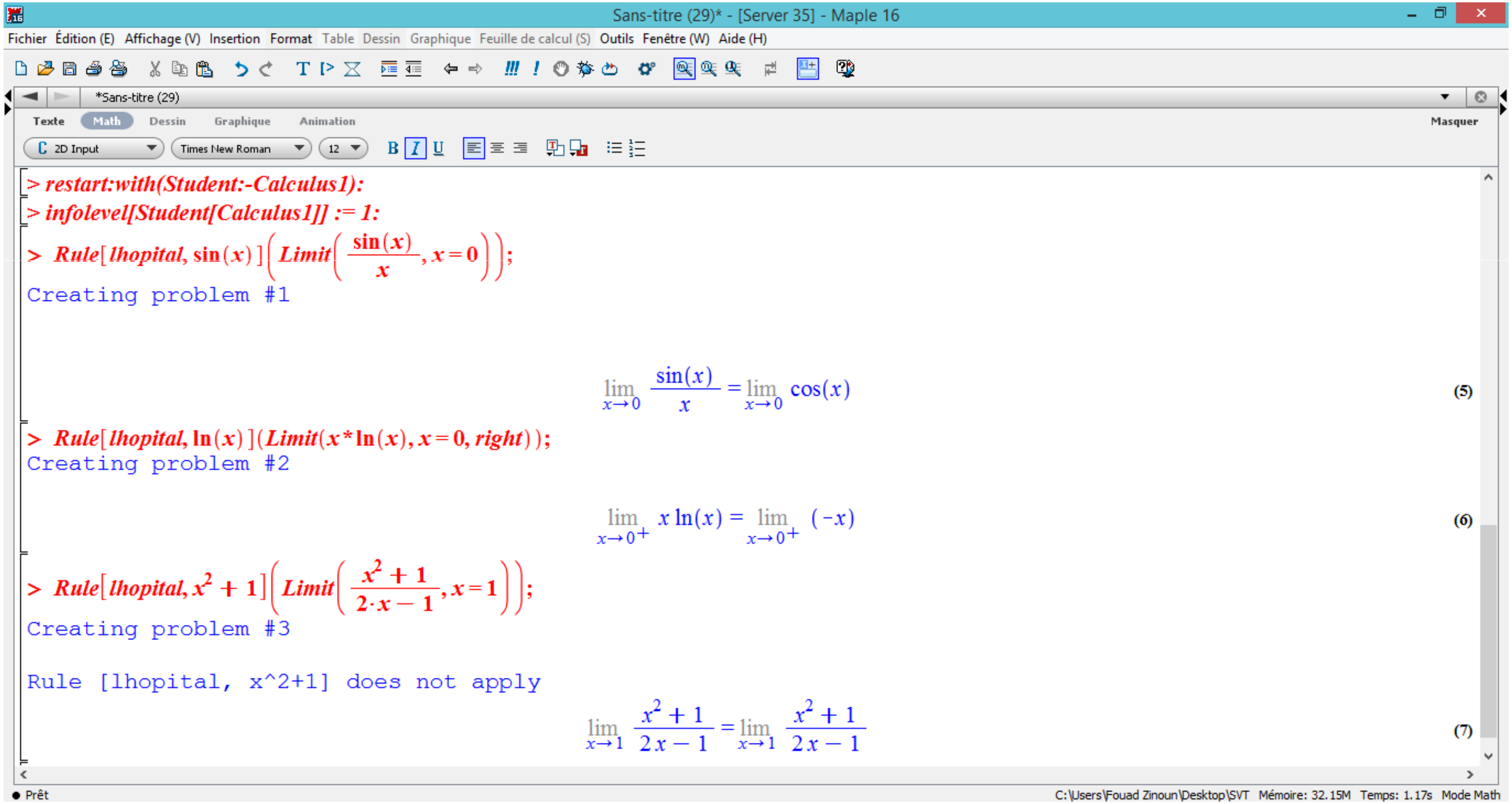
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$$

alors que la fonction

$$\frac{(x^2 \sin(1/x))'}{x'} = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

n'admet pas de limite en 0.

Règle de L'Hôpital sur Maple



"On trouve cette règle (sous une forme moins rigoureuse) dans l' Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes (1696), *premier traité imprimé de calcul différentiel. Pour élaborer cet ouvrage, L'Hospital utilisa un manuscrit de son maître Jean Bernoulli et, tout particulièrement, la règle en question. C'est pourquoi l'expression "règle de L'Hospital" est abusive."* M. Vygodski, Aide-mémoire de mathématiques supérieures, Editions MIR (Moscou), 1973, page 341.

Soit f une fonction numérique de la variable réelle *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors,

$*)$ $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f établit une bijection de I sur $f(I)$,

$*)$ f^{-1} est continue, strictement monotone de $f(I)$ vers I, de même sens de variation que f,

$*)$ $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la $1^{ère}$ bissectrice $(y = x)$.

$*)$ Si de plus f est dérivable sur I, f^{-1} est dérivable en tout point $y \in f(I)$ tel que $(f' \circ f^{-1})(y) \neq 0$, et l'on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, *strictement monotone*. Alors, pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *un et un seul* réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, *strictement monotone*, telle que $f(a).f(b) < 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe), Alors, il existe *un et un seul* $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

la fonction $f(x) = sin(x)$ est une fonction continue, strictement croissante sur $I = [-\pi/2, \pi/2]$. Elle établit donc une bijection de I sur l'intervalle

$$f(I) = [\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$$

Sa bijection réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est appelée *arc sinus* et notée *arcsin*. On a alors

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2] \quad , \quad \sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

la fonction $f(x) = \cos(x)$ est une fonction continue, strictement décroissante sur $I = [0, \pi]$. Elle établit donc une bijection de I sur l'intervalle

$$f(I) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$$

Sa bijection réciproque $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ est appelée *arc cosinus* et notée *arccos*. On a alors

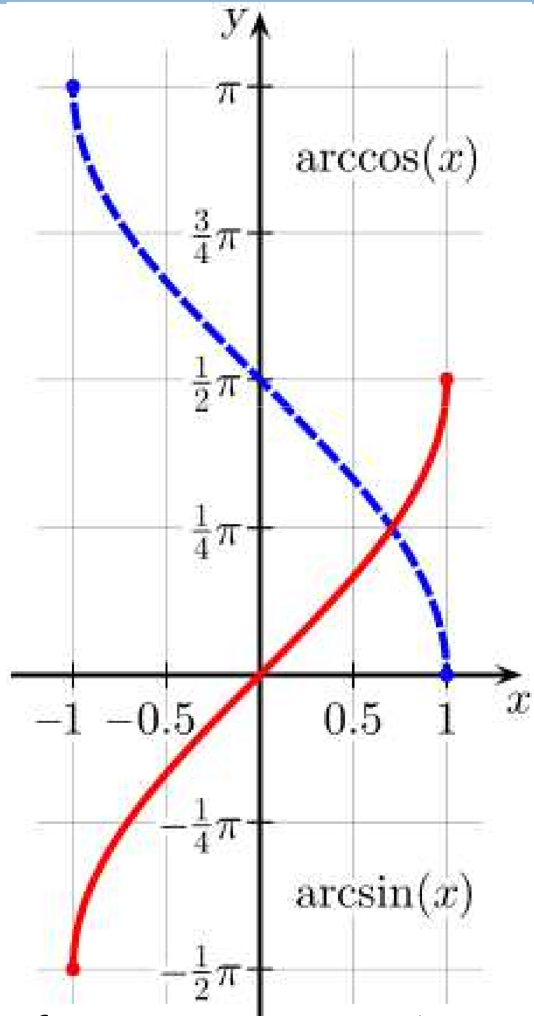
$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi] \quad , \quad \cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

la fonction $f(x) = \tan(x)$ est une fonction continue, strictement croissante sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Elle établit donc une bijection de I sur l'intervalle

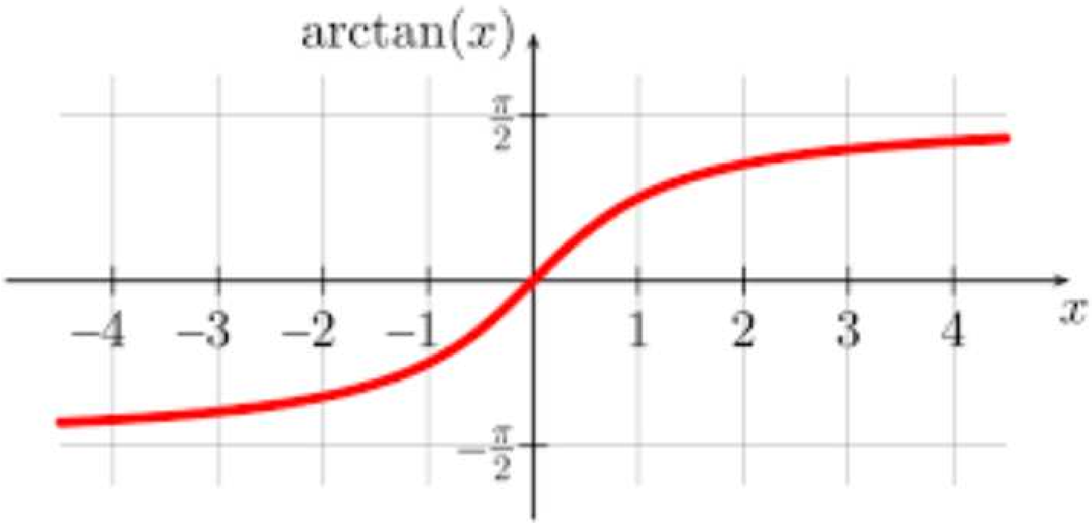
$$f(I) =]\lim_{x \longrightarrow -\pi/2} \tan(x), \lim_{x \longrightarrow \pi/2} \tan(x)[= \mathbb{R}$$

Sa bijection réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est appelée *arc tangente* et notée *arctan*. On a alors

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\quad , \quad \tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



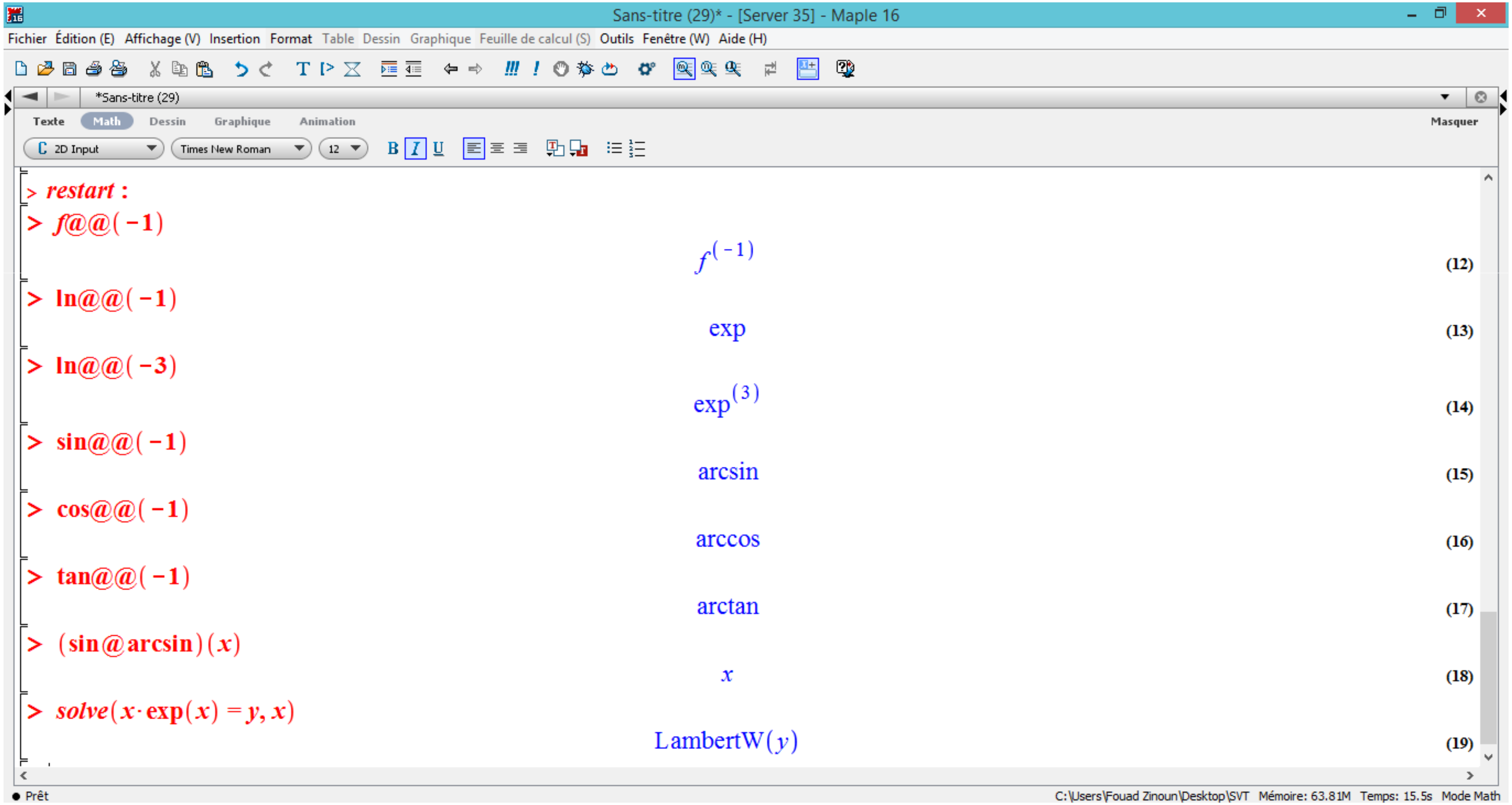
Les fonctions arc sinus (en rouge)
et arc cosinus (en bleu)



La fonction arc tangente

Images Wikipédia

L'opérateur "@" sur Maple



On montre que

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2 \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pm\pi/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*_\pm$$

Quelques exercices

Exercice 1. *(Calcul de limites)*
Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad 2)\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} \sin(x) \qquad 3)\ \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$$4)\ \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin(x)^2} \qquad 5)\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

Exercice 2. *(Prolongement par continuité)*
Déterminer $a > 0$ pour que les fonctions définies ci-dessous soient prolongeables par continuité en 0 :

$$1) \quad \begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2+x+\ln(a) & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \sin(\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}+a^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3. *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
Montrer que l'équation $\cos(x) = x^4+4x$ admet une et une seule solution dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Exercice 4. *(Théorème des accroissements finis)*
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, \pi/6[$ par $f(x) = \sin(x)$.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer que $x/2 < \sin(x) < x$.
2. De la même façon, montrer que $1 - \cos(x) < x$ pour tout $x \in]0, \pi/6[$.
3. En déduire que $0 < x - \sin(x) < x^2$ pour tout $x \in]0, \pi/6[$.

Exercice 5. *(Fonctions bijectives)*
Déterminer dans les cas suivants les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f est bijective et donner dans chaque cas l'expression de la bijection réciproque :

$$a)\quad f(x) = x^2 \qquad\qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad\qquad c)\quad \sin(x)^2$$

Exercice 6. *(Modèle logistique)*
L'un des premiers modèles rencontrés en dynamique des populations dans le cas où, à forte densité, les organismes entrent en compétition pour une ressource, est le modèle logistique. Celui-ci permet de prédire la densité N de la population en fonction du temps t :

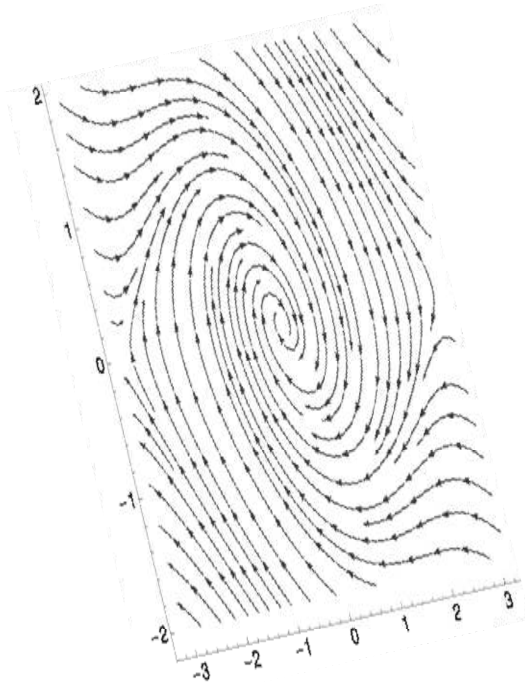
$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-vt}}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

où $N_0 > 0$ est la densité initiale, $v > 0$ est la vitesse de reproduction et $K > N_0$ est le seuil de saturation ou encore la capacité d'accueil de l'environnement.

1) Donner $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} N(t)$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} N(t)$.
2) Montrer que N est une fonction croissante et bornée sur $\mathbb{R}_+$.
3) Montrer que C_N admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
4) Représenter l'allure de C_N en précisant le point d'abscisse 0, la demi-tangente à C_N en ce point, le point d'inflexion et l'asymptote horizontale.

Chapitre 3

Intégration et équations différentielles



Primitive d'une fonction

Problème

Nous avons étudié au chapitre précédent le problème suivant :
Etant donnée une fonction F, trouver (lorsqu'elle existe) sa dérivée F'.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème inverse :
Etant donnée une fonction f , trouver (lorsqu'elle existe) une fonction F telle que

$$F' = f$$

Cette opération est une sorte d'*antidérivation* de f.

Une fonction F vérifiant $F' = f$ sur un intervalle I sera appelée *une primitive* de f sur I.

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué de toutes les fonctions de la forme

$$F + c$$

où c est une constante réelle. En un sens, *à une constante près*, la primitive d'une fonction, lorsqu'elle existe, est unique.

Plus précisément, pour $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule primitive F telle que $F(a) = b$.

Exemple. Chercher la primitive de $f(x) = 5x - 2$ vérifiant la condition $F(1) = 1$.

On appelle *intégrale indéfinie* de f et on note $\int f(x)dx$ toute expression de la forme $F(x) + c$, où F est une primitive de f.

$\int$ est appelé *signe somme*, *signe d'intégration*, *signe intégral* ou *intégrateur;*
f est la *fonction sous le signe somme* ou *fonction à intégrer*;

$f(x)dx$ est *l'expression sous le signe somme* où x joue le rôle de *variable muette*.

Quelques primitives usuelles

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
k	$kx+c$	$I=\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+c$	$I=\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$I=\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}-\{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+c$	$I=\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}-\{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+c$	$I=]0,+\infty[$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$	$I=]0,+\infty[$ et $\alpha\in\mathbb{R}-\{-1\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$I=]0,+\infty[$
e^x	e^x+c	$I=\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$I=\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$I=\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+c$	$I=]-\pi/2,\pi/2[$

Fonction $f(x)$	Primitives $F(x)$	Domaine
$g(ax+b)$	$\frac{1}{a}G(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)+c$	où $u \neq 0$
$u'(x)u^\alpha(x)$	$\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$	où $u \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+c$	où $u > 0$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))+c$	$\mathbb{R}$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))+c$	$\mathbb{R}$

Astuce

Pour lire une table de primitives usuelles, il suffit de lire une table de dérivées usuelles ... à l'envers !

Il est parfois difficile voire *impossible* de chercher explicitement une primitive à une fonction donnée. Par exemple, on montre que les primitives exprimées par les intégrales indéfinies

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin(x)}{x}dx,\ \int \frac{\cos(x)}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln(x)},\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2(x)}dx \quad (k<1)$$

existent dans des domaines appropriés, mais ne sont pas *élémentaires* dans le sens où elles ne peuvent s'exprimer par des combinaisons en nombre fini de fonctions usuelles ...

Pourquoi certaines fonctions sont "primitivables" alors que d'autres ne le sont pas, c'est toute une histoire ...
(Pour les curieux, la réponse réside dans un certain *théorème de Liouville* ou, de manière générale, dans toute une théorie, *la théorie de Galois* ...)

Quelques exemples de recherche de primitives avec la commande "int"
(On fera la remarque que les deux dernières primitives ne sont pas élémentaires)

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
> f := x → x^3 + 5*x^2 + 2*x − 1 :
> Int(f(x), x) = int(f(x), x)
```

$$\int \left(x^3+5x^2+2x-1\right)\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+x^2-x \qquad (23)$$

```
> Int(sin(x), x) = int( sin(x), x )
```

$$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x) \qquad (24)$$

```
> Int(1/(x^2+1), x) = int(1/(x^2+1), x)
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan(x) \qquad (25)$$

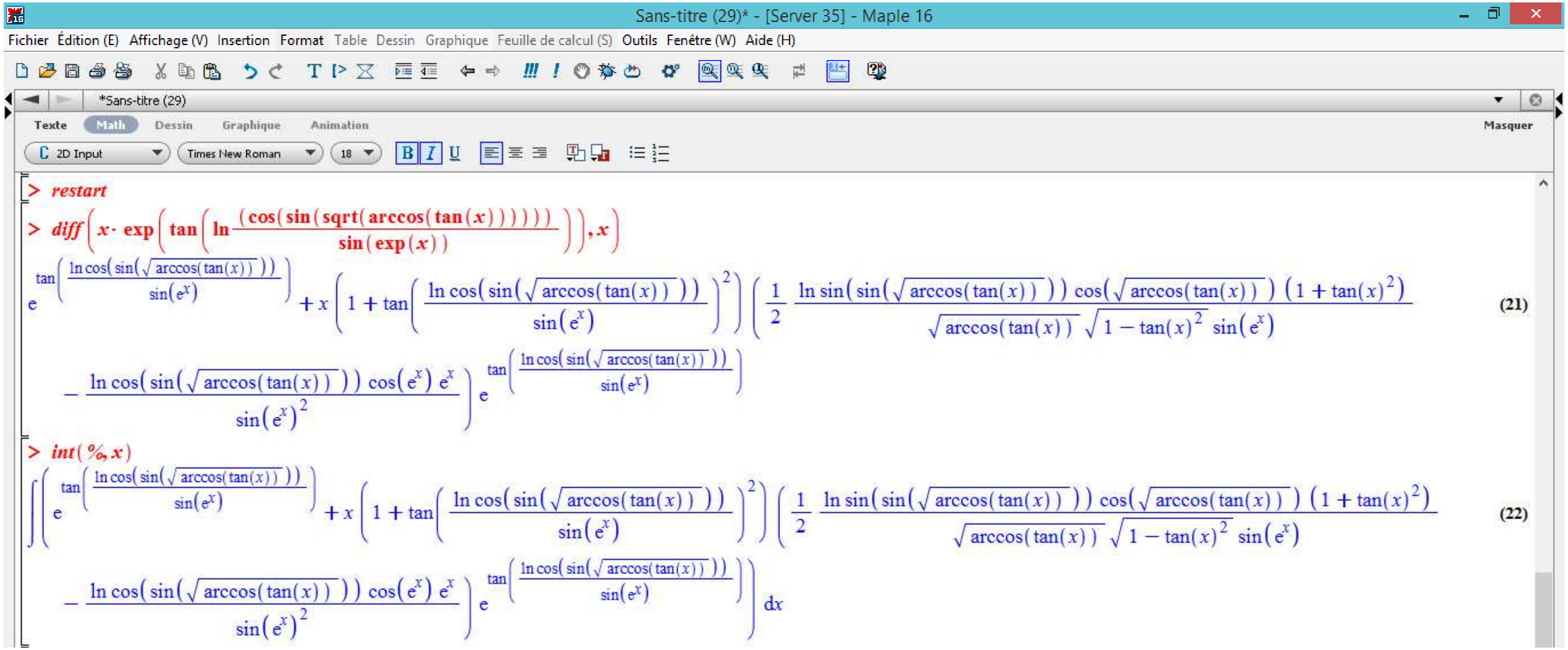
```
> Int( exp(−x^2), x ) = int( exp(−x^2), x )
```

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x) \qquad (26)$$

```
> int( exp(−x^2)*ln(x), x )
```

$$\int e^{-x^2}\ln(x)\,dx \qquad (27)$$

La procédure de décision de Risch, développée en 1968, est un algorithme qui est censé déterminer si une fonction admet une primitive exprimable à l'aide des fonctions élémentaires et, si c'est le cas, de la déterminer explicitement. A l'heure actuelle, et autant que l'on sache, il semble qu'aucun système de calcul formel n'a réussi à implémenter *complètement* la méthode. Ci-après un exemple proposé par les étudiants, où l'on demande à Maple de dériver un "mélange horrible" de fonctions élémentaires et de procéder par suite à une intégration: Il refuse de se prononcer ..



Intégration sur un segment

Définition

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I et $a, b \in I$. On appelle *intégrale de a à b de f* la quantité (qui ne dépend pas du choix de la primitive de f)

$$\int_a^b f(x)dx := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a) \ ,$$

a et b étant les bornes de l'intégrale.
$[F(x)]_a^b$ se lit "F pris entre a et b".
Si $a \leq b$, on peut aussi utiliser la notation

$$\int_{[a,b]} f(x)dx$$

Intégrer une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ revient alors à calculer $\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Quelques exemples d'intégrales définies

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
> Int( cos(x), x = 0..Pi ) = int( cos(x), x = 0..Pi )
```

$$\int_{0}^{\pi} \cos(x)\, dx = 0 \qquad (31)$$

```
> Int( arccos(x), x = -1..1) = int( arccos(x), x = -1..1)
```

$$\int_{-1}^{1} \arccos(x)\, dx = \pi \qquad (32)$$

```
> Int( arcsin(x), x = -1..1) = int( arcsin(x), x = -1..1)
```

$$\int_{-1}^{1} \arcsin(x)\, dx = 0 \qquad (33)$$

```
> int( tan(x), x = -Pi/2 .. Pi/2 )
```

$$\textit{undefined} \qquad (34)$$

```
> Int(1/sqrt(2*t^4 - 3*t^2 - 2), t = 2..3) = int(1/sqrt(2*t^4 - 3*t^2 - 2), t = 2..3)
```

$$\frac{1}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{EllipticF}\left(\frac{1}{3}\sqrt{7}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right) - \frac{1}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{EllipticF}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \qquad (35)$$

Remarquer que dans le cas où f est continue sur I, $a \in I$, l'application

$$\begin{array}{rccl} G: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \end{array}$$

n'est autre que *la* primitive de f qui s'annule en a.

Exemple. La fonction logarithme népérien est par définition la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $f(x) = 1/x$ qui s'annule en 1 :

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}\ , \quad x > 0$$

Soient f et g deux fonctions admettant des primitives sur un intervalle I.
Pour tout $a, b, c \in I,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad (\textit{Linéarité})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (\textit{Relation de Chasles})$$

$$f \geq 0 \textit{ sur } [a,b] \Longrightarrow \int_{[a,b]} f(x)dx \geq 0 \quad (\textit{Positivité})$$

$$f \leq g \textit{ sur } [a,b] \Longrightarrow \int_{[a,b]} f(x)dx \leq \int_{[a,b]} g(x)dx \quad (\textit{Croissance})$$

$$\left| \int_{[a,b]} f(x)dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f(x)|dx, \textit{ avec égalité si } f \textit{ est de signe constant sur } [a,b].$$

Si f est une fonction admettant une primitive sur un intervalle de la forme $[-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx \quad si\ f\ est\ paire \\ 0 \quad si\ f\ est\ impaire \end{cases}$$

$\int_{[a,b]} |f(x)|dx$ (resp. $\int_{[a,b]} f(x)dx$) mesure *l'aire géométrique*, exprimée en unités d'aire, (resp. *l'aire algébrique*, éventuellement négative), délimitée par les droites d'équations $(x = a)$ et $(x = b)$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

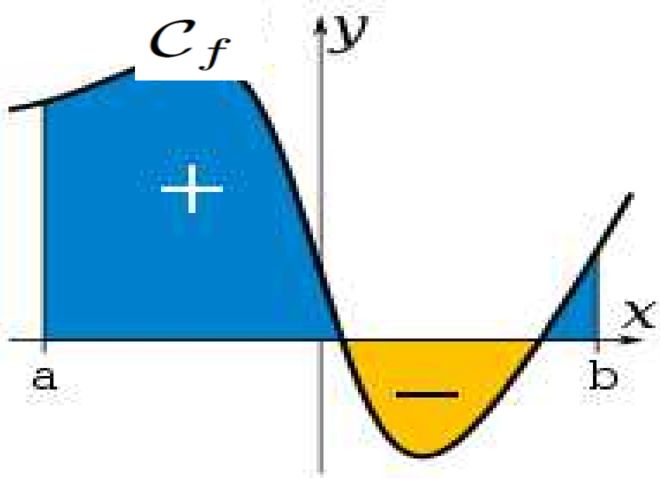


Image Wikipédia

Elle consiste à trouver d'emblée une primitive de la fonction à intégrer, moyennant de petites manipulations algébriques, et ce en repérant une primitive usuelle.

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

Soient f et g deux fonctions continument dérivables sur un intervalle I. Alors, pour tout $x \in I$,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

et donc, pour tout $a, b \in I$,

$$\int_a^b (f(x)g(x))' dx = [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g(x)' dx$$

D'où la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

A priori, l'intégrale $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ est censée être plus simple à calculer que $\int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Exemple

$$\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e x' \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x(\ln(x))'dx = e - \int_1^e dx = 1$$

La commande "Parts"


```
> restart
> with(IntegrationTools):
> J := Int(exp(x)*cos(x), x);
```

$$J := \int e^{x} \cos(x)\, dx \quad (41)$$

```
> Parts(J, cos(x));
```

$$e^{x} \cos(x) - \left(\int \left(-e^{x} \sin(x) \right) dx \right) \quad (42)$$

```
> Parts(J, exp(x));
```

$$e^{x} \sin(x) - \left(\int e^{x} \sin(x)\, dx \right) \quad (43)$$

```
> K:=Int(ln(x),x=1..exp(1));
```

$$K := \int_{1}^{e} \ln(x)\, dx \quad (44)$$

```
> Parts(K, ln(x)) : % = value(%);
```

$$e - \left(\int_{1}^{e} 1\, dx \right) = 1 \quad (45)$$

Soit donnée l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

où f est est continue sur le segment $[a, b]$.
Introduisons la nouvelle variable t par la formule

$$x = \varphi(t)$$

Si

- α et β sont tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$,
- φ est de classe C^1 sur le segment $[\alpha, \beta]$,
- $f \circ \varphi$ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$,

alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Toute la question est de trouver le bon changement de variable qui ramènerait l'intégrale de départ à une intégrale plus simple.

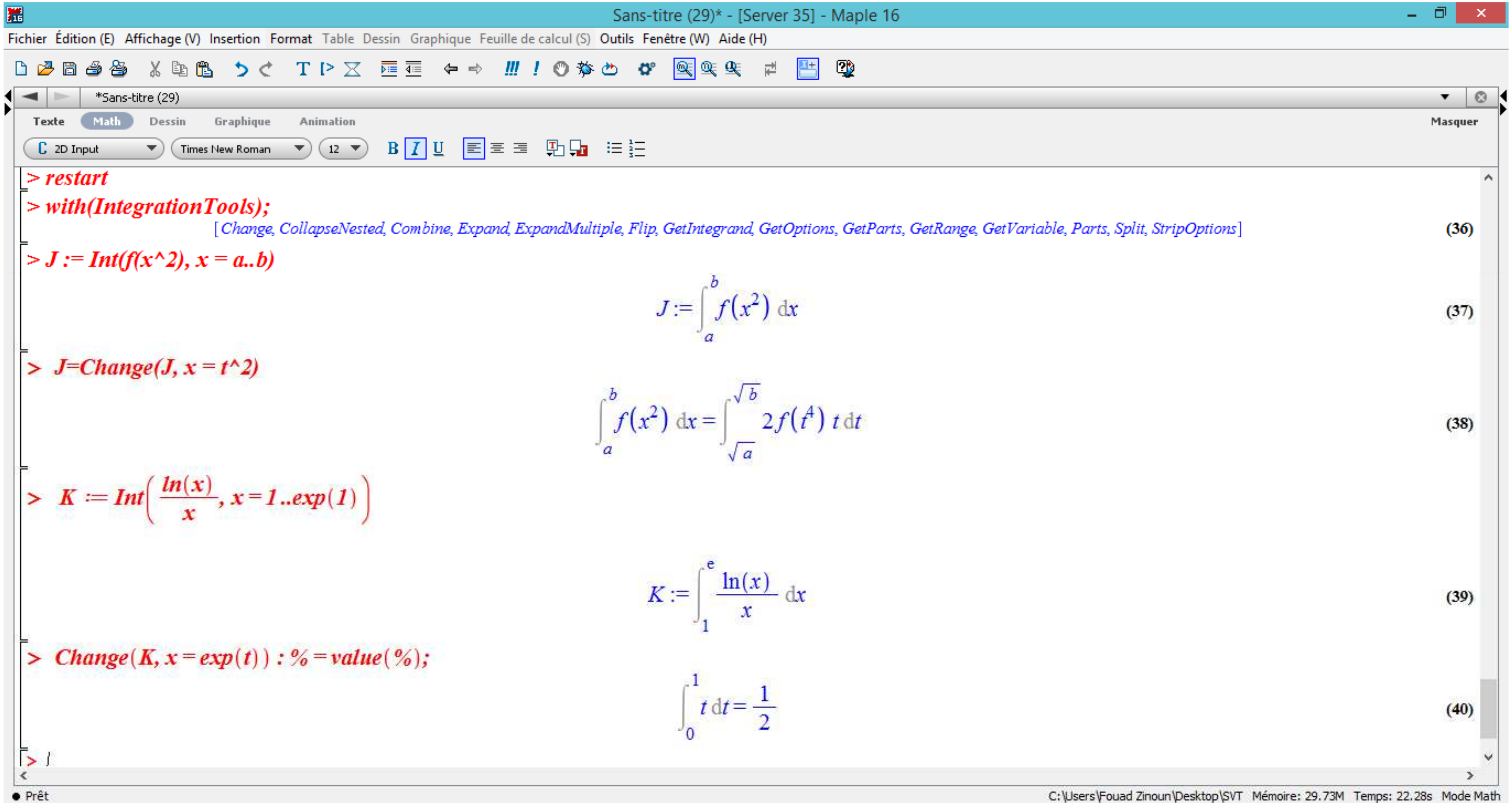
Calculer

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

On considère le changement de variable $x = e^t$, $t \in [0, 1]$.
On a donc $\ln(x) = t$ et $dx = e^t dt$; d'où

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{t}{e^t} e^t dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}[t^2]_0^1 = \frac{1}{2}$$

La commande "Change"



Les *fractions rationnelles* du type

$$\text{I.} \quad \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II.} \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \textit{ entier} \geq 2)$$

$$\text{III.} \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad (\textit{où } \triangle := p^2-4q<0)$$

$$\text{IV.} \quad \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \textit{ entier} \geq 2 \textit{ et } \triangle < 0)$$

sont appelées respectivement *éléments simples des types* I, II, III *et* IV.

L'intégration des éléments simples des types I et II est élémentaire :

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c$$

L'intégration des éléments simples du type III, elle aussi, ne présente pas de grandes difficultés :

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q}dx \\
&= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)} \\
&= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + 2\frac{2B-Ap}{4q-p^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2}
\end{aligned}$$

...

En posant $t := \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$, on a $dt = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}dx$ et

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\int\frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan t + c \\
&= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c
\end{aligned}$$

L'intégration des éléments simples du type IV est liée à des calculs plus compliqués qui mènent à des intégrales du type

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Une relation de récurrence permet alors d'exprimer I_n en fonction de I_{n-1}, remontant ainsi jusqu'à I_1 qui n'est autre, à une constante près, que la fonction arc tangente. Nous allons éviter dans ce chapitre les fractions rationnelles dont la décomposition contient des éléments simples du type IV.

On montre que toute fraction rationnelle *régulière* et *irréductible*, c.-à-d. une fonction de la forme $P(x)/Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes en x à cooefficients réels, avec $degré(P) < degré(Q)$ et P et Q n'admettant pas de racines communes, peut être mise, et ce *de manière unique*, sous la forme d'une somme d'éléments simples. C'est ce qu'on appelle *la décomposition en éléments simples* de la fraction rationnelle $P(x)/Q(x)$.

Ainsi, intégrer une fraction rationnelle (régulière) revient à intégrer les éléments simples des types I, II, III et IV.

On peut vérifier facilement que

$$\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4}{(x+1)^3} + \frac{Ax+B}{x^2+x+1}$$

où l'on a, en réduisant au même dénominateur et en égalant les numérateurs,

$$A_1 = 2/63, \quad A_2 = 1/9, \quad A_3 = -2/3, \quad A_4 = -1, \quad A = -1/7, \quad B = 4/7$$

On déduit alors

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3(x^2+x+1)}dx &= \frac{2}{63}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&\quad - \int \frac{dx}{(x+1)^3} - \frac{1}{7}\int \frac{x-4}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{2}{63}\ln|x-2| + \frac{1}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{3(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} \\
&\quad - \frac{1}{14}\ln|x^2+x+1| + \frac{3\sqrt{3}}{7}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1))
\end{aligned}$$

Pour calculer les coefficients A_i, on a utilisé la méthode générique qui, certes, marche toujours mais qui n'est pas souvent la plus rapide. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour évaluer ces coefficients, comme par exemple multiplier la décomposition par le terme $(x-2)$ et prendre ensuite $x=2$, ce qui a pour effect d'isoler le coefficient A_1 et de l'évaluer. Cependant, pour calculer les coefficients A et B, il faudrait multiplier par le terme (x^2+x+1) et prendre ensuite x égale à une des *racines complexes* de ce trinôme ...

Remarque 2

La fraction rationnelle décomposée précédement aurait pu être présentée sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+2}{x^6+2x^5-x^4-7x^3-10x^2-7x-2}$$

Ecrire le dénominateur sous la forme factorisée $Q(x) = (x-2)(x+1)^3(x^2+x+1)$ revient alors à chercher toutes les racines réelles du polynôme Q avec leur multiplicité (on les appelle *les pôles* de la fraction rationnelle; ici, on a deux pôles : 2 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 3). On sait que ceci est d'autant plus compliqué que le degré de Q est élevé ...

La commande "convert_parfrac"

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
```

$$> R := \frac{(x^2+2)}{(x^6+2\cdot x^5-x^4-7\cdot x^3-10\cdot x^2-7\cdot x-2)}:$$

$$> \mathit{convert}(R, \mathit{parfrac})$$

$$-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{2}{63\,(x-2)}+\frac{1}{9\,(x+1)}+\frac{1}{7}\,\frac{-x+4}{x^2+x+1}-\frac{2}{3\,(x+1)^2} \qquad (46)$$

$$> \mathit{int}(\%, x)$$

$$\frac{1}{2\,(x+1)^2}+\frac{2}{63}\ln(x-2)+\frac{1}{9}\ln(x+1)-\frac{1}{14}\ln(x^2+x+1)+\frac{3}{7}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\,(2\,x+1)\sqrt{3}\right)+\frac{2}{3\,(x+1)} \qquad (47)$$

$$> R := x/(x-a)\hat{}2:$$

```
> convert(R,parfrac);
Error, (in convert/parfrac) the variable name (for conversion to partial fractions) must be provided
> convert(R,parfrac,x);
```

$$\frac{a}{(x-a)^2}+\frac{1}{x-a} \qquad (48)$$

Prêt C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 29.73M Temps: 22.28s Mode Texte

Complément : Intégrales impropres

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur $]a, b[$, intervalle de longueur finie ou infinie.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite *impropre* pour la borne a (resp. la borne b) lorsqu'on est dans l'une des situations suivantes :

- f n'est pas définie en $a \in \mathbb{R}$ (resp. en $b \in \mathbb{R}$),
- $a = -\infty$ (resp. $b = +\infty$).

Selon cette définition, $\int_a^b f(x)dx$ peut être impropre pour la borne a **et** pour la borne b. Pour simplifier, nous nous limitons à des intégrales qui ne sont impropres que pour une borne. Par ailleurs, pour la variable muette, le choix de t au lieu de x deviendra clair par la suite ...

Exemples

Les intégrales

$$\int_0^1 \ln(t)dt,\ \int_0^1 t\ln(t)dt,\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt,\ \ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt,\ \ \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

sont impropres.

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ est impropre seulement pour la borne a.
Si

$$\lim_{x \longrightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt = l \in \mathbb{R} \ ,$$

on dit que $\int_a^b f(t)dt$ est *convergente* et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = l$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est *divergente*.

Etudier la nature d'une intégrale impropre revient alors à chercher si elle est convergente ou bien divergente. Nous nous limitons à l'étude d'intégrales impropres dont la fonction à intégrer possède une primitive élémentaire.

Etudier la nature de $\int_0^1 \ln(t)dt$.

Cette intégrale est impropre en 0. On cherche alors $\int_x^1 \ln(t)dt$ comme fonction de $x \in]0, 1[$.
Par intégration par parties, on a

$$\int_x^1 \ln(t)dt = x - x\ln(x) - 1$$

Comme

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} (x - x\ln(x) - 1) = -1 \ ,$$

$\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et vaut -1.

Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$.
En cherchant $\int_1^{x} e^{-t}dt$ comme fonction de $x > 0$, on trouve

$$\int_1^x e^{-t}dt = (e^{-1} - e^{-x}) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

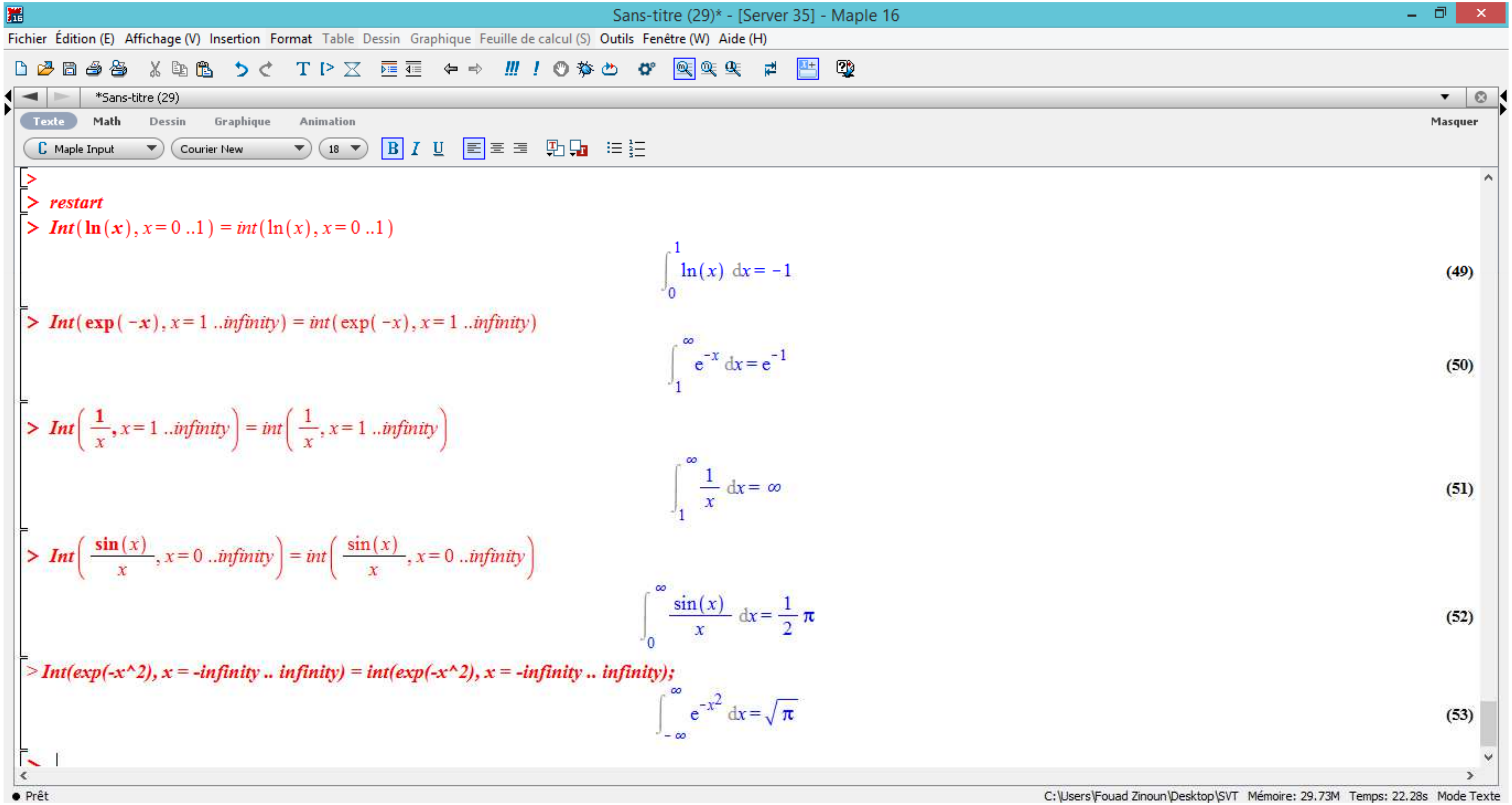
Donc, $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et vaut $1/e$.

Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} dt/t$.
On a, pour tout $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/t$ est alors divergente.

Noter que les deux dernières intégrales sont impropres pour les deux bornes et que l'on ne connait pas de primitive élémentaire aux fonctions à intégrer …



Trouver toutes les fonctions $f(x)$ dont la somme avec leur dérivée seconde est nulle :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) = 0$$

En tâtonnant, on réalise vite que les fonctions $\sin(x)$, $2\cos(x)$, $3\sin(x) - \cos(x)$ et, plus généralement, toute fonction de la forme $k_1 \sin(x)$, $k_2 \cos(x)$ ou encore

$$k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x)$$

satisfont à notre équation quelles que soient les constantes k_1 et k_2; il est facile de s'en assurer en substituant ces fonctions dans l'équation.

Finalement, on réalise qu'il y a une infinité de fonctions vérifiant cette équation.

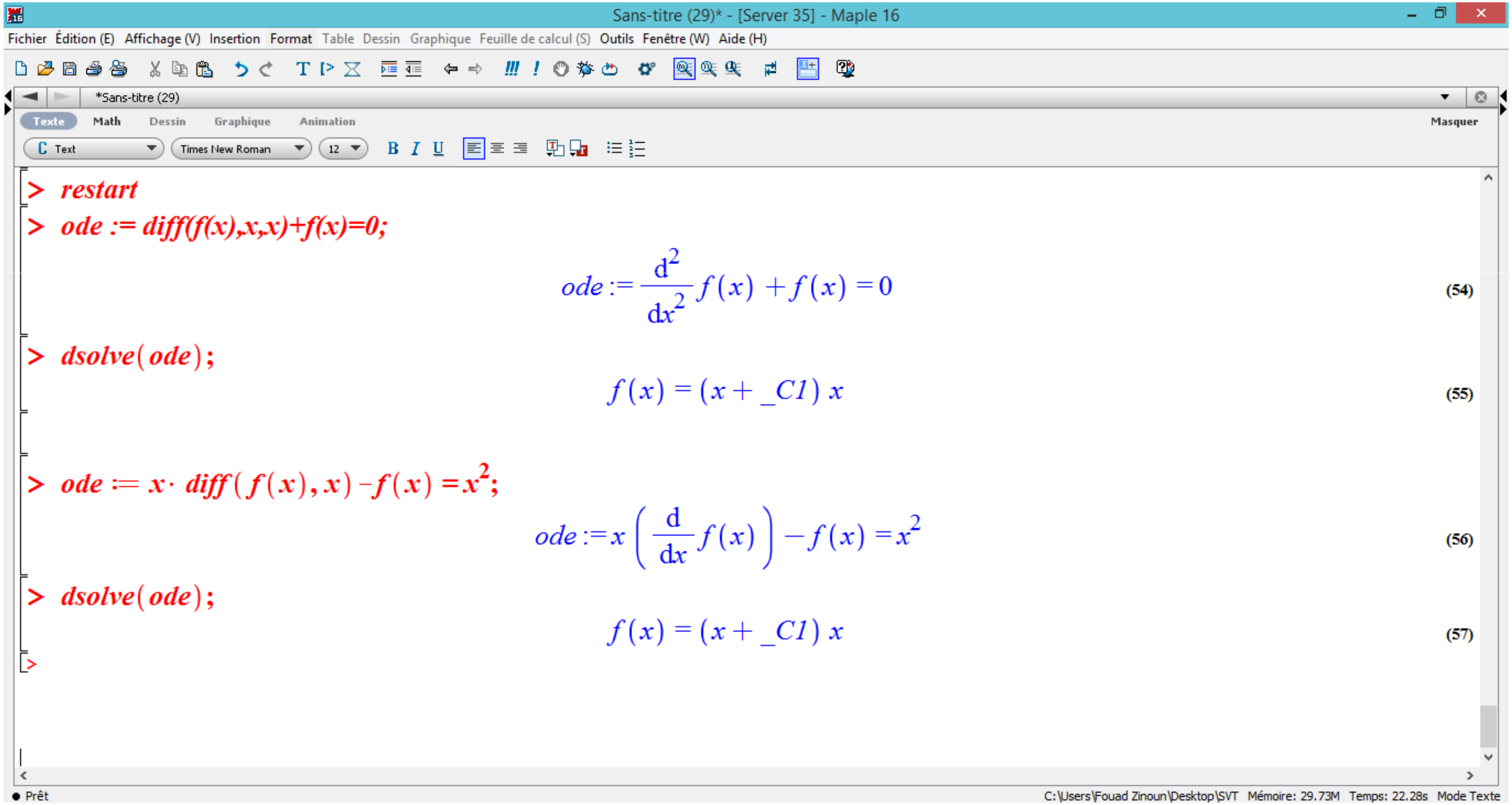
On peut vérifier sans peine que toute fonction de la forme

$$f(x) = x^2 + kx$$

où k est une constante arbitraire, vérifie l'équation

$$x\frac{df(x)}{dx} - f(x) = x^2$$

La commande "dsolve"



On appelle *équation différentielle* une équation établissant une relation entre *la variable indépendante* x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, ce qu'on peut représenter symboliquement par

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation. Ainsi,

$$y' - 2xy^2 + 1 = 0$$

est une équation du premier ordre.
L'équation

$$y'' + ky' - by - \sin(x) = 0$$

est du second ordre.

On appelle *solution* ou *intégrale* d'une équation différentielle toute fonction $y = f(x)$ vérifiant identiquement cette équation.

Résoudre ou *intégrer* une équation différentielle revient alors à chercher *toutes les solutions* de cette équation. Lorsque toutes ces solutions peuvent être mises sous une même forme, on parle de *solution générale* de l'équation différentielle.

En principe, une solution d'une équation différentielle est définie sur un intervalle (ouvert). Ainsi, pour l'équation

$$y' - \frac{1}{x} = 0$$

les fonctions de la forme $\ln(x) + c_1$, où c_1 est une constante arbitraire, sont les solutions de l'équation sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $\ln(-x) + c_2$, où c_2 est une constante arbitraire, sont les solutions de l'équation sur $]-\infty, 0[$. Pour simplifier, bien que ceci ne soit pas tout à fait correcte, nous dirons que $\ln|x| + c$, où c est une constante arbitraire, est la solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}^*$.

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F(x, y, y') = 0$$

Lorsque cela est possible, on peut mettre l'équation sous la forme

$$y' = f(x, y)$$

Et l'on montre que si la fonction f est "suffisamment *régulière*" sur un domaine D du plan Oxy, pour tout point $(x_0, y_0) \in D$, il existe *une et une seule* solution de l'équation vérifiant

$$y(x_0) = y_0$$

y est alors la *solution particulière* de l'équation vérifiant la *condition initiale* $y(x_0) = y_0$.

Ce sont les équations différentielles du type

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

Comme exemple, l'équation pour $x \neq 1$,

$$y' = \frac{x}{x-1} y$$

est à variables séparées. Pour chercher sa solution générale, on l'écrit sous la forme, pour $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x-1} dx$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|y| = \int \frac{xdx}{x-1} = \int (1 + \frac{1}{x-1})dx = x + \ln|x-1| + c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$|y| = e^c e^x |x-1|$$

D'où la solution générale

$$y = \pm e^c (x-1)e^x = k(x-1)e^x,\ \ k \in \mathbb{R}^*$$

Pour récupérer la solution nulle, qui correspond à $k = 0$, en prend k une constante arbitraire dans $\mathbb{R}$ tout entier.

Ce sont les équations différentielles qui sont linéaires par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée, c.-à-d. de la forme :

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

où P et Q sont en général des fonctions continues de x.

On montre que la solution générale est la somme de la solution générale de *l'équation homogène* (ou encore *équation sans second membre*) associée

$$y' + P(x)y = 0$$

et d'*une solution particulière quelconque* de l'équation complète, c.-à-d. de *l'équation avec second membre.*

Remarquer que l'équation homogène est une équation à variables séparées. Ainsi, pour $y \neq 0$, elle s'écrit

$$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

En intégrant, et en adoptant la même démarche que précédement, on obtient

$$\ln|y| = -\int P(x)dx$$

ce qui donne la solution générale

$$\overline{y} = ke^{-\int P(x)dx}, \;\; k \in \mathbb{R}$$

Remarquer que $y = 0$ est toujours solution de l'équation homogène.

On cherche une solution particulière de notre équation

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

sous la forme

$$y^* = k(x)e^{-\int P(x)dx}$$

où, cette fois-ci, k n'est plus une constante mais une fonction de x. En injectant y^* dans l'équation, on a

$$y^{*\prime} + P(x)y^* = Q(x)$$

ou encore

$$\left(k(x)e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)k(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

ce qui donne

$$k'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)k(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)k(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Après simplification, on obtient

$$k'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

et par intégration

$$k(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

D'où une solution particulière donnée sous la forme

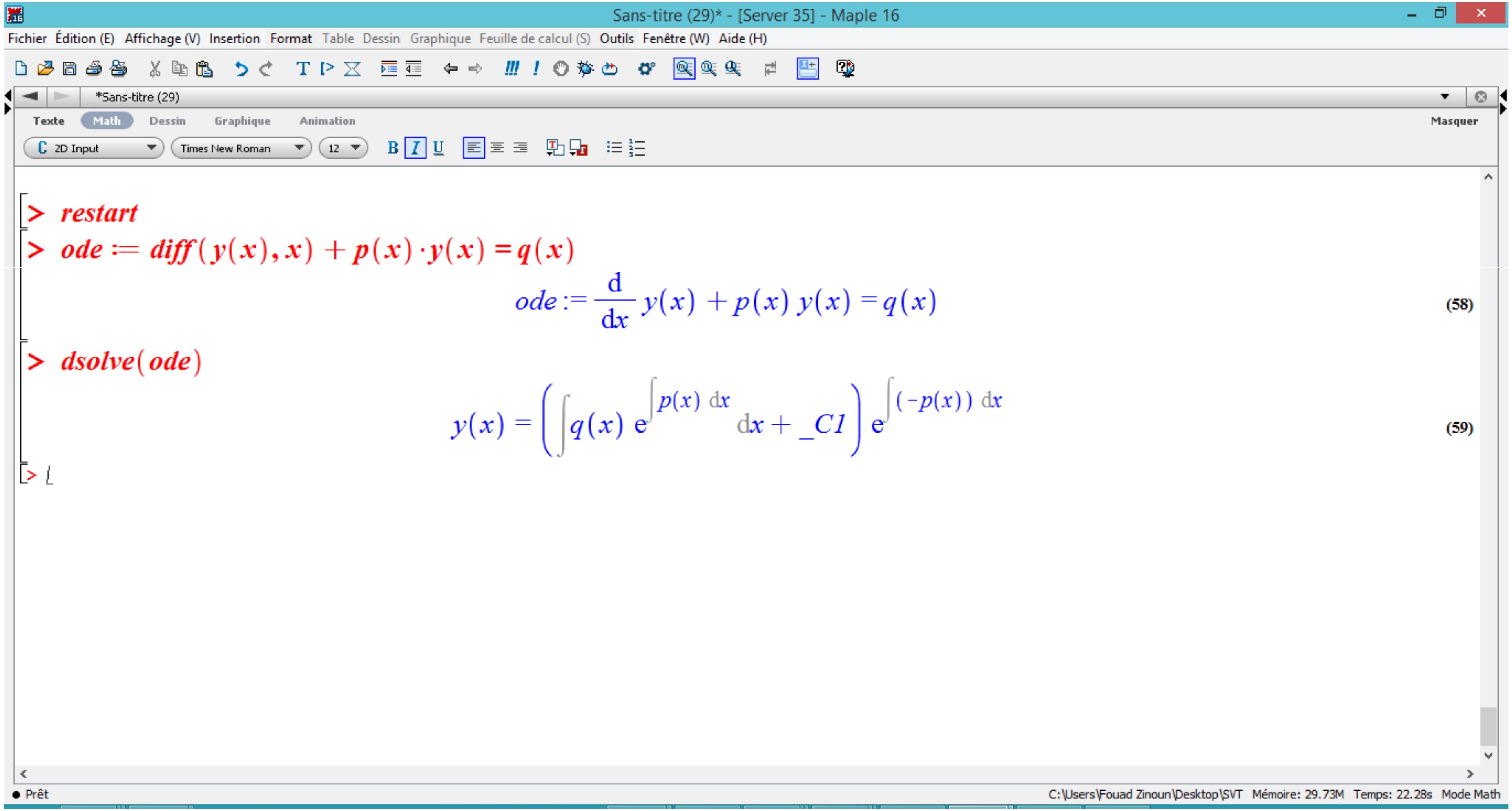
$$y^* = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

…

La solution générale de notre problème est alors la somme de la solution générale $\overline{y}$ de l'équation homogène et d'une solution particulière y^* :

$$y = \overline{y} + y^* = (k + k(x))e^{-\int P(x)dx}, \; k \in \mathbb{R}$$

Formellement avec Maple ..



Soit à résoudre l'équation linéaire du premier ordre suivante

$$y' - 3y = e^x$$

Cherchons la solution générale de l'équation homogène

$$y' - 3y = 0$$

Par séparation des variables, on a pour $y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = 3$$

Et par intégration

$$\ln|y| = 3x + c, \;\; c \in \mathbb{R}$$

D'où

$$|y| = e^{3x+c}$$

obtenant ainsi la solution générale

$$\overline{y} = \pm e^c e^{3x} = ke^{3x}, \;\; k \in \mathbb{R}$$

où on a pris $k \in \mathbb{R}$ pour récupérer la solution nulle.

…

Cherchons une solution particulière de notre équation avec second membre en faisant varier la constante arbitraire k, c.-à-d. une solution de la forme

$$y^* = k(x)e^{3x}$$

En injectant y^* dans l'équation complète, on a

$$(k(x)e^{3x})' - 3k(x)e^{3x} = e^x$$

ce qui donne

$$k'(x)e^{3x} + 3k(x)e^{3x} - 3k(x)e^{3x} = e^x$$

Après simplification, on obtient

$$k'(x) = e^{-2x}$$

D'où, par intégration,

$$k(x) = -\frac{e^{-2x}}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

On peut alors considérer la solution particulière

$$y^* = -\frac{e^{-2x}}{2}e^{3x} = -\frac{e^x}{2}$$

où on a pris $c = 0$.
La solution générale du problème est alors donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$y = \overline{y} + y^* = ke^{3x} - \frac{e^x}{2}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1+x^2)y' - 2y = e^{2\arctan x}, \;\; x \in \mathbb{R}$$

$$(x^2+3x+2)y' - xy = (x+2)^2, \;\; x \in]-1,+\infty[$$

Solution Maple

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
> ode := (1 + x^2) · diff(y(x), x) − 2·y(x) = exp(2·arctan(x))
```

$$ode := \left(1 + x^2\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 2\,y(x) = e^{2\arctan(x)} \quad (60)$$

```
> dsolve(ode)
```

$$y(x) = \left(\arctan(x) + \_C1\right) e^{2\arctan(x)} \quad (61)$$

```
> ode := (x^2 + 3·x + 2) · diff(y(x), x) − x·y(x) = (x + 2)^2
```

$$ode := \left(x^2 + 3\,x + 2\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - x\,y(x) = (x + 2)^2 \quad (62)$$

```
> dsolve(ode)
```

$$y(x) = \left(\ln(x + 2) + \_C1\right)\left(\frac{x^2}{x + 1} + \frac{4\,x}{x + 1} + \frac{4}{x + 1}\right) \quad (63)$$

```
> factor(%)
```

$$y(x) = \frac{\left(\ln(x + 2) + \_C1\right)(x + 2)^2}{x + 1} \quad (64)$$

Prêt C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 29.73M Temps: 22.28s Mode Math

C'est une équation non linéaire, du premier ordre, de la forme

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \; n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$$

où P et Q sont en général des fonctions continues de x.

On montre que, par un changement de variable adéquat, l'équation de Bernoulli se ramène à une équation linéaire du premier ordre. En fait, ...

Divisant tous les termes de l'équation par y^n, $y \neq 0$, on obtient

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (*)$$

Effectuant alors le changement de variable

$$z := y^{1-n}$$

on a

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

Et en substituant dans l'équation $(*)$, on obtient

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

C'est une équation linéaire en z qu'on sait résoudre.

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
> assume(n > 1)
> ode := diff(y(x), x) + p(x)·y(x) = q(x)·y(x)^n
```

$$ode := \frac{d}{dx}\, y(x) + p(x)\, y(x) = q(x)\, y(x)^{n\sim} \qquad (65)$$

```
> dsolve(ode)
```

$$y(x) = \frac{e^{\frac{\int p(x)\, dx}{n\sim - 1}}}{\left(\int \frac{e^{\int p(x)\, dx}\, q(x)}{e^{\left(\int p(x)\, dx\right) n\sim}}\, dx - n\sim \left(\int \frac{e^{\int p(x)\, dx}\, q(x)}{e^{\left(\int p(x)\, dx\right) n\sim}}\, dx \right) + \_C1 \right)^{\frac{1}{n\sim - 1}} e^{\frac{\left(\int p(x)\, dx\right) n\sim}{n\sim - 1}}} \qquad (66)$$

```
> simplify(%)
```

$$y(x) = e^{-\left(\int p(x)\, dx\right)} \left(\int q(x)\, e^{-\left(\int p(x)\, dx\right)(n\sim - 1)}\, dx - n\sim \left(\int q(x)\, e^{-\left(\int p(x)\, dx\right)(n\sim - 1)}\, dx \right) + \_C1 \right)^{-\frac{1}{n\sim - 1}} \qquad (67)$$

Prêt   C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT   Mémoire: 31.94M   Temps: 30.84s   Mode Math

Exemple

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y' + y = xy^2$$

C'est une équation de Bernoulli avec $P(x) = 1$, $Q(x) = x$ et $n = 2$.

Divisant par y^2, $y \neq 0$, on obtient

$$y^{-2}y' + y^{-1} = x$$

En posant ensuite, $z := 1/y$, on a

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

D'où l'équation linéaire en z

$$z' - z = -x$$

dont on montre que la solution générale est donnée par

$$z = ke^x + x + 1, \;\; k \in \mathbb{R}$$

En plus de la fonction nulle, qui est toujours solution de l'équation de Bernoulli, la solution générale de notre problème est donnée par :

$$y = 1/z = \frac{1}{ke^x + x + 1}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Bien entendu, pour un k fixé, la solution n'est définie que sur les domaines où

$$ke^x + x + 1 \neq 0$$

En étudiant la fonction $k(x) = -(x+1)e^{-x}$, on peut remarquer par exemple que les solutions pour lesquelles $k < -1$, sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier …

En dynamique de populations, et en réponse au modèle exponentiel de T.R. Malthus, P.F. Verhulst proposa vers 1840 un modèle où le taux de natalité et celui de mortalité sont des fonctions affines, respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Ceci conduit à la recherche de fonctions y définies sur $[0, +\infty[$, strictement positives et vérifiant l'équation différentielle (de type Bernoulli) suivante :

$$(E) \quad \begin{cases} y' = ry(1 - \frac{y}{K}) \\ y(0) = y_0 \ , \end{cases}$$

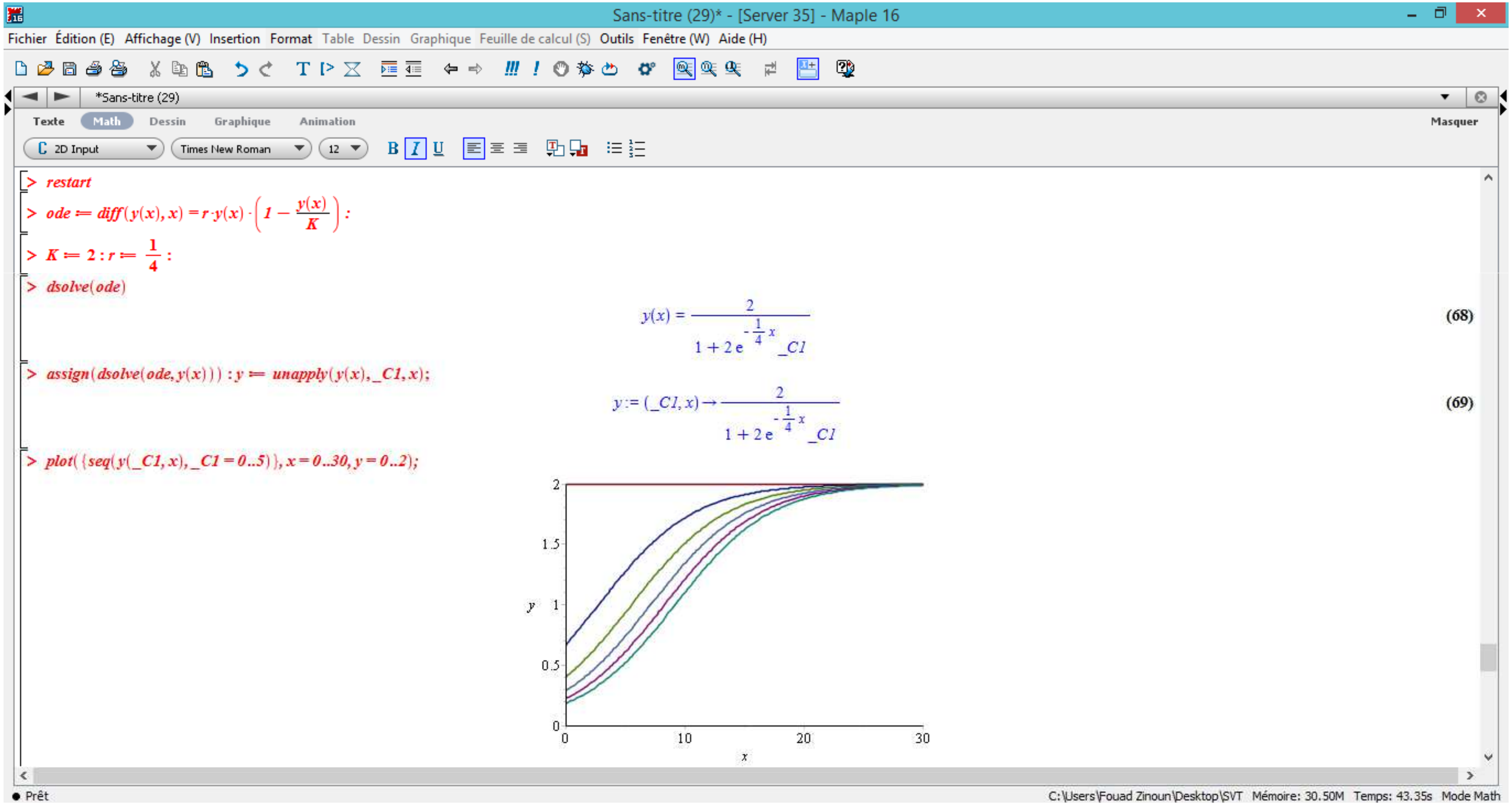
où y_0 est la taille de la population initiale, $r, K > 0$ étant respectivement le taux de reproduction et la capacité d'accueil.

1) Montrer qu'à l'aide du changement de variable $z = 1/y$, $y > 0$, l'équation (E) se ramène à l'équation différentielle linéaire suivante :

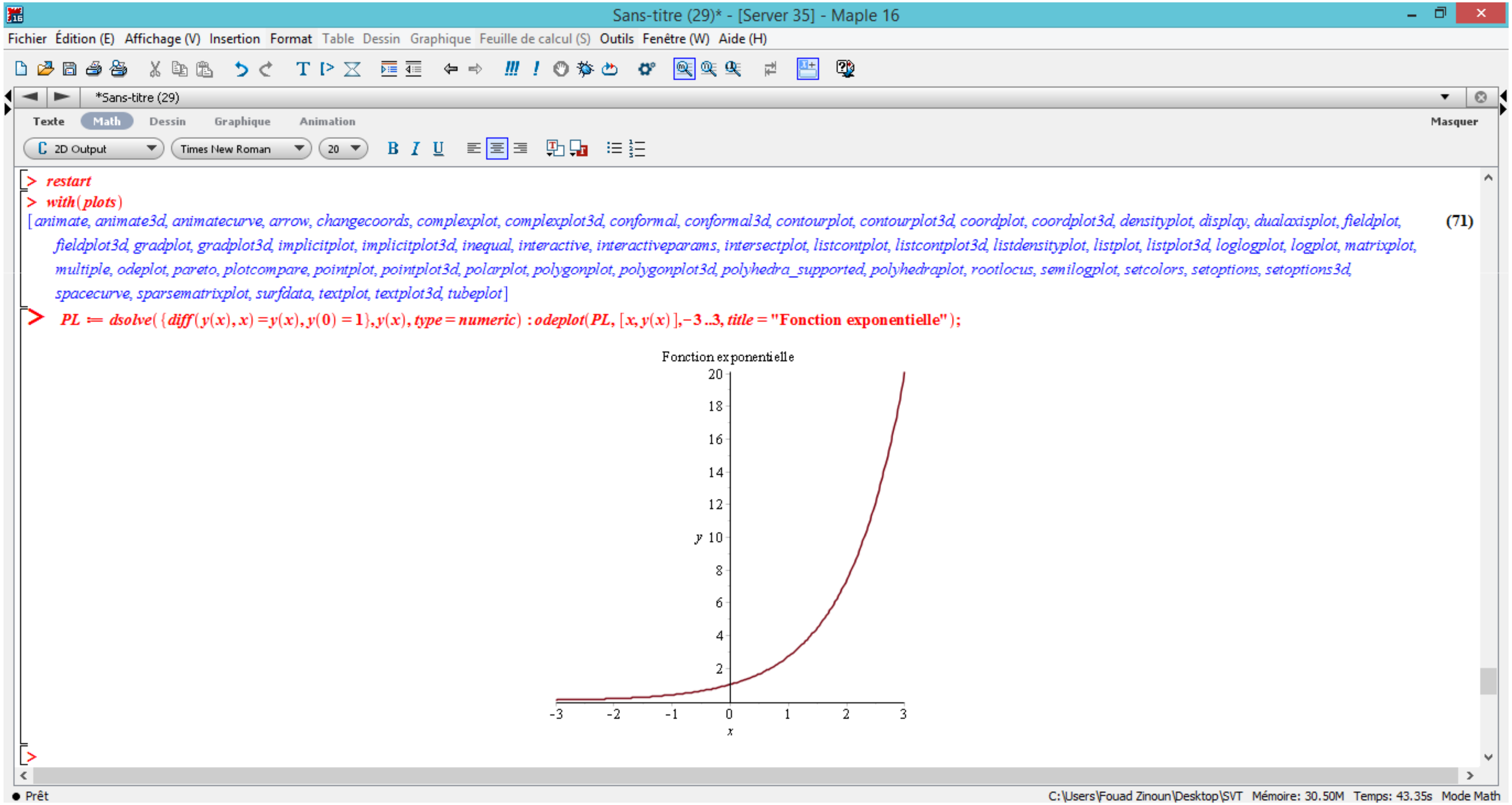
$$(F) \qquad \begin{cases} z' = -r(z - 1/K) \\ z(0) = 1/y_0 \end{cases}$$

2) Résoudre l'équation (F) et en déduite la solution y de l'équation (E).
3) Vérifier que y est bien définie et positive sur $[0, +\infty[$.
4) Montrer que y est croissante pour $y_0 < K$, décroissante pour $y_0 > K$ et constante pour $y_0 = K$.
5) Représenter dans un même repère les trajectoires correspondant respectivement à la solution de (E) et celle de l'équation $y' = ry$, $y(0) = y_0$, pour $r = 1/4$, $K = 2$ et $y_0 = 1$.

Tracé d'une famille de solutions paramétrée par la constante arbitraire



Résolution numérique et tracé de la solution d'une équation différentielle : Exemple de la fonction exponentielle avec la commande "odeplot"



C'est une équation non linéaire, du premier ordre, de la forme

$$Y' = p_0(x) + p_1(x)Y + p_2(x)Y^2$$

où p_0, p_1 et p_2 sont en général des fonctions continues de x.

De manière générale, on ne peut résoudre analytiquement ces équations, à moins que l'on connaisse une solution particulière. En fait, si Y^* est une solution particulière, ...

On pose

$$y = Y - Y^*$$

et en remplaçant $Y = y + Y^*$ dans l'équation de Riccati, on a

$$y' + Y^{*\prime} = p_0 + p_1(y + Y^*) + p_2(y + Y^*)^2$$

Et comme

$$Y^{*\prime} = p_0 + p_1 Y^* + p_2 Y^{*2}$$

on obtient l'équation en y

$$y' = p_1 y + p_2(y^2 + 2yY^*)$$

ou encore

$$y' - (p_1 + 2p_2 Y^*)y = p_2 y^2$$

qui est bien une équation de Bernoulli.

Soit à résoudre l'équation de Riccati suivante :

$$Y' = x^3 + x + 1 - (2x^2 + 1)Y + xY^2$$

On remarque que $Y^* = x$ est une solution simple de l'équation. En effectuant alors le changement $Y = y + x$, on aboutit à l'équation de Bernoulli

$$y' + y = xy^2$$

dont on a déjà cherché la solution générale

$$y = \frac{1}{ke^x + x + 1}, \quad k \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation de Riccati est alors donnée par

$$Y = \frac{1}{ke^x + x + 1} + x, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ce sont les équations différentielles qui sont linéaires par rapport à la fonction inconnue, sa dérivée première et sa dérivée seconde, c.-à-d. de la forme :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

où p, q et f sont en général des fonctions continues de x.

On montre que la solution générale est la somme de la solution générale de *l'équation homogène* (ou encore *équation sans second membre*) associée

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

et d'*une solution particulière quelconque* de l'équation complète, c.-à-d. de *l'équation avec second membre.*

À un changement de variable près, on peut vérifier que l'équation homogène se ramène à une équation de Riccati dont on sait que la résolution analytique est généralement impossible, à moins que l'on en connaisse une solution particulière ...

Ce sont les équations différentielles qui sont linéaires par rapport à la fonction inconnue, sa dérivée première et sa dérivée seconde, de la forme :

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

où, cette fois-ci, les coefficients p et q sont des constantes réelles.

La solution générale est alors la somme de la solution générale de *l'équation homogène*

$$y'' + py' + qy = 0$$

et d'*une solution particulière quelconque* de l'équation complète.

Dans la suite, on présentera une méthode systématique pour résoudre analytiquement ces équations pour une large classe de fonctions $f(x)$.

Pour l'équation homogène

$$y'' + py' + qy = 0$$

on considère l'équation caractéristique

$$r^2 + pr + q = 0$$

dont les solutions r_1 et r_2 sont réelles ou complexes conjuguées.
On montre alors que la solution générale est donnée par

$$\begin{cases} \overline{y} = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} & \text{si } r_1 \neq r_2 \text{ sont deux solutions réelles} \\ \overline{y} = e^{rx}(k_1 + k_2 x) & \text{si } r_1 = r_2 = r \text{ est une solution double} \\ \overline{y} = e^{r_1 x}(k_1 \cos(r_2 x) + k_2 \sin(r_2 x)) & \text{si } r_1 \pm i r_2 \text{ sont deux solutions complexes} \end{cases}$$

k_1 et k_2 étant des constantes réelles arbitraires.

Sans faire varier les constantes k_1 et k_2, on montre que l'on peut chercher une solution particulière de l'équation complète dans le cas où le second membre $f(x)$ est donné sous la forme (assez générale) suivante :

$$f(x) = e^{\alpha x}(U(x)\cos(\beta x) + V(x)\sin(\beta x))$$

α, β étant des réels et U, V des polynômes dont on note les degrés respectifs d_1 et d_2.

On cherche alors une solution particulière de la forme

$$\begin{cases} y^* = e^{\alpha x}(U(x)\cos(\beta x) + V(x)\sin(\beta x)) & \text{si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas solution de l'éq. caractéristique} \\ y^* = xe^{\alpha x}(U(x)\cos(\beta x) + V(x)\sin(\beta x)) & \text{si } \alpha + i\beta \text{ est solution de l'éq. caractéristique} \\ y^* = x^2 e^{\alpha x} U(x) & \text{si } \beta = 0 \text{ et } \alpha \text{ est solution double de l'eq. caractéristique} \end{cases}$$

où l'on a $\mathit{degré}(U) = \mathit{degré}(V) = \max\{d_1, d_2\}$.

Soit à résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est donnée par

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Comme ses solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, la solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$\overline{y} = k_1 e^x + k_2 e^{2x}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{R}$$

...

Pour chercher une solution particulière de l'équation complète, remarquons que le second membre est de la forme

$$xe^{3x} = e^{\alpha x}(U(x)\cos(\beta x) + V(x)\sin(\beta x))$$

où $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $U(x) = x$ et où on peut prendre $V(x) = 0$.

...

Comme $\alpha+i\beta = 3$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme

$$y^* = U(x)e^{3x}$$

où U est un polynôme de degré 1, c.-à-d. une solution de la forme

$$y^* = (ax+b)e^{3x}$$

Injectant y^* dans l'équation complète,

$$((ax+b)e^{3x})'' - 3((ax+b)e^{3x})' + 2(ax+b)e^{3x} = xe^{3x}$$

on obtient

$$(2ax+3a+2b)e^{3x} = xe^{3x},\ \ x \in \mathbb{R}$$

Et par identification des coefficients, on est mené au système à deux inconnus

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit $a = 1/2$, $b = -3/4$ et la solution particulière

$$y^* = \frac{(2x-3)}{4} e^{3x}$$

La solution générale de notre problème est alors donnée par

$$y = \overline{y} + y^* = k_1 e^x + k_2 e^{2x} + \frac{(2x-3)}{4} e^{3x}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Solution à conditions initiales

Sans-titre (29)* - [Server 35] - Maple 16

```
> restart
> ode := diff(y(x), x, x) - 3·diff(y(x), x) + 2·y(x) = x·exp(3·x)
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) - 3\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\,y(x) = x\,e^{3\,x} \qquad (70)$$

```
> dsolve(ode)
```

$$y(x) = \left(-\frac{3}{4}\left(e^{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{x}\right)^2 x + e^{x}\,\_C1 + \_C2\right) e^{x} \qquad (71)$$

```
> ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0
```

$$ics := y(0) = 1,\ D(y)(0) = 0 \qquad (72)$$

```
> dsolve({ode, ics})
```

$$y(x) = \left(-\frac{3}{4}\left(e^{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{x}\right)^2 x + \frac{7}{4}\right) e^{x} \qquad (73)$$

```
>
```

Et pourtant .. pour le futur biologiste, un petit conseil :
Ne pas s'acharner à résoudre analytiquement des équations différentielles !

Lorsqu'on se heurte à la résolution analytique d'équations différentielles, comme par exemple les équations du second ordre à coefficients variables, pourtant linéaires, on réalise à quel point on est impuissant face au problème général de résolution d'équations différentielles. En réalité, on ne peut résoudre par quadratures (c.-à-d. en se ramenant à la recherche de primitives) qu'une toute petite classe d'équations différentielles, comparée à l'ensemble d'équations que l'on peut rencontrer dans la vie. Aussi pessimiste ce constat puisse-t-il paraître, la question suivante se pose : a-t-on vraiment besoin de solutions exactes d'équations différentielles? L'expérience a en fait montré que l'on peut souvent répondre par la négative. Sans s'étendre sur le sujet, on peut dire que bien souvent, on s'est largement contenté de méthodes numériques qui, bien qu'approximatives, tiennent lieu de puissants outils pour l'étude de telles équations, et ce depuis les premiers schémas de Léonard Euler jusqu'aux processus les plus élaborés utilisés aujourd'hui, et simulés sur ordinateur. Mieux, la théorie qualitative des équations différentielles, chère au biologiste, et qui a été développée par Henri Poincaré dans sa thèse il y a plus d'un sciècle, a complètement révolutionné notre vision quant à l'étude des équations différentielles, à tel point qu'elle nous a fait presque oublier le souci de construire analytiquement (voire numériquement) des solutions à ces équations ..

Quelques exercices

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 (x^5+3x^2+3)dx$ 2) $\int_1^2 (x^{1/3}+4x^{1/2})dx$ 3) $\int_{-\pi}^0 \cos(x)dx$ 4) $\int_{-2}^1 e^x dx$ 5) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Exercice 2.
Calculer par parties les intégrales suivantes :

1) $\int_0^\pi x\cos(x)dx$ 2) $\int_1^2 x^2e^x dx$ 3) $\int_1^2 x^2\ln(2x)dx$ 4) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 dx$ 5) $\int_0^\pi e^x \sin(x)dx$

Exercice 3.
On veut chercher une primitive sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{(\cos(x) + x\sin(x))^2}$$

1) Calculer la dérivée par rapport à x de $\frac{1}{\cos(x)+x\sin(x)}$ et de $\frac{x}{\cos(x)}$.
2) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, $\int f(x)dx$.

Exercice 4.
Calculer les intégrales suivantes par la méthode du changement de variable :

1) $\int_0^{\pi/3} \sin(3x)dx$ 2) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\cos(x)dx$ 3) $\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1}dx$

Exercice 5.
Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes et en donner une

primitive :

$$1)\ \frac{1}{x^2+3x+2} \qquad 2)\ \frac{x}{x^2+3x+2} \qquad 3)\ \frac{x}{(x^2+3x+2)^2} \qquad 4)\ \frac{1}{x^3-1}$$

Exercice 6.

243 1) Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$, où $y' := dy/dx$ et $y'' := d^2y/dx^2$:

1) $(x-1)y' - xy = 0$ 2) $y' - 3y = e^x$ 3) $y' + y = xy^2$ 4) $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$

2) Pour quelles valeurs des constantes a et b la fonction $y(x) = x^4e^{2x}$ est-elle une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' - ay = bx^3e^{2x}$$

Exercice 7.

1) Vérifier que la fonction $x(t) = sin(t)$ est une solution sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$$

2) Vérifier que les deux fonctions constantes $x(t) = 1$ et $x(t) = -1$ sont des solutions évidentes de (E) sur $\mathbb{R}$.

3) Représenter les trajectoires des trois solutions dans un même repère.

4) Est-il possible de prolonger la solution $x(t) = \sin(t)$ aux bornes $-\pi/2$ et $\pi/2$?

5) Existe-t-il une solution de (E) vérifiant la condition initiale $x(0) = 2$?

6) Par séparation des variables, trouver la solution x_α vérifiant la condition initiale $x(0) = \alpha$, où $\alpha \in [-1, 1]$.

7) A quel α correspond la solution $x(t) = \sin(t)$?

8) Représenter dans un même repère les trajectoires correspondant aux solutions $x_1, x_{\sqrt{2}/2}, x_0, x_{-\sqrt{2}/2}$ et x_{-1}.

Exercice 8. *(Modèle de Verhulst)*
En dynamique de populations, et en réponse au modèle exponentiel de T.R. Malthus, P.F. Verhulst proposa vers 1840 un modèle où le taux de natalité et celui de mortalité sont des fonctions affines, respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Ceci conduit à la recherche de fonctions y définies sur $[0,+\infty[$, strictement positives et vérifiant l'équation différentielle (de type Bernoulli) suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = ry(1-\frac{y}{K}) \\ y(0) = y_0 \ , \end{cases}$$

où y_0 est la taille de la population initiale, $r, K > 0$ étant respectivement le taux de reproduction et la capacité d'accueil.

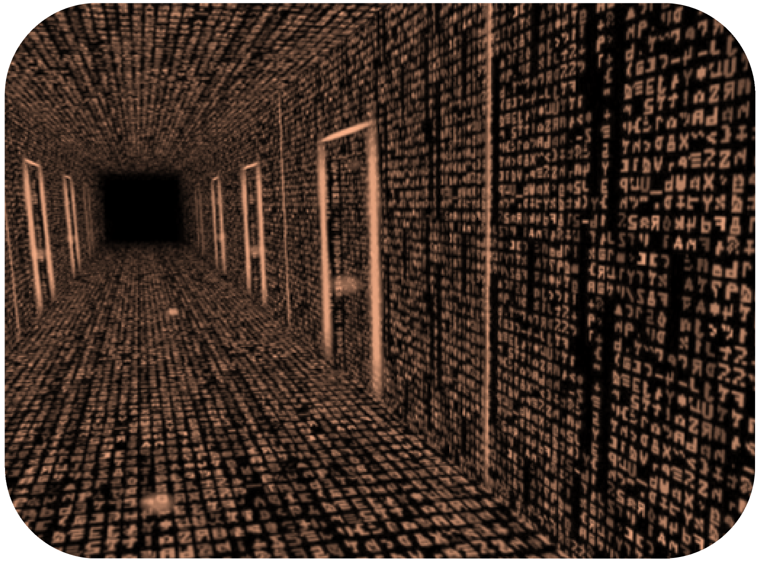
1) Montrer qu'à l'aide du changement de variable $z = 1/y$, $y > 0$, l'équation (E) se ramène à l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(F) \qquad \begin{cases} z' = -r(z - 1/K) \\ z(0) = 1/y_0 \end{cases}$$

2) Résoudre l'équation (F) et en déduite la solution y de l'équation (E).
3) Vérifier que y est bien définie et positive sur $[0,+\infty[$.
4) Montrer que y est croissante pour $y_0 < K$, décroissante pour $y_0 > K$ et constante pour $y_0 = K$.
5) Représenter dans un même repère les trajectoires correspondant respectivement à la solution de (E) et celle de l'équation $y' = ry$, $y(0) = y_0$, pour $r = 1/4$, $K = 2$ et $y_0 = 1$.

Chapitre 4

Introduction à l’algèbre linéaire matricielle



Notion de matrice

Définition

Une *matrice* à m lignes et n colonnes est un tableau rectangulaire de mn nombres, rangés en m lignes et n colonnes. Ces nombres sont appelés *coefficients* de la matrice.

Une *matrice* à m lignes et n colonnes est dite de *dimension* (ou de *type*) $m \times n$ (lire "m croix n", ou tout simplement "m n", en respectant l'ordre de lecture; on ne calcule pas la valeur de ce produit).

Une matrice est symbolisée par une lettre en caractère majuscule, par exemple A. On note alors a_{ij} le coefficient situé à "l'intersection" de la $i-ème$ ligne et la $j-ème$ colonne de A, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, et l'on écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On peut représenter la pluviométrie en millimètre, durant un mois précis, de deux régions de trois villes chacune, par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 30 \\ 153 & 71 \\ 82 & 45 \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension 3×2, et l'on a par exemple $a_{12} = 30$, $a_{22} = 71$, $a_{31} = 82$.

Durant le mois en question, le taux de précipitations pour la deuxième ville de la première région est alors de 153 mm.

...

Les notes sur vingt obtenues par un étudiant dans quatre disciplines peuvent être présentées sous forme de matrice de dimension 1×4 :

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \end{pmatrix}$$

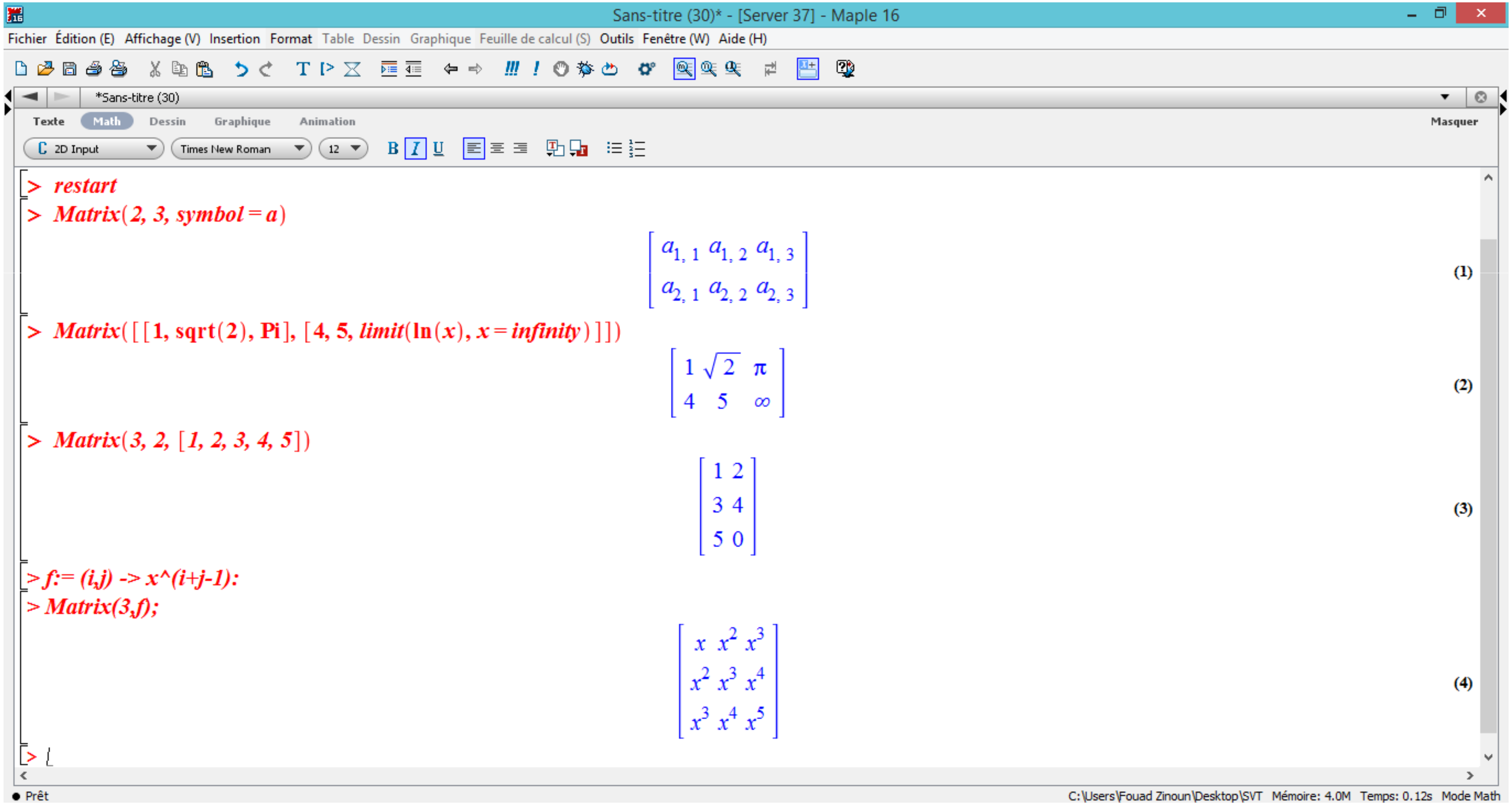
On dit que B est un *vecteur-ligne*.

Le prix en dirham d'un pain au chocolat et celui d'un croissant dans deux boulangeries concurrentes peuvent être représentés par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4,2 \\ 3,8 & 3,6 \end{pmatrix}$$

Elle est de dimension 2×2. On dit que C est une *matrice carrée d'ordre* 2. Le prix d'un croissant chez le premier boulanger est alors de 3 dirhams, 80 centimes.

Quelques exemples de déclaration de matrices sur Maple



La matrice *transposée* de A, notée A^T, est obtenue en "convertissant ses lignes en colonnes". Plus précisément, la valeur du coefficient a_{ij} de A est affectée au coefficient a^T_{ji} de A^T.

Si A est de dimension $m \times n$, A^T est alors de dimension $n \times m$.

Dans le premier exemple, la pluviométrie pouvait aussi être représentée par la matrice de dimension 2×3

$$A^T = \begin{pmatrix} 101 & 30 \\ 153 & 71 \\ 82 & 45 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 101 & 153 & 82 \\ 30 & 71 & 45 \end{pmatrix}$$

Remarquer qu'en général, et contrairement à ce qu'on pourrait croire, A^T ne s'obtient pas à partir de A par une simple rotation de $90°$!

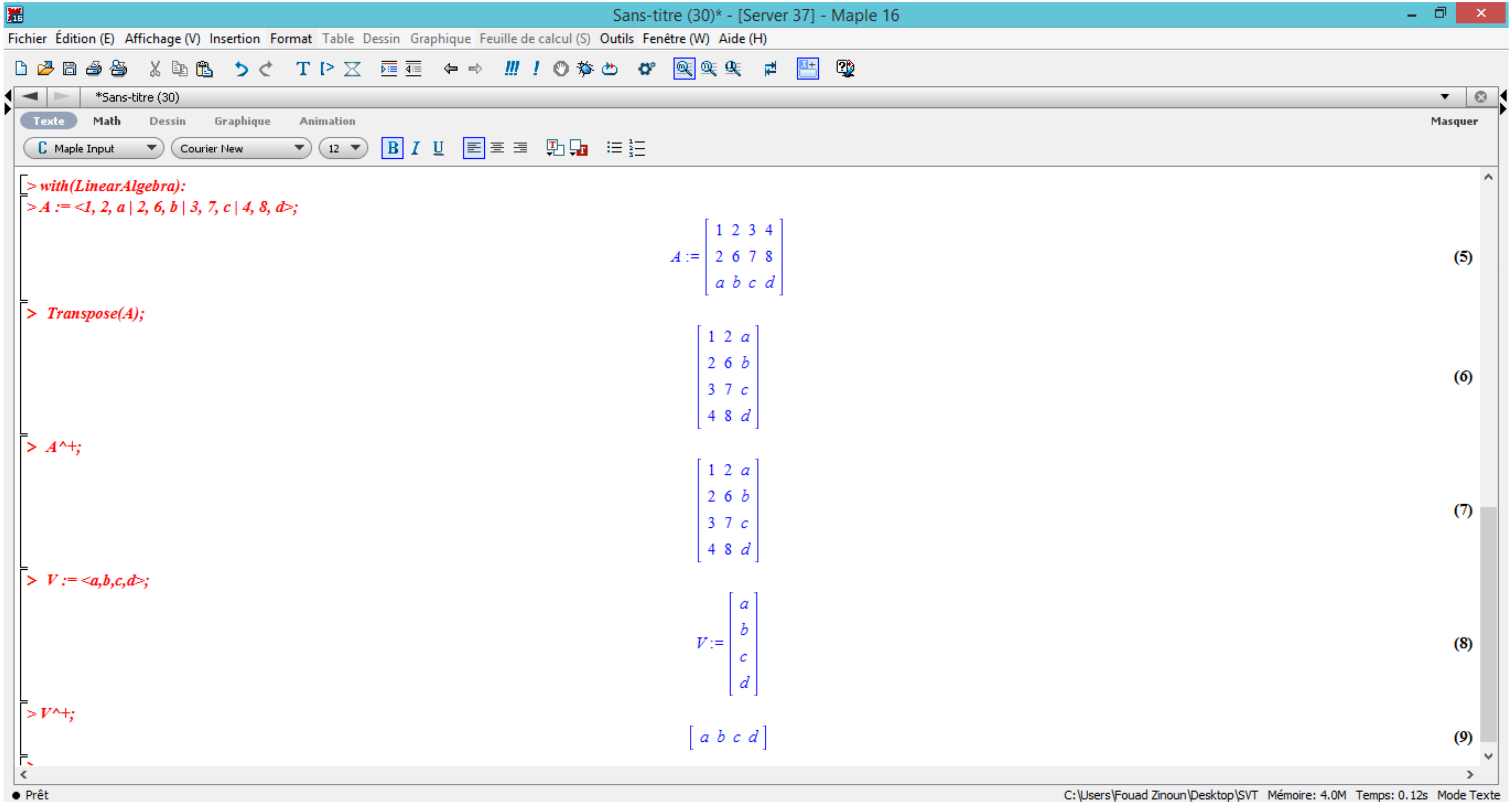
...

Les notes obtenues par l'étudiant peuvent aussi se présenter sous la forme d'une matrice de dimension 4×1 :

$$B^T = \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 12,5 \\ 8,5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

On dit que B^T est un *vecteur-colonne*.

Autres exemples
de déclaration de matrices ou de vecteurs avec calcul du transposé



Deux matrices A et B, de même dimension $m \times n$, sont *égales* si $a_{ij} = b_{ij}$, pour tout $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ainsi, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln 1 & -6/12 \\ 2/4 & \sqrt{9} & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 4 & 4,2 \\ 3,8 & 3,6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 3,8 \\ 4,2 & 3,6 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 \\ 12,5 \\ 8,5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

La pluviométrie en millimètre, durant deux mois consécutifs, des six villes réparties en deux régions, est donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 101+90 & 30+25 \\ 153+120 & 71+52 \\ 82+75 & 45+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 191 & 55 \\ 273 & 123 \\ 157 & 77 \end{pmatrix}$$

ce qui peut s'écrire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 101 & 30 \\ 153 & 71 \\ 82 & 45 \end{pmatrix}}_{précipitations\ durant\ le\ 1^{er}\ mois} + \underbrace{\begin{pmatrix} 90 & 25 \\ 120 & 52 \\ 75 & 32 \end{pmatrix}}_{précipitations\ durant\ le\ 2^{ème}\ mois}$$

…

On appelle *somme* de deux matrices A et B, de même dimension $m \times n$, la matrice S obtenue en additionnant les coefficients situés au même emplacement. En d'autres termes,

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

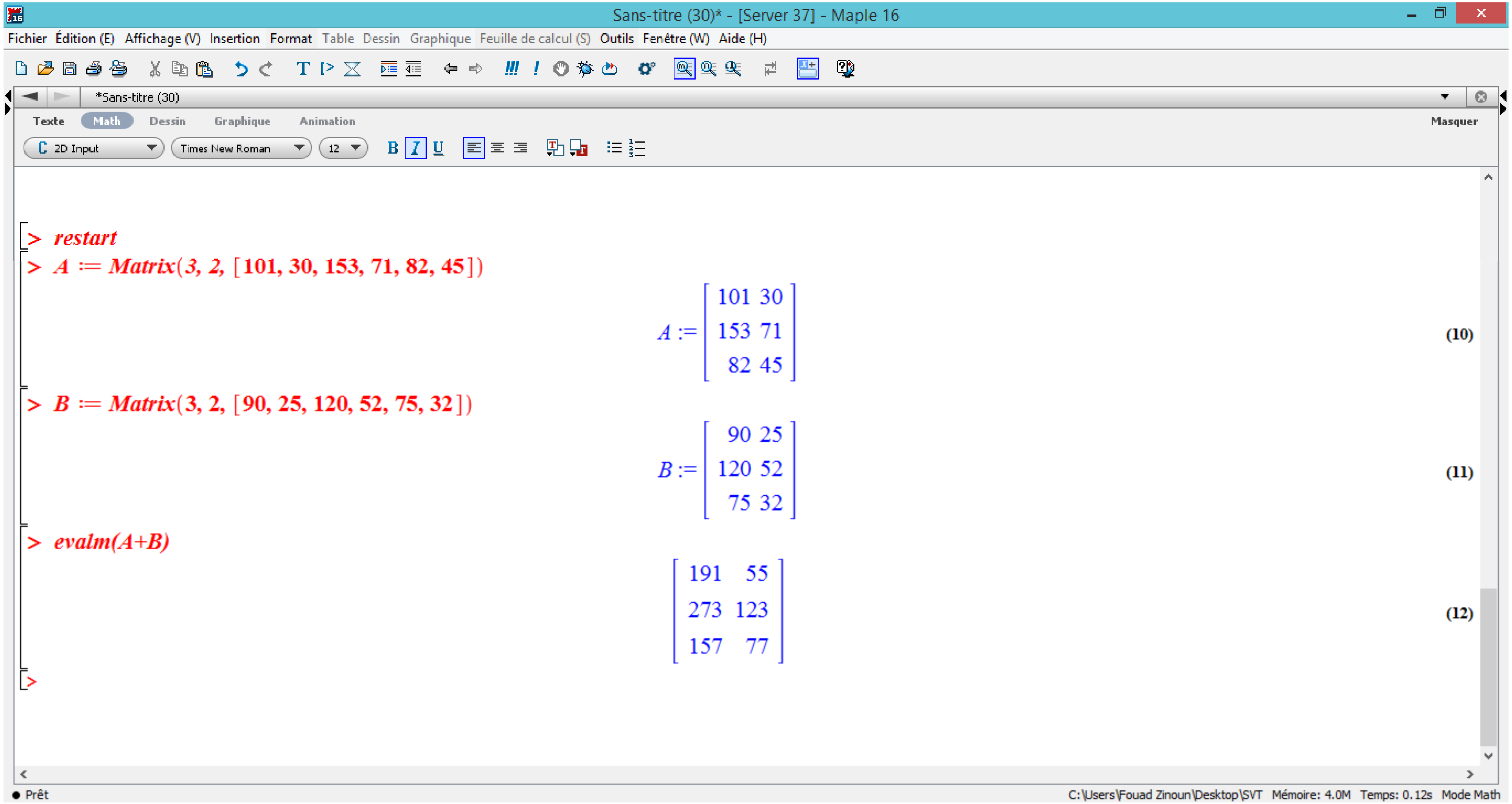
pour tout $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, et l'on écrit $S = A + B$.

On retrouve alors les propriétés habituelles de la somme :

$$A + B = B + A \quad (\textit{commutativité})$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C \quad (\textit{associativité})$$

Sur Maple


Sans-titre (30)* - [Server 37] - Maple 16
Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)
*Sans-titre (30)
Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer
2D Input Times New Roman 12
> restart
> A := Matrix(3, 2, [101, 30, 153, 71, 82, 45])
A := [101 30; 153 71; 82 45] (10)
> B := Matrix(3, 2, [90, 25, 120, 52, 75, 32])
B := [90 25; 120 52; 75 32] (11)
> evalm(A+B)
[191 55; 273 123; 157 77] (12)
>
Prêt
C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.12s Mode Math

Dans le tout premier exemple, la pluviométrie pouvait aussi être mesurée en cm, ce qui peut être représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 101 \times 10^{-1} & 30 \times 10^{-1} \\ 153 \times 10^{-1} & 71 \times 10^{-1} \\ 82 \times 10^{-1} & 45 \times 10^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,1 & 3 \\ 15,3 & 7,1 \\ 8,2 & 4,5 \end{pmatrix}$$

Et l'on écrit

$$A = 0,1 \times \begin{pmatrix} 101 & 30 \\ 153 & 71 \\ 82 & 45 \end{pmatrix}$$

On appelle produit d'une matrice A par un réel k la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k. Cette matrice sera notée $k \times A$, ou tout simplement kA (on positionnera toujours le réel avant la matrice).

On retrouve alors les règles de calcul habituelles :

$$(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A \quad \text{et} \quad k(A + B) = kA + kB$$

La matrice $(-1) \times A$ est notée $-A$ et est appelée *matrice opposée* de A, ce qui permet de définir la *soustraction* de deux matrices :

$$A - B = A + (-B)$$

Une matrice A est dite *nulle* lorsque tous ses coefficients sont nuls, et l'on écrit $A = 0$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

mais

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

On a alors, pour toute matrice A, $A - A = 0$ et $0 \times A = 0$.

Multiplication d'une matrice par un scalaire
Déclaration de la matrice nulle

Sans-titre (30)* - [Server 37] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

*Sans-titre (30)

Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

2D Input Times New Roman 12

> *restart*

> $A := Matrix(3, 2, [101, 30, 153, 71, 82, 45])$

$$A := \begin{bmatrix} 101 & 30 \\ 153 & 71 \\ 82 & 45 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

> $evalm(0.1 \cdot A)$

$$\begin{bmatrix} 10.1000000000000 & 3. \\ 15.3000000000000 & 7.10000000000000 \\ 8.20000000000000 & 4.50000000000000 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

> $Matrix(3, 2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

> $Matrix(2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Prêt C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.12s Mode Math

On considère les notes sur vingt obtenues par l'étudiant en les quatres disciplines, données sous la forme du vecteur-ligne

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \end{pmatrix}$$

On considère aussi les coefficients respectifs des quatres disciplines, donnés sous la forme du vecteur-colonne

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$$

La moyenne des notes est alors donnée par

$$B \times C = \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = 10 \times \frac{1}{6} + 12,5 \times \frac{1}{3} + 8,5 \times \frac{1}{3} + 14 \times \frac{1}{6} = 11$$

$A = (a_1 \; a_2 \; \dots \; a_p)$ étant un vecteur-ligne de dimension $1 \times p$ et $B = (b_1 \; b_2 \; \dots \; b_p)^T$ un vecteur-colonne de dimension $p \times 1$, on appelle *produit* de A et B, et on note $A \times B$ (ou tout simplement AB), le *nombre*

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_p \times b_p$$

Remarquer que pour que ce produit soit possible, il faut que A et B^T soient de même dimension.
Par exemple, le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

n'a aucun sens.

On considère la matrice des notes obtenues par trois étudiants en quatre disciplines

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \\ 6,5 & 10 & 5 & 11,5 \\ 9,5 & 11 & 13 & 14,5 \end{pmatrix}$$

et le vecteur-colonne des coefficients des disciplines

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$$

Le vecteur-colonne des moyennes des notes est alors donné par

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 10 & 12,5 & 8,5 & 14 \\ 6,5 & 10 & 5 & 11,5 \\ 9,5 & 11 & 13 & 14,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \times \frac{1}{6} + 12,5 \times \frac{1}{3} + 8,5 \times \frac{1}{3} + 14 \times \frac{1}{6} \\ 6,5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} + 11,5 \times \frac{1}{6} \\ 9,5 \times \frac{1}{6} + 11 \times \frac{1}{3} + 13 \times \frac{1}{3} + 14,5 \times \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

…

A étant une matrice de dimension $m \times p$ et B un vecteur-colonne de dimension $p \times 1$, on appelle produit de A et B, et on note $A \times B$ (ou tout simplement AB), le vecteur-colonne de dimension $m \times 1$ obtenu en multipliant chaque (vecteur-) ligne de A par le vecteur-colonne B.

Remarquer là encore que ce produit n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Considérons la situation où l'on a une matrice de quantités de biens de consommation

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

et la matrice des prix

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 32,5 & 34 \\ 15 & 14,5 \end{pmatrix}$$

La matrice des prix totaux est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 32,5 & 34 \\ 15 & 14,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \times 20 + 3 \times 32,5 + 5 \times 15 & 9 \times 18 + 3 \times 34 + 5 \times 14,5 \\ 5 \times 20 + 6 \times 32,5 + 4 \times 15 & 5 \times 18 + 6 \times 34 + 4 \times 14,5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 352,5 & 336,5 \\ 355 & 352 \end{pmatrix}$$

A étant une matrice de dimension $m \times p$ et B une matrice de dimension $p \times n$, on appelle produit de A et B, et on note $A \times B$ (ou tout simplement AB), la matrice de dimension $m \times n$ obtenue en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B. Plus précisément, le coefficient situé à la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne du produit AB est obtenu en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B.

Cette opération n'est possible que si A a autant de colonnes que B a de lignes, bien entendu.

Remarque

Contrairement au produit des nombres réels, le produit (lorsqu'il est possible) de deux matrices *non nulles* peut être nul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

De même, si l'on peut toujours calculer les produits AB et BA de deux matrices carrées de même dimension, il n'y a aucune raison pour que la matrice AB soit égale à la matrice BA. En fait,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par contre, avec des dimensions appropriées, les règles habituelles d'associativité et de distributivité restent valables :

$$(AB)C = A(BC) = ABC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

Produit de matrices sur Maple

Sans-titre (30)* - [Server 37] - Maple 16

> restart

> $A := Matrix(2, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6])$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

> $B := Matrix(3, 3, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

> AB=evalm(A&*B)

$$AB = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

> evalm(B&*A)

```
Error, (in linalg:-multiply) non matching dimensions for vector/matrix product
```

> B^2

$$\begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

>

Prêt   C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT   Mémoire: 4.0M   Temps: 0.12s   Mode Math

On a vu qu'une matrice carrée est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes. Elle est donc nécessairement de dimension $n \times n$, et l'on parle alors de matrice carrée d'ordre n.

On appelle *coefficients diagonaux* d'une *matrice* A de dimension $m \times n$ les coefficient a_{ii}, $1 \leq i \leq n$. Les coefficients a_{ij} tels que $i \neq j$ sont non diagonaux.

On appelle alors *matrice identité d'ordre* n, notée I_n, la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à l'unité et les coefficients non diagonaux sont tous nuls :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a

$$AI_n = I_n A = A$$

Pour tout vecteur-colonne X de dimension $n \times 1$, on a

$$I_n X = X$$

Pour tout vecteur-ligne Y de dimension $1 \times n$, on a

$$Y I_n = Y$$

En d'autres termes, la matrice identité est pour la multiplication des matrices ce qu'est le "1" pour la multiplication des nombres.

Une matrice carrée A d'ordre n est dite *inversible* s'il existe une matrice B telle que

$$AB = BA = I_n$$

B est appelée *matrice inverse* de A et l'on note $B = A^{-1}$.

Si A n'est pas inversible, elle est dite *non inversible* ou *singulière*.
(On poura aussi utiliser le terme *non singulière* pour inversible.)

On admet que B, lorsqu'elle existe, est *unique*.

On admet aussi que si $AB = I_n$, alors nécessairement $BA = I_n$.

On a

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = I_2$$

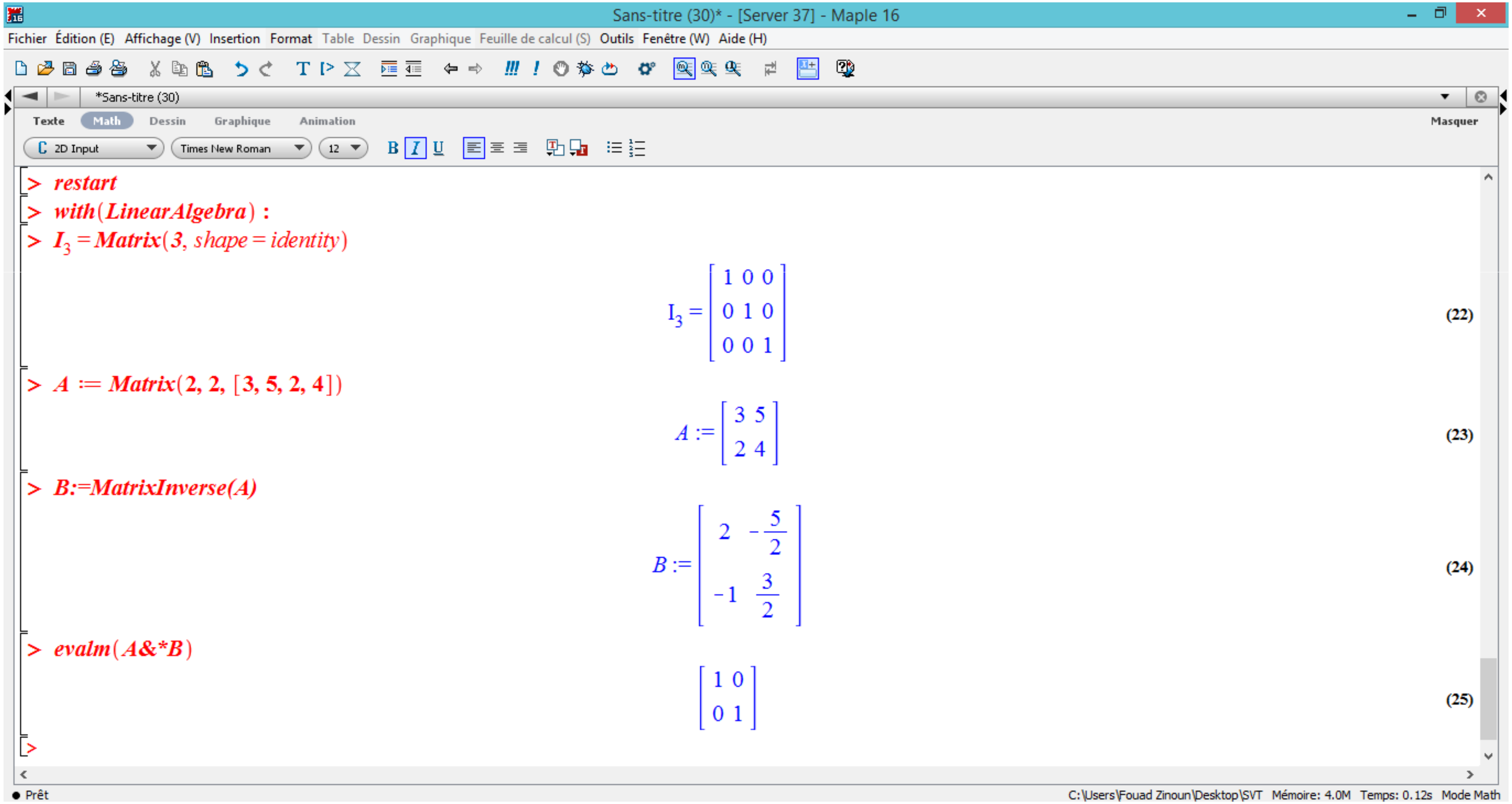
Donc, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible de matrice inverse égale à $\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Mais on a aussi la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ qui est inversible de matrice inverse égale à $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

En fait, si A est inversible, A^{-1} est aussi inversible et l'on a $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

On a aussi, par ailleurs, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour tout A et B inversibles de même dimension.

Déclaration de la matrice identité, inversion de matrices par la commande "MatrixInverse" du package LinearAlgebra



Considérons la situation simple où l'on a des quantités d'achats de produits différents avec la facture des prix totaux, et l'on désire connaître le prix à l'unité de chaque produit. Pour 2 achats de 2 produits, on peut considérer à titre d'exemple le *système linéaire* à 2 inconnus suivant :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 345 \\ 2x + 4y = 253,5 \end{cases}$$

...

En remarquant que ce système peut s'écrire sous la *forme matricielle*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 345 \\ 253,5 \end{pmatrix}$$

et en multipliant (à gauche) les deux membres de cette équation par la matrice inverse, déjà connue, on obtient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 345 \\ 253,5 \end{pmatrix}$$

D'où la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 345 \\ 253,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56,25 \\ 35,25 \end{pmatrix}$$

qui correspond aux prix unitaires respectifs des deux produits.

…

On comprend alors que, de manière générale, si l'on a à résoudre le système linéaire

$$Ax = b$$

où A est une matrice *inversible* d'ordre n, x le vecteur-colonne des inconnus $(x_1, \ldots, x_n)^T$ et $b - (b_1, \ldots, b_n)^T$ un vecteur-colonne donné, la solution est donnée par

$$x = A^{-1}b$$

La question qui se pose est alors la suivante :

Donnée une matrice carrée, comment décider si elle est inversible ou pas, et le cas échéant, comment calculer sa matrice inverse ?

C'est l'objet de ce qui va suivre.

Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

A toute matrice carrée A correspond une valeur appelée *déterminant de* A, que l'on dénote par $\det A$.

Nous éviterons la définition formelle du déterminant (qui implique les notions de *permutation et de signature...*) et allons plutôt nous concentrer sur le calcul effectif de celui-ci ...

Remarquer, pour commencer, que la solution du système linéaire de 2 équations à 2 inconnus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

est donnée dans le cas générique par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}} \begin{pmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Pour les matrices 2×2 suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

on a $\det A = -7/2$, $\det B = 0$ et $\det I_2 = 1$.

De même, on peut considérer la solution dans le cas générique du système linéaire de 3 équations à 3 inconnus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

et repérer le dénominateur du facteur commun à x, y et z.

On peut vérifier, avec un peu de patience, que ce dénominateur est donné dans ce cas par

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

On pose alors

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & := a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned}$$

Remarquer que

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31}\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 3 revient à calculer des déterminants de matrices d'ordre 2.

Pour les matrices 3×3 suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, ,$$

on a

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

et $\det I_3 = 1$.

Remarquer que pour calculer le déterminant d'une matrice A de type 3×3, on avait à calculer 3 déterminants de matrices d'ordre 2, chaque déterminant étant affecté à un coefficient de la première colonne de la matrice A, *au signe près*. Remarquer aussi que les matrices d'ordre 2 impliquées dans les calculs ne sont autres - respectivement - que les matrices obtenues en supprimant de A la ligne et la colonne où est situé le coefficient a_{i1}, $1 \leq i \leq 3$. En fait, on a

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{1} & 0 & 2 \\ \cancel{5} & 0 & -2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \cancel{2} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ \cancel{5} & 0 & -2 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} \cancel{2} & 1 & 3 \\ \cancel{1} & 0 & 2 \\ \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

On introduit alors la méthode itérative suivante pour calculer le déterminant d'une matrice carrée A quelconque :

$*$ Octroyer à chacun des coefficients un signe $+$ ou $-$ en suivant la règle suivante : on associe un signe positif au coefficient a_{11}, puis on alterne les signes en se déplaçant horizontalement ou verticalement.

$*$ Choisir une ligne i ou une colonne j de A (il est préférable, pour une raison qui deviendra claire par la suite, de choisir la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéros). La méthode décrite ci-après est ce qu'on appelle *le développement du déterminant par rapport à la $i-$ème ligne (ou $j-$ème colonne).*

$*$ Multiplier chacun des coefficients a_{ij} de la ligne (ou colonne) choisie par le déterminant de la matrice obtenue après élimination de la $i-$*ème* ligne et la $j-$*ème* colonne de A.

$*$ Faire la somme de ces résultats selon le signe accordé aux coefficients lors de la première étape.

Exemple

Reprenons l'exemple de la matrice A à laquelle on octroie un signe $+$ ou $-$ selon la règle décrite ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 5^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix}$$

Le développement du déterminant par rapport à la $3-\grave{e}me$ colonne, par exemple, donne

$$\det A = 3\det\begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 5^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 5^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 5^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix} = 12$$

Mais, il est préférable de développer par rapport à la deuxième colonne :

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 2^+ & 1^- & 3^+ \\ 1^- & 0^+ & 2^- \\ 5^+ & 0^- & -2^+ \end{pmatrix} + 0 \times \ldots - 0 \times \ldots = 12$$

A et B étant deux matrices carrée d'ordre n, on montre que

$$A \text{ inversible} \iff \det A \neq 0$$

$$\det AB = \det A. \det B$$

Si A est inversible, c.-à-d. si $\det A \neq 0$, alors

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

puisque

$$\det A. \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I_n = 1$$

On a aussi, par ailleurs,

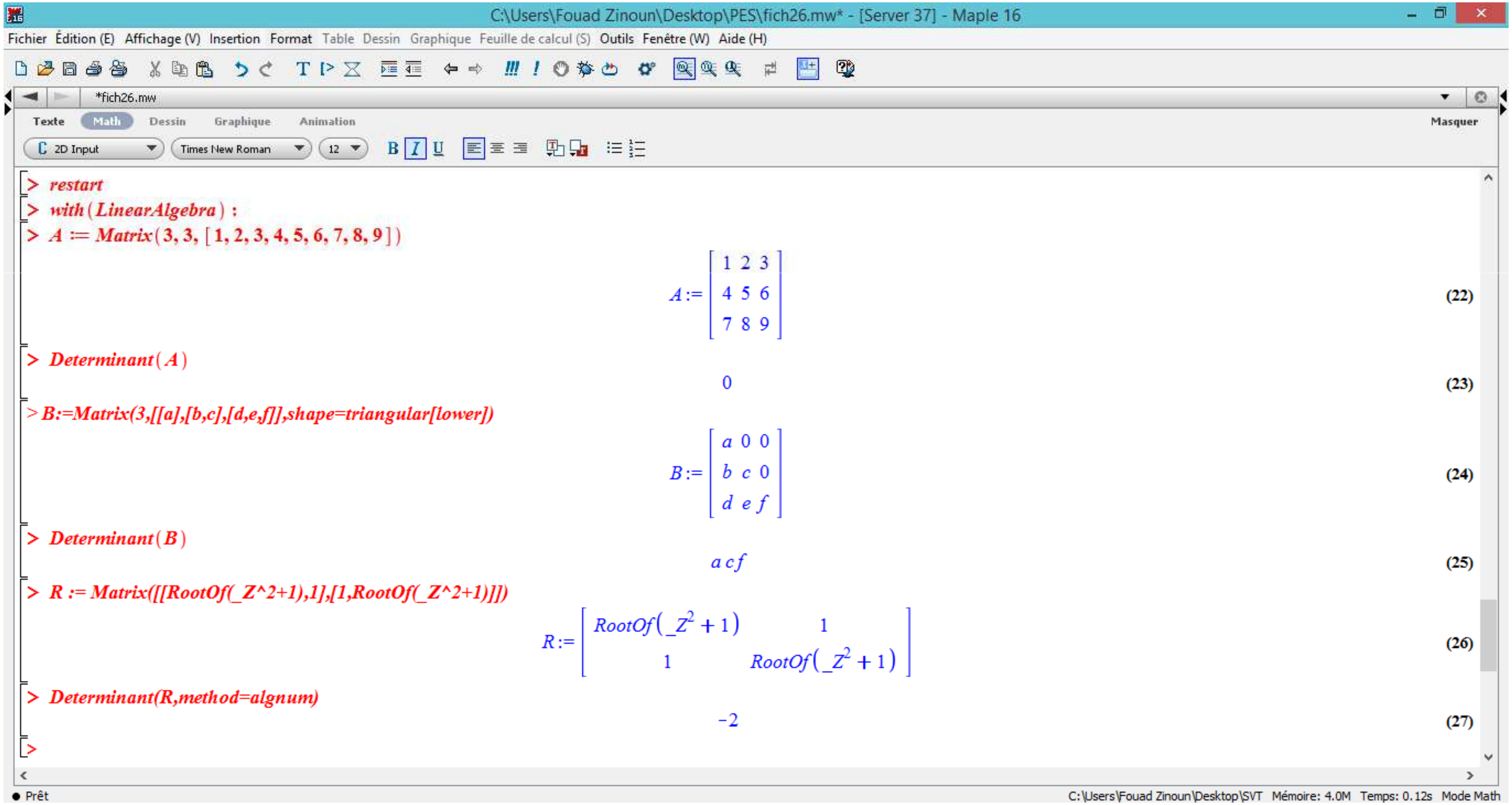
$$\det A = \det A^T$$

A priori, étant donné une matrice carrée A d'ordre n, calculer $\det A$ permet (juste) de décider si A est inversible ou pas (encore faut-il inverser A lorsque celle-ci est inversible!) Donc, si l'on a à répondre seulement à la question d'inversibilité de la matrice A, il n'est pas nécessaire de savoir la valeur *exacte* du déterminant, mais juste si celui-ci est nul ou pas. D'ailleurs, contrairement à ce qu'on pourrait croire, bien que le calcul *récursif* du déterminant puisse paraitre simple, son *coût numérique* est prohibitif : plus de $n!$ miltiplications pour une matrice $n \times n$, c.-à-d., sur un ordinateur fonctionnant à 1 Gigaflops (1 milliard d'opérations par seconde), le temps de calcul pour $n = 50$ est de l'ordre de $9,6\ 10^{47}$ années! D'où le besoin d'une procédure "à bas coût" et qui soit, de préférence, "deux en un": permettre d'une part de tester l'inversibilité de A et d'une autre part, de calculer A^{-1} le cas échéant. Ceci équivaudrait en cas d'inversibilité à chercher *la* solution du système, dit *de Cramer*,

$$Ax = b$$

Une des premières réponses à ce problème est donnée par *l'élimination de Gauss*, ou encore *la méthode du pivot de Gauss*, que l'on développera ci-dessous.

Calcul du déterminant par élimination de Gauss (voir ci-après)



Méthode de Gauss

Transformations élémentaires

Il y a trois types de *transformations élémentaires* des lignes d'une matrice, à savoir :

(T_1) permuter deux lignes,

(T_2) multiplier une ligne par un scalaire *non nul*,

(T_3) ajouter le multiple d'une ligne à une autre ligne (pas la même!).

De manière analogue, on définit les trois types de transformations élémentaires des colonnes d'une matrice.

Exemple

Après une série de transformations élémentaires, une matrice peut devenir difficilement reconnaissable. Par exemple, observer comment la matrice 3×3 suivante est "nettoyée" par des transformations du $3^{ème}$ type :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Deviner les transformations effectuées ...)

Il est clair que si l'on applique une série de transformations élémentaires aux équations d'un système linéaire de la forme

$$Ax = b\ ,$$

en d'autres termes, si l'on ramène la *matrice augmentée* $A|b$ par une série de transformattions élémentaires des lignes à une matrice $A'|b'$, alors l'ensemble des solutions du système $Ax = b$ est égal à celui du système $A'x = b'$.

Cette remarque est à la base de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution d'un système linéaire. En fait, pourquoi ne pas effectuer une série de transformations élémentaires (des lignes de la matrice augmentée $A|b$) de telle manière à ramener le système $Ax = b$ à une forme "facile à résoudre" ...

Une des formes simples sous laquelle peut apparaitre un système linéaire $Ax = b$ (ou encore la matrice A) est ce qu'on appelle *la forme échelonnée*; elle correspond dans le cas où la matrice A est carrée à une matrice *triangulaire supérieure* (i.e. $a_{ij} = 0$ pour $i > j$). C'est à ce cas que nous allons nous restreindre. Concrètement, à titre d'exemple, un système linéaire de 3 équations à 3 inconnus est sous forme échelonnée s'il s'écrit sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{b}$$

On a alors $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$, et par conséquent, si tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls, A est inversible (c'est le critère d'inversibilité utilisé par la méthode de Gauss). L'unique solution x du système peut alors être obtenue en posant $x_3 = b_3/a_{33}$, puis en "remontant" les calculs par substitutions.

Si au moins un coefficient diagonal est nul, A est singulière. On a alors, selon le vecteur-colonne b, soit le système $Ax = b$ qui n'admet pas de solution, soit il en admet une infinité. On ne détaillera pas ce cas dans ce support.

Soit à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$$

On peut appliquer les transformations élémentaires directement aux équations du système, mais pour simplifier, on ne va considérer que la matrice augmentée donnée par

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

Pour neutraliser les coefficients de la première colonne de A qui sont situés sous la diagonale, en l'occurence $a_{21} = 3$ et $a_{31} = 2$, on effectue successivement les transformations élémentaires suivantes

$$\begin{aligned} L_2 \quad &: \quad = L_2 - 3L_1 \\ L_3 \quad &: \quad = L_3 - 2L_1 \end{aligned}$$

Le coefficient $a_{11} = 1$ est *le pivot de Gauss* pour cette étape; il est nécessairement non nul, sinon, on peut échanger la ligne où est situé ce coefficient par une autre ligne de $A|b$ (transformation du type 1) de telle manière à obtenir un coefficient non nul qui servira de pivot de Gauss. Si cette opération s'avère impossible, c'est que tous les coefficients a_{i1} sont nuls; il n'y a donc aucun travail à faire pour cette colonne et l'on déduit déjà, à cette étape, que $\det A = 0$, c.-à-d. que A est non inversible. Cette remarque est valable pour toutes les étapes suivantes : si $a_{ii} \neq 0$, il servira de pivot de Gauss, sinon, "l'échanger" par un coefficient $a_{ki} \neq 0$, $k > i$, lorsque cela est possible, sinon passer à l'étape suivante avec comme information $\det A = 0$.

On obtient alors la matrice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (5) & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$

avec (5) comme nouveau pivot.

...

Pour neutraliser le coefficient -1, situé juste au-dessous du pivot, et donc atteindre la forme échelonnée, il suffit d'effectuer la transformation

$$L_3 := L_3 + \frac{1}{5} L_2$$

obtenant la matrice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right)$$

et le système échelonné correspondant

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & -y & +2z & = 5 \\ & 5y & -5z & = -5 \\ & & -7z & = -21 \end{array}\right.$$

On calcule alors, dans cet ordre, $z = 3$, $y = 2$ et $x = 1$, obtenant ainsi la solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La commande "GaussianElimination" pour obtenir la forme échelonnée
"ReducedRowEchelonForm" pour ramener A à l'identité et obtenir la solution
(Voir ci-après comment inverser une matrice par élimination de Gauss)

C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\PES\fich26.mw* - [Server 37] - Maple 16

```
> restart
> with(LinearAlgebra):
> A := <<1,3,2>|<-1,2,-3>|<2,1,-2>>
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

```
> b := <5,10,-10>
```

$$b := \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix} \quad (32)$$

```
> GaussianElimination(<A|b>);
```

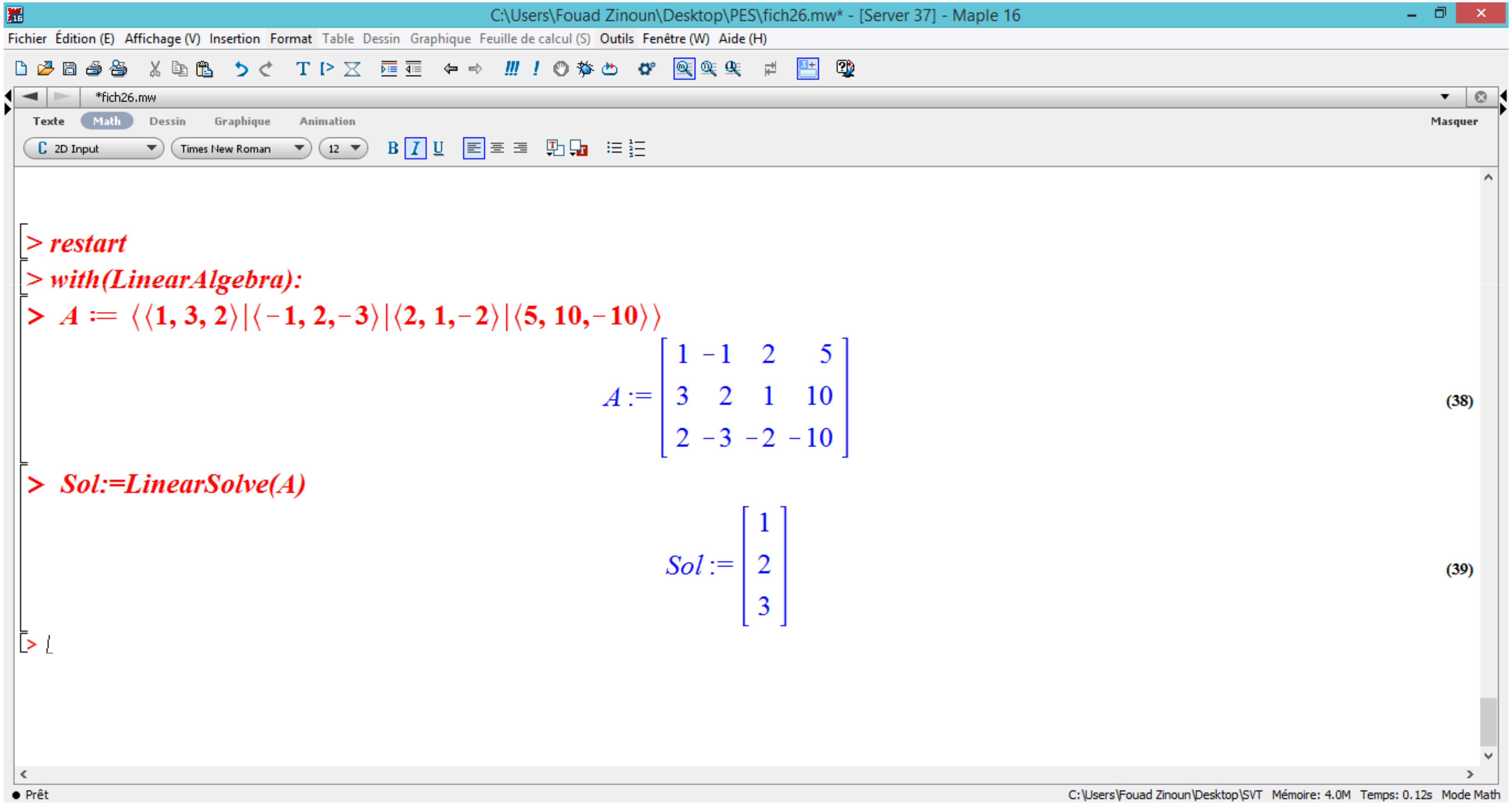
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \quad (33)$$

```
> ReducedRowEchelonForm(<A|b>);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Prêt C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\SVT Mémoire: 4.0M Temps: 0.12s Mode Math

La commande "LinearSolve"



L'élimination de Gauss peut aussi être utilisée pour calculer l'inverse d'une matrice inversible. En fait, si A est une matrice carrée d'ordre n et, rappelons-le, I_n est la matrice identité de même ordre, on montre que si l'on peut ramener par une suite de transformations élémentaires (des lignes) la matrice augmentée

$$A|I_n$$

à la matrice

$$I_n|B$$

alors, $B = A^{-1}$.

Pratiquement, on ramène $A|I_n$ à $I_n|B$ colonne par colonne : s'il s'avère, au milieu de la procédure, qu'un pivot est nul et ne peut être échangé, c'est que A est singulière; si tous les pivots sont non nuls, A est inversible et il ne reste qu'à effectuer la dernière étape pour avoir A^{-1}.

Cet exemple est repris du livre Linear Algebra, de son auteur Klaus Jänich (Springer 1994), que je recommande vivement à toute personne amenée à faire de l'algèbre linéaire ...

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Partant de la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} (1) & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on obtient les matrices suivantes, après transformations,

...

$$L_2 := L_2 - L_1 \quad ; \quad L_4 := L_4 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 := L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 := L_1 - L_3 \quad ; \quad L_2 := L_2 - L_3 \quad ; \quad L_4 := L_4 + L_3$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (2) \end{array}\right.}_{T}\underbrace{\left|\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{M}$$

Remarquer que tous les coefficients diagonaux de T sont non nuls : A est inversible ...

...

Le chemin est alors libre vers A^{-1} ...

$$\begin{array}{lcl} L_4 & : & = \frac{1}{2} L_4 \\ L_3 & : & = L_3 - L_4 \\ L_2 & : & = L_2 + L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Résultat : A est inversible et l'on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ok ?

(Pour répondre à cette petite question, vérifier que $AA^{-1} = I_4$,
ou bien $A^{-1}A = I_4$, ... et se rappeler qu'il est inutile de tester les deux !)

Sur Maple


```
> restart
> with(LinearAlgebra) :
> Id := Matrix(4, shape = identity)
```

$$Id := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

```
> A := <<1, 1, 0, 1>|<0, 1, -1, 0>|<1, 2, 0, 0>|<1, 1, 1, 2>>
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

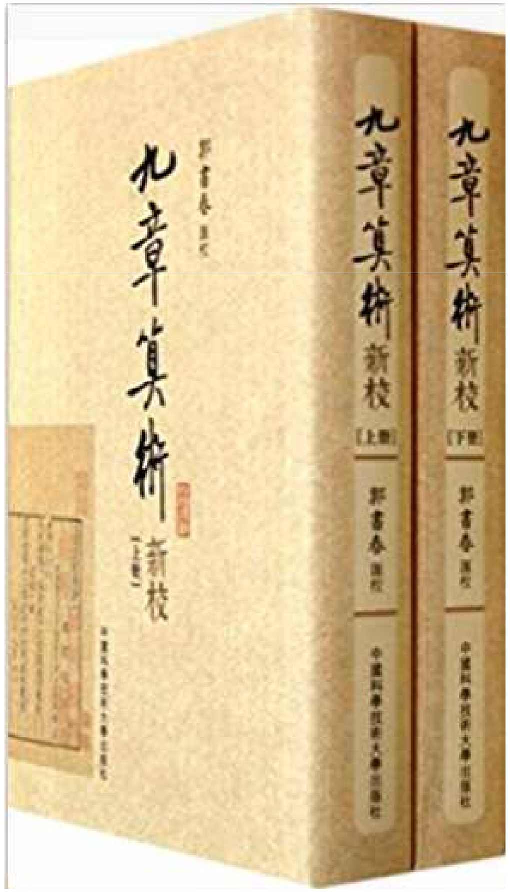
```
> ReducedRowEchelonForm(<A|Id>)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (37)$$

L'élimination de Gauss s'applique aussi, de manière générale, à la recherche de l'ensemble de solutions (s'il y en a) des systèmes linéaires $Ax = b$ où la matrice A n'est pas inversible ($\det A = 0$), où encore lorsque A n'est même pas une matrice carrée. Nous n'avons pas abordé ce cas dans ce support de cours, mais des exemples de systèmes linéaires "rectangulaires" ou à matrice singulière pourront être traités à titre facultatif en travaux dirigés ..

La méthode du pivot de Gauss, comme son nom l'indique, est nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) et parfois aussi à Wilhelm Jordan (1842 - 1899), deux mathématiciens allemands, et l'on parle alors d'élimination de Gauss-Jordan. Cependant, il est à noter que la procédure, sous une forme équivalente, est connue des Chinois depuis au moins le 1^{er} siècle après J.-C. Elle est référencée dans le livre “ *Les Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique* ” dont elle fait l'objet du Chapitre VIII : “ *La disposition rectangulaire : problèmes à plusieurs inconnues* ”, et qui n'est autre que l'élimination de Gauss. La seule différence est que, en chinois, où l'on écrit habituellement de haut en bas, on représente aussi les lignes d'une matrice verticalement, mettant alors en œuvre des transformations élémentaires des colonnes (au lieu des lignes) de la matrice. Ceci dit, il est à noter aussi que les premières tablettes cunéiformes rapportant des problèmes didactiques en mathématiques, dont la résolution de systèmes d'équations (non nécessairement linéaires), reviennent aux Babyloniens de la vallée du Tigre et de l'Euphrate (l'actuel Iraq) et datent d'au moins 2000 ans avant J.-C …

Les Neuf Chapitres sur Amazon.com ainsi que la première page du manuscrit



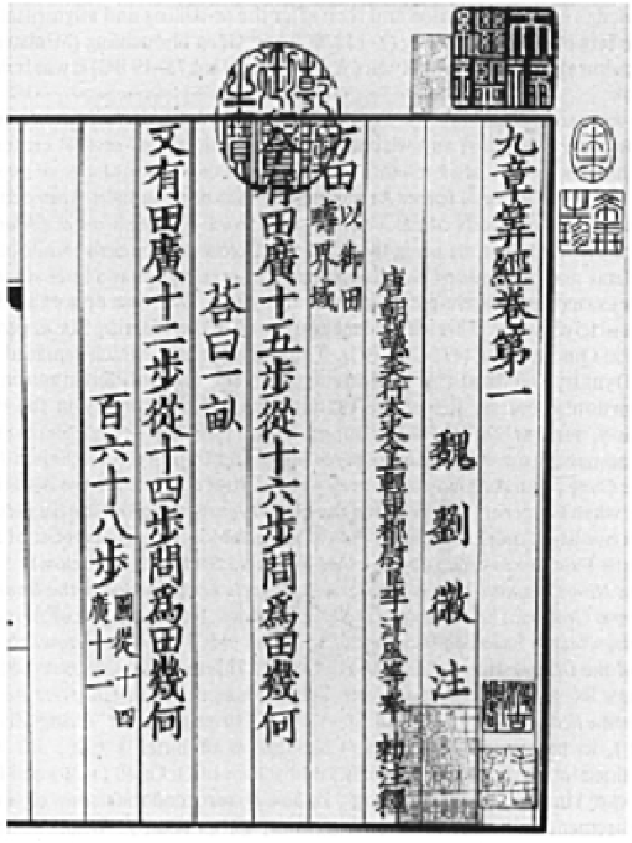


Image Wikipédia

Tablette cunéiforme exposée au Musée du Proche-Orient à Berlin (12,1 sur 7,9 cm)

Problème: Déterminer les surfaces de deux champs dont la surface totale est de 1800 sar, sachant que le loyer d'un des champs est de 2 silá de grains par 3 sar, le loyer de l'autre est de 1 silá par 2 sar et le loyer total du premier champ dépasse l'autre de 500 silá.

Les systèmes linéaires suivants ont fait l'objet d'épreuves d'examen dans les années antérieures (plus de 2000 ans ap. J.-C.!) Pour chacun d'eux, chercher la solution par la méthode de Gauss. Et pour plus de pratique, pour le système (1), on pourra aussi montrer par calcul du déterminant que la matrice associée est inversible, chercher la matrice inverse par élimination de Gauss puis en déduire la solution du système.

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{c} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{array}\right. \qquad (2)\quad \left\{\begin{array}{c} x + z + t = 2 \\ x + y + 2z + t = 1 \\ -y + t = 2 \\ x + 2t = 5 \end{array}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{c} x + y + 2z + t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = 3 \\ x + 2t = 5 \\ x - y + 3t = 7 \end{array}\right. \qquad (4)\quad \left\{\begin{array}{c} x + y - z - t = 1 \\ x + 2y + z + t = 2 \\ x - y - z + t = 1 \\ 2x + 3y - z - t = 0 \end{array}\right.$$

Université Mohammed V – Faculté des Sciences – Rabat
Filière SVTU – Premier Semestre
2018 – 2019

Mathématiques

Contrôle final (1h30')

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2}, \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que $1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que (u_n) est strictement monotone.
c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle de type Bernoulli suivante :

$$(1) \qquad (1+x^2)y' + y = -y^2 e^{arctg(x)}$$

a) Montrer que pour $y \neq 0$, le changement de variable $z = \dfrac{1}{y}$ ramène l'équation (1) à l'équation linéaire suivante :

$$(2) \qquad (1+x^2)z' - z = e^{arctg(x)}$$

b) Résoudre l'équation (2) et en déduire la solution générale de l'équation (1).

Exercice 3. Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ 2x + y + 3z + 2t = 3 \\ x + 2t = 5 \\ x - y + 3t = 7 \end{cases}$$

Université Mohammed V – Faculté des Sciences – Rabat
Filière SVTU – Premier Semestre
2018 – 2019

Mathématiques

Contrôle de rattrapage (1h30')

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{3}{u_n}), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que (u_n) est strictement monotone.
c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2.

a) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = xe^x$$

b) En déduire la solution particulière vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3. Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z - t = 3 \\ -x + 2y - 2z - t = -3 \\ 2x + y - 2z + t = 0 \\ 3x - y + 2z - 2t = 6 \end{cases}$$